الرياضيات المتقطعة لطلاب السنة ٣ رياضيات
الاستقراء الرياضي
د. وسام طلب

$1-$ البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي

١. مبرهنة

لتكن $p(n)$ قضية تتعلق بالعدد $n \in \mathbb{N}$ ، و لنفرض أن القضية $p(0)$ محققة ، و لنفرض أنه كلما كانت القضية $p(n)$ محققة فإن القضية $p(n+1)$ ستكون محققة أيضاً . عندئذٍ فإن القضية $p(n)$ محققة مهما يكن $n \in \mathbb{N}$.

البرهان

لنفرض جدلاً وجود $m \in \mathbb{N}$ من أجله القضية $p(m)$ غير محققة، عندئذٍ فالمجموعة $A := \{k \in \mathbb{N} \ / \ \text{غير محققة } p(k)\}$ غير خالية و منه يوجد عدد صحيح وحيد موجب r بحيث $r = min\ A$ ، و منه $r-1 \notin A$ وبالتالي $p(r-1)$ محققة، و حسب الفرض الاستقرائي فإن $p(r)$ محققة ، و هذا يناقض كون $r \in A$ فالفرض الجدلي خاطئ، وبالتالي فإن القضية $p(n)$ محققة مهما يكن $n \in \mathbb{N}$.

٢. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن مجموع أول n عدد فردي هو n^2 .

٣. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن عدد المسارات من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة (m,n) هو $\binom{m+n}{n}$.

٤. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي المبرهنة الأساسية في الحساب، و التي تنص على أن كل عدد صحيح موجب n يكتب بشكل وحيد بالشكل

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$$

حيث $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ أعداد أولية، و $k_1, k_2, \ldots, k_m$ أعداد صحيحة موجبة.

٥. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أنه من أجل كل عدد صحيح موجب n فإن

$$\sum_{\{a_1,\dots a_k\}\subset\{1,2,\dots,n\}} \frac{1}{a_1a_2\dots a_k} = n$$

حيث المجموع يتم على كل المجموعات الجزئية غير الخالية من المجموعة $\{1,2,\dots,n\}$.

٦. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي، أنه من أجل كل عدد صحيح موجب n فإن مشتق التابع $f(x)=x^n$ هو nx^{n-1} .

٧. تمرين

أوجد الخطأ في البرهان التالي باستخدام الاستقراء الرياضي للقضية التالية :

♦ من أجل كل عدد صحيح موجب n ، إذا كان العددان الصحيحان الموجبان x,y يحققان $max\{x,y\}=n$ فإن $x=y=n$. ♦

البرهان : من أجل $n=1$ فالقضية صحيحة وضوحاً. لنفرض أن $n>1$ و أن القضية صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب k أصغر تماماً من n ، و لنبرهن صحتها من أجل n ، لنفرض أن $max\{x,y\}=n$ عندئذٍ فإن $max\{x-1,y-1\}=n-1$ ومنه حسب الفرض الاستقرائي $x-1=y-1=n-1$ ومنه $x=y=n$.

٨. تمرين

أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء الرياضي:

♦ **مبرهنة :** كل الأحصنة لها نفس اللون. ♦

البرهان : لتكن القضية التالية

$p(n):$ كل الأحصنة في مجموعة مكونة من n حصان لها نفس اللون

لنبرهن بالاستقراء الرياضي أن هذه القضية **صحيحة** من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$. من أجل $n = 1$ فالقضية $p(1)$ **صحيحة** وضوحاً. لنفرض أن القضية $p(k)$ **صحيحة** ، و لنبرهن أن القضية $p(k+1)$ **صحيحة**. لتكن $\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ **مجموعة** مكونة من $k+1$ حصاناً. عندئذٍ فحسب الفرض الاستقرائي **مجموعة** الأحصنة $\{a_2, \ldots, a_{k+1}\}$ لها نفس اللون ، وكذلك **مجموعة** الأحصنة $\{a_1, \ldots, a_k\}$ لها نفس اللون ، ومنه **مجموعة** الأحصنة $\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ لها نفس اللون ، فالقضية $p(k+1)$ **صحيحة**.

