الرياضيات المتقطعة ـ سنة ٣ رياضيات
العلاقات
د. وسام طلب

1− العلاقات بين مجموعتين

.1 تعريف

نعرّف العلاقة بين مجموعتين غير خاليتين X,Y بأنها أي ثلاثية من الشكل (X,Y,A) حيث $\emptyset \neq A \subset X \text{x} Y$ ، وسنرمز لهذه العلاقة بالرمز R_A أو R اختصاراً ، وسندعو X منطلق العلاقة ، Y مستقرها ، A بيانها (أو قاعدة ربطها) . سنقول إن العنصر $x \in X$ يرتبط بالعنصر $y \in Y$ (وسنرمّز ذلك $x\ R_A\ y$) إذاا كان $(x,y) \in A$. وسنمثل ذلك في المخطط السهمي للعلاقة بإرسال سهم موجه من العنصر x إلى العنصر y .

.2 مثال

لتكن العلاقة $R_A = (X,Y,A)$ حيث $Y := \{a,b\} \quad , \quad X := \{1,2,3\}$

$$A := \{(1,b),(3,a),(3,b)\}$$

أي أن

$$1\ R\ b \quad , \quad 3\ R\ a \quad , \quad 3\ R\ b$$

حالات خاصة :

لتكن العلاقة $R = (X,Y,A)$

1− إذا كانت العلاقة R تحقق الشرط التالي:

من أجل كل $x \in X$ فإنه يوجد عنصر وحيد $y \in Y$ يحقق $x\ R\ y$ ، فإننا سنقول إن العلاقة R تحقق شرط التابع. وهذا يكافئ أنه في المخطط السهمي للعلاقة كل عنصر في المنطلق X يخرج منه سهم واحد فقط.

2− إذا كانت العلاقة R تحقق الشرط التالي:

من أجل كل $y \in Y$ فإنه يوجد عنصر (واحد على الأقل) $x \in X$ يحقق $x\ R\ y$ ، فإننا سنقول إن العلاقة R تحقق شرط الغمر. وهذا يكافئ أنه في المخطط السهمي للعلاقة كل عنصر في المستقر Y يصله سهم واحد على الأقل.

$3-$ إذا كانت العلاقة R تحقق الشرط التالي:

من أجل كل $x, x' \in X$

$x\ R\ y\ ,\ x'\ R\ y$ فإن $x = x'$ ، فإننا سنقول إن العلاقة R تحقق شرط التباين. وهذا يكافئ أنه في المخطط السهمي للعلاقة كل عنصر في المستقر Y يصله سهم واحد على الأكثر.

3. مثال

العلاقة المعطاة في المثال ٢ لا تحقق شرط التابع ولا تحقق شرط التباين لكن تحقق شرط الغمر.

4. ملاحظة

$1-$ إذا كانت العلاقة $R_A = (X, Y, A)$ تحقق شرط التابع، فإننا سندعو هذه العلاقة تابعاً، و إذا رمزنا لهذا التابع بالرمز f_A ، فإن $f_A = R_A$ كما أن

$$\begin{aligned} f \ : \quad & X \ \longrightarrow Y \\ & x \ \longmapsto y \quad ; \quad x\ R_A\ y \end{aligned}$$

حيث

$$A := \{(x, f(x)) \ / \ x \in X\}$$

و في حال $X = Y = R$ فإن المجموعة A هي المنحني البياني للتابع f_A .

كما أن كل عنصر في المنطلق يخرج منه سهم وحيد (شرط التابع)

$2-$ إذا كانت العلاقة $R_A = (X, Y, A)$ تحقق شرط التابع و شرط التباين، فإننا سندعو هذه العلاقة تابعاً متبايناً، وفي هذه الحالة فإن كل عنصر في المنطلق يخرج منه سهم وحيد (شرط التابع) ، كما أن كل عنصر في المستقر يصله سهم على الأكثر (شرط التباين) .

3− إذا كانت العلاقة $R_A = (X, Y, A)$ تحقق شرط التابع و شرط الغمر، فإننا سندعو هذه العلاقة تابعاً غامراً، وفي هذه الحالة فإن كل عنصر في المنطلق يخرج منه سهم وحيد (شرط التابع) ،كما أن كل عنصر في المستقر يصله سهم على الأقل (شرط الغمر) .

4− إذا كانت العلاقة $R_A = (X, Y, A)$ تحقق شرط التابع و شرط التباين و شرط الغمر، فإننا سندعو هذه العلاقة تابعاً تقابلاً، وفي هذه الحالة فإن كل عنصر في المنطلق يخرج منه سهم وحيد (شرط التابع) ،كما أن كل عنصر في المستقر يصله سهم وحيد من المنطلق (شرطي الغمر والتباين بآنٍ واحد) .

