تمارين (١) لطلاب السنة الثالثة رياضيات
مقرر الرياضيات المتقطعة
د. وسام طلب

١. **تمرين**

أجب عما يلي

١- ما هو عدد عناصر المجموعة

$$A = \{(a,b,c) \in \{1,2,3,4,5\}^3 \ / \ a \neq b, b \neq c, a \neq c\}$$ ؟

٢- بكم طريقة يمكن توزيع كرتين إحداهما بيضاء والأخرى سوداء على خمس صناديق بحيث تكون الكرتان في صندوقين مختلفين؟

٣- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة متماثلة على n صندوق ($r \leq n$) ، بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة على الأكثر ؟

٤- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة متمايزة على n صندوق ($r \leq n$) ، بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة على الأكثر ؟

٥- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة متمايزة على n صندوق ؟

٦- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة بيضاء و s كرة سوداء و t كرة حمراء ($r+s+t=n$) على n صندوق ، بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة فقط ؟

٧- ما هو عدد الأعداد الطبيعية الأصغر تماماً من 100 و اللتي آحادها وعشراتها أصغر تماماً من 7 و لا تقبل القسمة على 11 ؟

٨- ما هو عدد حلول المعادلة $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ في المجموعة $\{0,1\}$ ؟

٩- ما هو عدد عناصر المجموعة

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \ / \ 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq n\}$$

١٠- ما هو عدد عناصر المجموعة

$$B=\{(x_1,x_2,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k\ /\ 1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_k\le n\}$$

.٢ تمرين

١ - بكم طريقة يمكن توزيع n كرة متماثلة على k صندوق.

٢ - استنتج عدد حلول المعادلة $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ في $\mathbb{N}$.

.٣ تمرين

ليكن لدينا n نقطة في المستوي بحيث أن أي ثلاثة منها لا تقع على استقامة واحدة، و المطلوب

١- ما هو عدد المستقيمات المارة بنقطتين من هذه المجموعة.

٢- ما هو عدد المثلثات الممكن تشكيلها من ثلاث نقاط من المجموعة المعطاة.

.٤ تمرين

الهدف من هذا التمرين هو اثبات علاقة منشور نيوتن

١- ليكن لدينا n صندوق، يحوي كل منهم على كرة بيضاء و كرة سوداء، نسحب من كل صندوق كرة واحدة فقط ، بكم طريقة يمكن الحصول على k كرة بيضاء و $n-k$ كرة سوداء .

٢- استنتج مما سبق علاقة منشور نيوتن، أي أنه من أجل كل $a,b\in\mathbb{R}^*$ ، $n\in\mathbb{N}$ فإن

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

.٥ تمرين

أثبت أن

١- $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$

٢- $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$

٦. **تمرين**

من أجل $k \le m, n$ أثبت أن

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

توجيه

طريقة أولى

انطلاقا من العلاقة

$$(x+y)^{m+n} = (x+y)^m.(x+y)^n$$

طريقة ثانية

بالبحث عن عدد المجموعات الجزئية من $\{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ و المؤلفة من k عنصر .

٧. **تمرين**

لتكن A مجموعة متهية عدد عناصرها n ، أثبت أن عدد أجزاء A هو 2^n ، أي أن $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

توجيه :

طريقة أولى

أوجد تقابل بين المجموعتين $\mathcal{P}(A), \{0,1\}^A$.

طريقة ثانية

إن مسألة توزيع عناصر A واللتي عددها n في إحدى المحموعتين B أو B^c يماثل توزيع n كرة متمايزة على صندوقين .

طريقة ثالثة

إن الجماعة $\{\mathcal{P}_k(A) \ , \ 0 \le k \le n\}$ تشكل تجزئة للمجموعة $\mathcal{P}(A)$ ، كما أن $|\mathcal{P}_k(A)| = \binom{n}{k}$.

طريقة رابعة

هناك تقابل بين مجموعة أجزاء المجموعة $\{1,2,3\}$ ومجموعة رؤوس المكعب في الفراغ $\mathbb{R}^3$.

٨. تمرين

أثبت دون استخدام الاستقراء الرياضي أو الحساب المباشر أن

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

توجيه :

فكر بتوزيع كرة بيضاء و $k-1$ كرة سوداء على n صندوق ، بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة على الأكثر.

٩. تمرين

ليكن m, n عددين طبيعيين موجبين مثبّتين ، ولتكن $n_1, n_2, \ldots, n_m$ أعداد طبيعية مثبّتة بحيث $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ ، ما هو عدد التطبيقات الغامرة $f : [m] \longrightarrow [n]$ اللتي تحقق

$$f^{-1}(\{i\}) = n_i \ , \ \forall i \in [m]$$

١٠. تمرين

أثبت أن عدد المخططات Γ من $(0,0)$ حتى (m,n) هو $\binom{m+n}{n}$.

١١. تمرين

أوجد عدد التطبيقات المتزايدة تماماً $f : [n] \longrightarrow [m]$ ، حيث $n \leq m$.