٩. **تمرين**

أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء الرياضي:

♦ **مبرهنة :** ليكن a عدد حقيقي مغاير للصفر عندئذٍ فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $a^n = 1$. ♦

البرهان : من أجل $n = 0$ فالقضية **صحيحة** وضوحاً. لنفرض **صحة** القضية من أجل كل $n \leq k$ ولنبرهن أن $a^{n+1} = 1$. لدينا

$$a^{n+1} = \frac{a^n \ . \ a^n}{a^{n-1}} = \frac{1.1}{1} = 1$$

١٠. **تمرين**

أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء الرياضي:

♦ **مبرهنة :** من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $5n = 0$. ♦

البرهان : من أجل $n = 0$ فالقضية **صحيحة** وضوحاً. لنفرض **صحة** القضية من أجل كل عدد **صحيح** k بحيث $0 \leq k < n$ ، ولنبرهن أن $5n = 0$. ليكن i, j عددين **صحيحين** غير سالبين يحققان $i + j = n$ عندئذٍ من الفرض الاستقرائي نجد $5n = 5(i+j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

2– العلاقات الاستقراء

لتكن $(a_n)_{n\geq 0}$ متتالية من الأعداد الحقيقية ، إن أي علاقة بين الحد a_n والحدود اللتي قبلها $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ تدعى علاقة استقرائية.

مثال:

$$a_n = 7a_{n-1} - 3n^2 a_{n-2}$$

هي علاقة استقرائية للمتتالية a_n .

مثال :

يمكن تعريف $n!$ بالعلاقات الاستقرائية التالية

$$b_0 = 1 \ , \ b_n = nb_{n-1} \ , \quad \forall n \geq 1 \ .$$

فنجد أن

$$b_n = n! \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

١١. تمرين

أوجد المتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ اللتي تحقق الشروط التالية:

$$a_0 = 4 \ , \ a_1 = -1 \ , \ a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \forall \ n \geq 2$$

الحل

ليكن

$$F(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

عندئذٍ

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad = \ a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\ xF(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^n = a_0 x + \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^n \\ x^2F(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} = \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

و منه

$$\begin{aligned} F(x) - (a_0 + a_1 x) &= \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geq 2} \left(-a_{n-1} + 2a_{n-2}\right) x^n \\ &= -\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^n + 2\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^n \\ &= -\left(xF(x) - a_0 x\right) + 2x^2 F(x) \end{aligned}$$

نعوض $a_0 = 4 \ , \ a_1 = -1$ فنجد

$$F(x) - (4 - x) = -\left(xF(x) - 4x\right) + 2x^2 F(x)$$

ومنه

$$F(x)(1 + x - 2x^2) = 3x + 4$$

$$F(x) = \frac{3x+4}{1+x-2x^2} = \frac{3x+4}{(1+2x)(1-x)} = \frac{\frac{7}{3}}{1-x} + \frac{\frac{5}{3}}{1+2x}$$

$$F(x) = \frac{7}{3}\sum_{n\geq 0} x^n + \frac{5}{3}\sum_{n\geq 0} (-2x)^n = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{7}{3} + \frac{5}{3}(-2)^n\right) x^n$$

لكن

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

إذاً من أجل كل $n \geq 0$ فإن

$$\boxed{a_n = \frac{7}{3} + \frac{5}{3}(-2)^n}$$

مستقيمات في المستوي (*Jacob Steiner* 1883)

عند رسم ثلاث مستقيمات في المستوي، فإن المستوي سينقسم إلى عدة مناطق حسب أوضاع المستقيمات، فإذا كانت المستقيمات متوازية تماما (غير منطبقة) فإنها ستقسم المستوي إلى 4 مناطق. بينما إذا كان اثنان منها متوازيان فقط، فإنها ستقسم المستوي إلى ٦ مناطق. و إذا كانت المستقيمات الثلاث متقاطعة مثنى مثنى (لا يوجد أي اثنين متوازيين) عندئذٍ فإن عدد المناطق 7 ، وهو العدد الأعظمي للمناطق الممكن تشكيلها بثلاث مستقيمات في المستوي.

و بشكل عام، ما هو العدد الأعظمي للمناطق الناتجة عن رسم n مستقيم في المستوي ؟

سنقوم بحل هذه المسألة باستخدام العلاقات الاستقرائية.

