السنة الثالثة رياضيات
مقرر الرياضيات المتقطعة
د. وسام طلب

تعميم منشور الكرخي - نيوتن :

1. مبرهنة

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall |x| < 1 \ , \quad \frac{1}{(1-x)^n} \ = \ \sum_{m \geq 0} \binom{m+n-1}{m} \ x^m$$

الإثبات

طريقة أولى

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^n} &= \frac{1}{(1-x)} . \frac{1}{(1-x)} \cdots \frac{1}{(1-x)} \\
&= (\sum_{k_1 \in \mathbb{N}} x^{k_1}) \ (\sum_{k_2 \in \mathbb{N}} x^{k_2}) \ \cdots \ (\sum_{k_n \in \mathbb{N}} x^{k_n}) \\
&= \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}} x^{k_1} x^{k_2} \ldots x^{k_n} \\
&= \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}} x^{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} \\
&= \sum_{m \geq 0} |\{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n \ / \ k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m\}| \ . \ x^m \\
&= \sum_{m \geq 0} \binom{m+n-1}{m} \ x^m .
\end{aligned}$$

طريقة ثانية

نعلم أن منشور تايلور ماكلوران للتابع f يعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \ x^k$$

حيث $f^{(k)}(0)$ هو المشتق النوني للتابع $f(x)$ عند $x = 0$.

ليكن

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}=(1-x)^{-n}$$

فنجد

$$f'(x)=n(1-x)^{-n-1}\ ,\ f''(x)=n(n+1)(1-x)^{-n-2},\dots,$$
$$f^{(k)}(x)=n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)\ \ (1-x)^{-n-k}$$

ومنه

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!}=\binom{n+k-1}{k}$$

وبالتالي

$$f(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k=\sum_{m\geq 0}\binom{m+n-1}{m}\ x^m. \qquad \blacksquare$$

تعميم تعريف $\binom{n}{k}$ من أجل $n \ni \mathbb{Z}$:

لنعرّف الحدودية التالية في حلقة الحدوديات $\mathbb{Q}[x]$

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad , \quad \binom{x}{n}:=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

فعلى سبيل المثال

$$\binom{x}{2}:=\frac{x(x-1)}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

ومنه من أجل كل $a \ni \mathbb{R}$ ، $n,k \ni \mathbb{N}^*$ فإن

$$\begin{aligned}
\binom{a}{n} &= \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}.\\
\binom{-1}{n} &= \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}\\
&= (-1)^n \ \frac{n(n-1)\cdots 2.1}{n!} = (-1)^n.\\
\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!}\\
&= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}\\
&= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.
\end{aligned}$$

إذاً

$$\boxed{\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}}$$

بالتعويض في المبرهنة السابقة نجد أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $|x| < 1$ فإن

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-n} &= \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{m\geq 0} \binom{m+n-1}{m} \ x^m\\
&= \sum_{m\geq 0} (-1)^m \binom{-n}{m} \ x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n}{m} \ (-x)^m.
\end{aligned}$$

لكننا نعلم أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $x \in \mathbb{R}$ فإن

$$(1-x)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \ (-x)^m$$

وإذا عرّفنا

$$\forall k > n \geq 0 \ , \ \binom{n}{k} := 0$$

نجد

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ (1-x)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} \ (-x)^m$$

مما يبرهن صحة النتيجة التالية

2. نتيجة

من أجل كل عدد صحيح $n \in \mathbb{Z}$ ومن أجل كل $|x| < 1$ فإن

$$\begin{aligned} (1-x)^n &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} \ (-x)^m \\ (1+x)^n &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} \ x^m \end{aligned}$$