الرياضيات المتقطعة ـ سنة ٣ رياضيات
د. وسام طلب

تجزئة مجموعة

١. تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية، سندعو **تجزئة للمجموعة** X أي جماعة من المجموعات الجزئية غير الخالية من X والمنفصلة مثنى مثنى والتي اجتماعها يساوي X .

أي أنه تشكل أسرة المجموعات $\{A_1, \ldots, A_n\}$ تجزئة للمجموعة X إذاا تحققت الشروط التالية:

1- $\forall i \in [n] \ , \ A_i \neq \emptyset$

2- $\forall i,j \in [n] \ ; \ i \neq j \ , \ A_i \cap A_j = \emptyset$

3- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = X$

مثال

إن $\{\{1,3,4\},\{2,5\}\}$ تجزئة للمجموعة $[5] := \{1,2,3,4,5\}$.

إن تجزئات المجموعة $[3]$ هي أسر المجموعات التالية : $\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\{\{2,3\},\{1\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ و بالتالي فإن عدد تجزئات المجموعة $[3]$ هو 5 .

٢. تمرين

1- بكم طريقة يمكن توزيع 52 ورقة شدة على أربع لاعبين بالتساوي (أي كل لاعب 13 ورقة).

2- بكم طريقة يمكن توزيع 52 كرة متمايزة على أربع صناديق متمايزة و بالتساوي (لا أهمية للترتيب أو الإعادة في توزيع الكرات).

3- ما هو عدد تجزئات المجموعة $[52]$ والمؤلفة من أربع مجموعات لها نفس عدد العناصر.

الحل

من أجل الطلبين الأول والثاني، يكون عدد الطرق المطلوب هو

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} = \frac{52!}{(13)^4}$$

والآن لنبحث عن عدد تجزئات المجموعة 52 والمؤلفة من أربع مجموعات لها نفس عدد العناصر.

لنعرف المجموعتين

$$X := \{(A_1, A_2, A_3, A_4) \ / \ |A_i| = 13; \forall i \in [4], \sqcup A_i = [52]\}$$

و

$$Y := \{ \ \{A_1, A_2, A_3, A_4 \ \} \ / \ |A_i| = 13; \forall i \in [4], \sqcup A_i = [52]\}$$

،فإننا بالاعتماد على الطلبين السابقين للمسألة نجد

$$|X| = \frac{52!}{(13)^4}$$

و بالتالي فإن

$$|Y| = \frac{|X|}{4!} = \frac{52!}{(13)^4}$$

٣. تمرين

بكم طريقة يمكن تجزئة المجموعة $[mn]$ إلى $[m]$ مجموعة، كل منها يحوي $[n]$ عنصر.

لنعرف المجموعتين

$$X := \{(A_1, A_2, \dots, A_m) \ / \ |A_i| = n; \forall i \in [m], \sqcup A_i = [mn]\}$$

و

$$Y := \{\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \ / \ |A_i| = n; \forall i \in [m], \sqcup A_i = [mn]\}$$

من أجل كل $X \ni (A_1, A_2, \dots, A_m), (B_1, B_2, \dots, B_m)$ فإن

$$(A_1, A_2, \dots, A_m) = (B_1, B_2, \dots, B_m) \iff \exists \pi \in S_m \ : \ A_i = B_{\pi_i} \ , \ \forall i \in [m]$$

$$\iff \{A_1, A_2, \dots, A_m\} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$$

ومنه

$$|Y| = \frac{|X|}{m!}$$

كما أن

$$|X| = \binom{mn}{n}\binom{mn-n}{n}\binom{mn-2n}{n}\cdots\binom{mn-(m-1)n}{n} = \frac{(mn)!}{(n!)^m}$$

و بالتالي فإن

$$|Y| = \frac{|X|}{m!} = \frac{(mn)!}{(n!)^m\ m!}$$

٤. **تمرين**

بكم طريقة يمكن توزيع $2m$ كرة متمايزة على m صندوق متمايز، بحيث أن كل صندوق يحوي m كرة .

الجواب

$$\frac{(2m)!}{(2)^m}$$

٥. **تمرين**

بكم طريقة يمكن توزيع nm كرة متمايزة على m صندوق متمايز، بحيث أن كل صندوق يحوي n كرة .

الجواب

$$\frac{(nm)!}{(n!)^m}$$

٦. **تمرين**

بكم طريقة يمكن تشكيل مباريات لكرة القدم بين $2n$ فريق بحيث أن كل فريق يلعب مباراة واحدة فقط .