لنفرض أن a_n هو العدد الأعظمي للمناطق الناتجة عن رسم n مستقيم في المستوي.

عندئذٍ فإن

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = 2 \ , \ a_2 = 4 \ , \ a_3 = 7, \ldots$$

كما أن

$$a_n = a_{n-1} + n$$

و منه

$$a_n = a_{n-2}+(n-1)+n = a_{n-3}+(n-2)+(n-1)+n = \cdots = a_0+1+2+\cdots+n$$

$$\Longrightarrow a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} \quad .$$

أي أنه عند رسم n مستقيم في المستوي، فإن العدد الأعظمي للمناطق الممكن الحصول عليها هو $\frac{n^2+n+2}{2}$.

١٢. تمرين

ما هو عدد الكلمات $W_n(\{a,b,c\}) \ni w := w_1w_2\cdots w_n$ اللتي طولها n من الأبجدية $A := \{a,b,c\}$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد فردي من المرات .

الحل

لتكن X_n مجموعة الكلمات اللتي طولها n من الأبجدية $A := \{a,b,c\}$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد فردي من المرات ، و لنفرض أن $|X_n| := a_n$.

لتكن Y_n مجموعة الكلمات $W_n(\{a,b,c\}) \ni w := w_1w_2\cdots w_{n-1}\ b$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد فردي من المرات .

لتكن Z_n مجموعة الكلمات $W_n(\{a,b,c\}) \ni w := w_1w_2\cdots w_{n-1}\ c$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد فردي من المرات .

و إذا رمّزنا X'_n مجموعة الكلمات اللتي طولها n من الأبجدية $A := \{a,b,c\}$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد زوجي من المرات ، عندئذٍ فإن

$$|X_n| + |X'_n| = |W_n(A)| = 3^n \quad , \quad |Y_n| = |Z_n| = a_{n-1}$$

و منه

$$\begin{aligned} a_n &= |X_n| = |Y_n| + |Z_n| + |X'_{n-1}| \\ &= a_{n-1} + a_{n-1} + \left(3^{n-1} - a_{n-1}\right) \\ &= a_{n-1} + 3^{n-1} \end{aligned}$$

إذاً

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}}$$

و منه

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots 3 + a_1 \\ &= 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots 3 + 1 \\ &= \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

١٣. تمرين

ما هو عدد الأعلام المقسمة أفقياً إلى n قسم ، و اللتي يمكن تشكيلها باستخدام 3 ألوان مختلفة ، وذلك في الحالتين التاليتين

1– لا يسمح بتواجد نفس اللون في قسمين متجاورين.

2– الشرط السابق مضافاً إليه أن القسمين الأفقيين الأول والأخير من لونين مختلفين .

الحل :

1– ليكن a_n هو العدد المطلوب، بما أنه هناك ثلاث خيارات لتلوين القسم الأفقي الأول ، و خيار ين لتلوين القسم الأفقي الثاني ، و خيارين لتلوين القسم الأفقي الثالث ، و هكذا ... ، إذاً

$$a_n = 3.2^{n-1}.$$

2– ليكن b_n هو العدد المطلوب، عندئذٍ فإن

$$b_n = 3.2^{n-1} - l_n$$

حيث l_n هو عدد الأعلام المكونة من n قسم أفقي ملونة بثلاث ألوان (كل قسمين متجاورين من لونين مختلفين) ، بحيث أن القسمين الأول والأخير من نفس اللون .

و منه

$$l_n = b_{n-1}$$

وبالتالي

$$b_n = 3.2^{n-1} - b_{n-1}.$$

ليكن

$$F(x) := \sum_{n\geq 2} b_n x^n$$

عندئذٍ

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n\geq 2} 3.2^{n-1}x^n - \sum_{n\geq 2} b_{n-1}x^n \\
&= 3x.\sum_{n\geq 2}(2x)^{n-1} - x\sum_{n\geq 3} b_{n-1}x^{n-1} \\
&= 3x(\frac{1}{1-x}-1) - x.\sum_{n\geq 2} b_n x^n \\
&= \frac{6x^2}{1-2x} - xF(x)
\end{aligned}
$$