١٢. تمرين

أوجد عدد التطبيقات المتزايدة $f : [n] \longrightarrow [m]$.

١٣. تمرين

أوجد عدد عناصر المجموعة

$$\{x_1 x_2 \cdots x_n \ / \ x_i \in \{2,3,7\}\}$$

.

١٤. تمرين

أثبت أن جداء k عدد صحيح متتالي سيقبل القسمة على $k!$.

١٥. تمرين

لتكن R حلقة تبديلية ، و لتكن $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ حلقة الحدوديات بالمتحولات $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، أوجد عدد عناصر المجموعة $A \subset R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ المعطاة كما يلي :

$$A := \{ \ \prod_{i=1}^{n} z_i \ / \ z_i \in \{x_1, \dots x_n\} \ \ \}$$

١٦. تمرين

لتكن المجموعة $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، نعرّف $W_m(A)$ مجموعة الكلمات اللتي طولها m على الأبجدية A كما يلي :

$$W_m(A) := \{w := w_1 w_2 \cdots w_m \ / \ w_i \in A \ , \ \forall i \in [m]\}$$

و نعرف $W(A)$ مجموعة الكلمات على الأبجدية A كما يلي

$$W(A) := \cup_{m \geq 0} W_m(A)$$

و المطلوب :

1- ما هو عدد عناصر المجموعة $W_m(A)$.

2- لتكن الأعداد الطبيعية المثبّتة $k_1, k_2, \dots, k_n$ بحيث $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$ ، و لنعرّف المجموعة $W_m^{k_1, \dots, k_n}(A)$ بأنها مجموعة الكلمات اللتي طولها m من الأبجدية A بحيث أن الحرف a_i يظهر فيها k_i مرّة ، من أجل كل i من $[n]$. أوجد عدد عناصر المجموعة $W_m^{k_1, \dots, k_n}(A)$.

3- من أجل كل تبديل $\pi \in S_m$ ، لنعرّف المجموعة

$$\pi * W_m^{k_1, \dots, k_n}(A) := \{w_{\pi_1} w_{\pi_2} \cdots w_{\pi_m} \ / \ w_1 w_2 \cdots w_m \in W_m^{k_1, \dots, k_n}(A)\}$$

من أجل كل $w_1 w_2 \cdots w_m \in W_m^{k_1, \dots, k_n}(A)$ لنعرّف المجموعة

$$S_m * w_1 w_2 \cdots w_m := \{w_{\pi_1} w_{\pi_2} \cdots w_{\pi_m} \ / \ \pi \in S_m\}$$

أوجد عدد عناصر كل من المجموعتين

$$S_m * w_1 w_2 \cdots w_m \ , \ \pi * W_m^{k_1, \dots, k_n}(A).$$

١٧. تمرين

أوجد عدد عناصر المجموعة

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3 \ / \ x+y+z=20 \ , \ x\geq 3 \ , \ y\geq 2 \ , \ z\geq 5\}$$

١٨. مبرهنة

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية ، عندئذٍ فإن

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i\cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots$$

$$+(-1)^{r-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_r}| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

بعبارةٍ أخرى

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_r}|$$

١٩. نتيجة

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من المجموعة المتهية X ، عندئذٍ فإن

$$\begin{aligned} |\cap_{i=1}^n A_i^c| &= |(\cup_{i=1}^n A_i)^c| = |X| - |\cup_{i=1}^n A_i| \\ &= |X| - \left\{\sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_r}|\right\} \\ &= |X| + \left\{\sum_{r=1}^n (-1)^{r} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_r}|\right\} \end{aligned}$$

التمرينين التاليين تطبيق مباشرة للنتيجة السابقة.

٢٠. تمرين

الهدف من هذا التمرين إيجاد عدد التطبيقات الغامرة $f:[m]\longrightarrow[n]$ ، بفرض $m\geq n$.

-1 لتكن $F([m],[n])$ مجموعة كل التوابع من $[m]$ إلى $[n]$. ولنعرّف المجموعات التالية

$$\forall i\in[n]\ ,\ A_i:=\{f\in F([m],[n])\ /\ f^{-1}(i)=\emptyset\}$$

أوجد عدد عناصر كل من المجموعات التالية

$$F([m],[n])\ ,\ A_i\ ,\ A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_r}\ ,\ \forall 1\leq r\leq n\ ,\ \forall 1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n$$

-2 أوجد عدد عناصر المجموعة $A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_n^c$ ، ثم استنتج عدد التوابع الغامرة $f:[m]\longrightarrow[n]$.

٢١. تمرين

أوجد عدد التباديل في S_n التي لا تملك نقاط ثابتة، أي عدد عناصر المجموعة

$$X:=\{\pi\in S_n\ /\ \pi(i)\neq i\ ,\ \forall i\in[n]\}$$

توجيه :

لنعرّف المجموعات التالية

$$\forall i\in[n]\ ,\ A_i:=\{\pi\in S_n\ /\ \pi(i)=i\}$$

عندئذٍ من الواضح أن

$$X:=A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_n^c.$$