2− صفات العلاقة على مجموعة

.5 تعريف

لتكن $R = (X, X, A)$ علاقة معرفة على المجموعة X منطلق و مستقر العلاقة ، لنرمّز هذه العلاقة $R = (X, A)$ اختصاراً ، وليكن $A \subseteq X^2$ هو بيان العلاقة R ، سندعو العلاقة R

1− انعكاسية إذاا كان

$$\forall x \in X \ : \ x \ R \ x$$

2− تناظرية إذاا كان

$$\forall x, y \in X \ : \ (x \ R \ y \Longrightarrow y \ R \ x)$$

1− متعدية إذاا كان

$$\forall x \in X \ : \ (x \ R \ y \ \wedge \ y \ R \ z \Longrightarrow x \ R \ z)$$

1− تخالفية إذاا كان

$$\forall x, y \in X \ : \ (x \ R \ y \ \wedge \ y \ R \ x \Longrightarrow x = y)$$

.6 تمرين

لتكن X مجموعة غير خالية عدد عناصرها n

1– أوجد عدد العلاقات الممكن تعريفها على المجموعة X .

2– أوجد عدد العلاقات الانعكاسية الممكن تعريفها على المجموعة X .

3– أوجد عدد العلاقات التناظرية الممكن تعريفها على المجموعة X .

7. تعريف

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة X

1– نقول عن العلاقة R إنها علاقة تكافؤ على المجموعة X إذا كانت هذه العلاقة انعكاسية ومتعدية و **تناظرية** .

2– نقول عن العلاقة R إنها علاقة ترتيب على المجموعة X إذا كانت هذه العلاقة انعكاسية ومتعدية و **تخالفية** .

لتكن (X, R) مجموعة مرتبة، نقول إن العنصرين x, y قابلان للمقارنة في X إذا كان xRy أو yRx . نقول إن R هي علاقة ترتيب كلي على X إذا كان كل عنصران من X قابلان للمقارنة وفق تلك العلاقة .

8. تعريف

لتكن $R_B = (X, B)$, $R_A = (X, A)$ علاقتين معرفتين على المجموعة X ، نقول إن العلاقة R_A أدق من العلاقة R_B إذا كان $A \subset B$.

9. تمرين

لتكن X مجموعة غير خالية، أثبت أن علاقة الاحتواء هي علاقة ترتيب على $\mathcal{P}(X)$. هل هي علاقة ترتيب كلي ؟

10. تمرين

لتكن X مجموعة المثلثات في المستوي ، لنزود المجموعة X بالعلاقتين التاليتين R, R' ، حيث نقول عن مثلثين أنهما مرتبطان بالعلاقة R إذا كانا متطابقين، ونقول عنهما أنهما مرتبطان بالعلاقة R' إذا كانا متشابهين، أثبت أن R, R' علاقتي تكافؤ على X . أي العلاقتين أدق ؟

11. تمرين

لنزود المجموعة $X \neq \emptyset$ بالعلاقتين $R_1 = (X, A_1)$, $R_2 = (X, A_2)$ حيث

$$A_1 := \{(x,x) \quad / \quad x \in X\} \quad , \quad A_2 := \{(x,y) \quad / \quad x,y \in X\}$$
$$\forall x,y \in X \ , \ x \ R_1 \ y \Leftrightarrow (x,y) \in A_1 \Leftrightarrow x = y$$
$$\forall x,y \in X \ , \ x \ R_2 \ y \Leftrightarrow (x,y) \in A_2 \Leftrightarrow x,y \in X$$

والمطلوب

1– أثبت أن R_1 علاقة تكافؤ وترتيب بآنٍ واحد، هل توجد علاقة أخرى يمكن تعريفها على X بحيث تكون علاقة تكافؤ وترتيب بآنٍ واحد.

2– هل R_2 علاقة تكافؤ ؟ وهل هي علاقة ترتيب ؟

3– تحقق أنه من أجل أي علاقة R معرفة على المجموعة X فإن R_1 أدق من R ، كما أن R أدق من R_2 .

12. تمرين

لتكن المجموعة $X \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ و لنزود المجموعة X بالعلاقة R المعرفة كما يلي

$$\forall x,y \in X \ , \ xRy \Longleftrightarrow x \leq y$$

أثبت أن R علاقة ترتيب على X .

13. تمرين

لتكن Y مجموعة مزودة بعلاقة الترتيب R ، و لتكن X أي مجموعة غير خالية، و لنزود المجموعة $F(X,Y)$ (مجموعة التوابع من X إلى Y) بالعلاقة R' المعرفة كما يلي

أثبت أن R' علاقة ترتيب على $F(X,Y)$.

14. تمرين

1– لنزود مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بالعلاقة R المعرفة كما يلي

$$\forall x,y \in \mathbb{N} \quad : \quad xRy \Longleftrightarrow x|y$$

حيث $x|y$ تعني أن العدد x يقسم العدد y . أثبت أن R علاقة ترتيب على $\mathbb{N}$. هل هي علاقة ترتيب كلي ؟

2− لنزود مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بالعلاقة السابقة R ، هل R علاقة ترتيب على $\mathbb{Z}$ ؟

15. تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية مزودة بعلاقة تكافؤ R ، ولنعرف المجموعات التالية

$$\forall x \in X \quad , \quad [x]_R = \{y \in X \quad / \quad x \ R \ y\} \subset X$$

سندعو $[x]_R$ صف تكافؤ العنصر x بالنسبة للعلاقة R ، وسنرمزه اختصاراً $[x]$.