ومنه

$$F(x) = \frac{6x^2}{(1+x)(1-2x)}$$

نقسم البسط على المقام فنجد

$$F(x) = -3 + \frac{2}{1+x} + \frac{1}{1-2x}$$

و من ثم

$$
\begin{aligned}
F(x) &= -3 + 2\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n + \sum_{n\geq 0} 2^n x^n \\
&= \sum_{n\geq 2}\left(2.(-1)^n + 2^n\right)x^n \\
&= \sum_{n\geq 2} b_n x^n
\end{aligned}
$$

و منه

$$b_n = 2.(-1)^n + 2^n \ , \ \forall n \geq 2.$$

إذاً عدد الأعلام المؤلفة من n قسم أفقي و الملونة بثلاث ألوان، بحيث أن القسمين الأول والأخير من لونين مختلفين هو $2.(-1)^n + 2^n \ , \ \forall n \geq 2$.

مسألة برج هانوي ($Eduard\ Lucas\ \ 1883$)

ليكن لدينا ثلاث عواميد، و برج مؤلف من n قرص موضوعة بشكل متناقص (من الأسفل إلى الأعلى) على العامود الأول ، و المطلوب نقل هذا البرج (قرص بعد قرص) من العامود الأول إلى العامود الثالث (باستخدام العامود الثاني) و ذلك بتحريك كل قرص بشرط أن القرص الكبير دائماً تحت القرص الأصغر منه.
والمطلوب:

1– هل يمكن دائما نقل برج الأقراص من العمود الأول إلى العمود الثالث، وذلك مهما كان العدد الطبيعي n .

2– ما هو عدد الخطوات (الحركات) اللازمة لنقل البرج المكون من n قرص، من العمود الأول إلى العمود الثالث .

الحل

1– لنبرهن ذلك بالاستقراء، الرياضي على n . من أجل $n = 1$ العملية تتم بحركة واحدة. لنفرض أنه يمكن نقل $n - 1$ قرص، و لنبرهن أنه يمكن نقل n قرص. حسب الفرض الاستقرائي فإنه يمكننا نقل أول $n - 1$ قرص إلى العمود الثاني، ومن ثم نتقل القرص الأخير (أكبر قرص) إلى العمود الأول ، و من ثم ننقل البرج المكون من $n - 1$ قرص (حسب الفرض الاستقرائي) من العمود الثاني إلى الثالث ، و بذلك تتم العملية.

2– لنفرض أن a_n هو عدد الخطوات اللازمة لنقل برج مكون من n قرص من العمود الأول إلى الثالث، عندئذٍ فلإجراء هذه العملية ننقل أول $n - 1$ قرص إلى العمود الثاني وذلك يحتاج a_{n-1} خطوة، ومن ثم ننقل القرص الأخير (أكبر قرص) إلى العمود الثالث بخطوة واحدة، و أخيراً نقوم بنقل البرج المكون من $n - 1$ قرص من العمود الثاني إلى الثالث، وذلك يحتاج a_{n-1} خطوة، ومنه

$$a_n = 1 + 2a_{n-1}.$$

و لنوجد a_n انطلاقاً من العلاقة الاستقرائية السابقة.

لدينا

$$a_n + 1 = 2a_{n-1} + 2 = 2.\left(a_{n-1} + 1\right)$$

لنفرض أن

$$b_n := a_n + 1$$

فنجد

$$b_n = 2b_{n-1} = 2^2 b_{n-2} = 2^3 b_{n-3} = \cdots = 2^{n-1} b_1 = 2^n$$

ومنه

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

أي أن عدد الخطوات اللازمة لنقل البرج المكون من n قرص، من العمود الأول إلى العمود الثالث هو $2^n - 1$.

فمثلاً لنقل 10 أقراص نحتاج $2^{10} - 1$ خطوة (أكثر من 1000 خطوة) . و لنقل 30 قرص نحتاج $2^{30} - 1$ أي لأكثر من 1000^3 خطوة ، و إذا فرضنا أن شخصا ما يحتاج ثانية واحدة لإجراة كل خطوة، فبحساب بسيط نجد أنه سيحتاج إلى أكثر من ثلاثين سنة من نقل الأقراص (مع العمل ليل نهار دون توقف) ليتمكن من نقل برج مكون من 30 قرص من العمود الأول إلى الثالث.