سنرمّز X/R لمجموعة صفوف تكافؤ عناصر X ، أي أن

$$X/R = \{[x] \quad / \quad x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$$

16. مثال

$$X = \{a, b, c\}$$
$$R = (X, A)$$

$$A = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,a), (b,c)\}$$
$$X/R = \{ \ \{a,b\}, \{c\} \ \}$$

17. تمرين

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، و لنزود المجموعة X بالعلاقة التالية

$$\forall x, y \in X \quad , \quad xRy \Longleftrightarrow x \equiv y \ \ (mod \ \ n) \Longleftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$$

أثبت أن R هي علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

18. تمرين

لنزود $\mathbb{N}^2$ بالعلاقة R المعرفة كما يلي

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}, \ \ (a, b) \ \ R \ \ (c, d) \ \ \Longleftrightarrow a + d = b + c \Longleftrightarrow a - b = c - d$$

أثبت أن R علاقة تكافؤ[1] .

---

[1] تستخدم صفوف تكافؤ العلاقة السابقة لبناء $\mathbb{Z}$ انطلاقاً من $\mathbb{N}$ فيتم تعريف العدد الصحيح السالب $-n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بأنه $-n := [(0,n)]$

19. تمرين

لتزود $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}^*$ بالعلاقة R المعرفة كما يلي

$$\forall (a,b),(c,d)\in \mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}^*,\ \ (a,b)\ \ R\ \ (c,d)\ \ \Longleftrightarrow ad=bc \Longleftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

أثبت أن R علاقة تكافؤ[2] .

20. تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية، سندعو تجزئة للمجموعة X أي جماعة من المجموعات الجزئية غير الخالية من X والمنفصلة مثنى مثنى والتي اجتماعها يساوي X .

أي أنه تشكل أسرة المجموعات $\{A_1,\ldots,A_n\}$ تجزئة للمجموعة X إذاا تحققت الشروط التالية:

1- $\forall i\in [n]\ ,\ \ A_i\neq\emptyset$

2- $\forall i,j\in [n]\ \ ;\ \ i\neq j\ \ ,\ \ A_i\cap A_j=\emptyset$

3- $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=X$

21. مبرهنة

لتكن X مجموعة غير خالية، عندئذٍ

1- إذا كانت X مزودة بعلاقة تكافؤ R ، فإن

$$X/R=\{[x]\quad/\quad x\in X\}$$

تشكل تجزئة للمجموعة X .

2- من أجل كل تجزئة

$$\{A_i\quad/\quad i\in I\}$$

للمجموعة X فإنه توجد علاقة وحيدة R تحقق

$$X/R=\{A_i\quad/\quad i\in I\}$$

---

[2] تستخدم صفوف تكافؤ العلاقة السابقة لبناء $\mathbb{Q}$ انطلاقاً من $\mathbb{Z}$ فيتم تعريف العدد العادي $\frac{m}{n}$ من أجل كل $\mathbb{Z}\ni m,\mathbb{Z}^*\ni n$ بأنه $\frac{m}{n}:=[(m,n)]$

الإثبات

1– لنتحقق من شروط التجزئة

١ ـ من أجل كل $x \in X$ فإن $x \in [x]$ وبالتالي $[x] \neq \emptyset$.

٢ ـ لنبرهن أن

$$[x] \neq [y] \Longrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$$

لنفرض جدلاً أن $[x] \neq [y]$ و أن $z \in [x] \cap [y] \neq \emptyset$ و بالتالي

$$z \in [x], z \in [y] \Rightarrow xRz, zRy \Rightarrow\Rightarrow xRy \Rightarrow [x] = [y]$$

تناقض .

٣ ـ لنبرهن أن

$$\bigcup_{x \in X} [x] = X$$

من الواضح أن

$$\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X$$

وبما أنه من أجل كل $x \in X$ فإن $x \in [x]$ أي أن $\{x\} \in [x]$ و منه

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$$

وبالتالي

$$\bigcup_{x \in X} [x] = X$$

إذاً من تحقق الشروط الثلاث السابقة نجد أن X/R تشكل تجزئة للمجموعة X .

2– لتكن $\{A_i \ / \ i \in I\}$ تجزئة للمجموعة X و لنعرف العلاقة R على X كما يلي :

$$\forall x, y \in X \quad , \quad xRy \Longleftrightarrow \exists i \in I : x, y \in A_i$$

عندئذٍ فإن يمكن بسهولة التحقق من أن R علاقة تكافؤ.

من أجل كل $x, y \in X$ بحيث xRy فإنه يوجد $i \in I$ يحقق $x, y \in A_i$ و
بالتالي $[x] = [y] = A_i$ أي أن

$$X/R = \{[x] \quad / \quad x \in X\} = \{A_i \quad / \quad i \in I\}$$

■