عدد ستيرلينغ من النوع الثاني $(James\ Stirling\quad 1692-1770)$

من أجل كل $1 \leq k \leq n$ ، نعرّف عدد ستيرلينغ من النوع الثاني $S(n,k)$ بأنه عدد تجزئات المجموعة $[n]$ والمؤلفة من k مجموعة، أي أن
$S(n,k) = card\{\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset \mathcal{P}([n])\ /\ \sqcup_{i=1}^{k} A_i = [n], A_i \neq \emptyset; \forall i \in [k]\}$

مثال:
لحساب $S(4,2)$ يجب إيجاد كل تجزئات المجموعة $[4]$ المكونة من مجموعتين ، فنجد أن

$$\begin{aligned} [4] &= \{1\} \cup \{2,3,4\} = \{2\} \cup \{1,3,4\} = \{3\} \cup \{1,2,4\} = \{4\} \cup \{1,2,3\} \\ &= \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,3\} \cup \{2,4\} = \{1,4\} \cup \{2,3\}. \end{aligned}$$

و منه

$$S(4,2) = 7$$

٧. ملاحظة

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن

$$S(n,n) = S(n,1) = 1$$

٨. مبرهنة

من أجل كل $2 \leq k \leq n$ فإن

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\ S(n-1,k)$$

٩. تمرين

الهدف من هذا التمرين هو إثبات المبرهنة السابقة . ليكن $2 \leq k \leq n$ ، ولنعرّف المجموعات التالية

X هي مجموعة تجزئات $[n]$ من الشكل $\{A_1, \ldots, A_k\}$.

Y_j (حيث $j \in [k]$) هي مجموعة تجزئات $[n]$ من الشكل $\{A_1, \ldots, A_{j-1}, A_j = \{n\}, A_{j+1}, \ldots, A_k\}$.

Z هي مجموعة تجزئات $[n]$ من الشكل $\{A_1,\ldots,A_k\}$ حيث $A_i \neq \{n\}, \forall i \in [k]$
. والمطلوب:

1– ما هو عدد عناصر المجموعات

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$$

2– ما هو عدد عناصر المجموعة Z

استنتج $|X|$ بدلالة $|Y_1|,\ldots,|Y_k|,|Z|$ ، و من ثم استنتج أن

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\ S(n-1,k)$$

١٠. مبرهنة

من أجل كل $2 \leq n$ فإن

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$$

الحل :

إن عدد تجزئات المجموعة $[n]$ إلى مجموعتين غير خاليتين يساوي نصف عدد المجموعات الجزئية من المجموعة $[n]$ و المختلفة عن $\emptyset, [n]$ أي يساوي

$$\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

١١. تمرين

ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً منتهياً عدد عناصره q ، أوجد عدد عناصر المجموعة التالية $GL_n(\mathbb{K})$ وهي مجموعة المصفوفات القلوبة والمربعة من المرتبة n و بأمثال من الحقل $\mathbb{K}$ (يوجد تقابل بين هذه المجموعة والمجموعة $GL(\mathbb{K}^n)$ مجموعة التطبيقات الخطية القلوبة على الفضاء الشعاعي $\mathbb{K}^n$) .

١٢. تمرين

ليكن $\mathbb{N}^* \ni n$ ، $\mathbb{N} \ni p$ ، ولتكن $\mathbb{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ مجموعة الحدوديات بالمتحولات $x_1,x_2,\ldots,x_n$ وبأمثال من حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، نعلم أن $\mathbb{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ هو فضاء شعاعي غير منتهي البعد على الحقل $\mathbb{R}$. نقول عن الحدودية $f(x_1,\ldots,x_n)$ إنها متجانسة ومن الدرجة p إذاا كان من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ فإن

$$f(tx_1,\dots,tx_n)=t^pf(x_1,\dots,x_n)$$

لنرمّز $\mathbb{R}_{H,p}[x_1,x_2,\dots,x_n]$ مجموعة كل الحدوديات المتجانسة بالمتحولات $x_1,x_2,\dots,x_n$ وبأمثال من حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، أوجد بعد الفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}_{H,p}[x_1,x_2,\dots,x_n]$.

١٣. تمرين

لتكن الأبجدية $A=\{a_1,a_2,\dots a_n\}$. أوجد عدد الكلمات من الطول $2n$ على الأبجدية A ، بحيث كل حرف من حروف الأبجدية مكرر فيها مرتين فقط .

١٤. تعريف

ليكن $n \ni \mathbb{N}^*$ ، و لنفرض أن

$$n=\sum_{i=1}^{k} i\ \alpha_i$$

عندئذٍ كل تجزئة للمجموعة $[n]$ من الشكل

$$\{A_{i,j}\subset[n]\ /\ 1\le i\le k, 1\le j\le\alpha_i\ ;\ |A_{i,j}|=i\ ,\ \bigsqcup_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le\alpha_i}} A_{i,j}=[n]\}$$

(حيث $\bigsqcup$ يرمز للاجتماع المنفصل) تدعى تجزئة من النوع أو الطراز $(type)$

$$1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots k^{\alpha_k}$$

أي أنها تجزئات للمجموعة $[n]$ و مكونة من $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_k$ مجموعة، بحيث منها : α_1 مجموعة قدرتها 1 و α_2 مجموعة قدرتها 2 و وهكذا... حتى α_k مجموعة قدرتها k .

مثال

إن التجزئة التالية

$$\{\ \{1\},\{2\},\{3\},\{4,5\},\{6,7\},\{8,9,10\}\ \}$$

للمجموعة $[10]$ هي من الطراز $1^3\ 2^2\ 3^1$.

١٥. مبرهنة

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، ولنفرض أن

$$n = \sum_{i=1}^{k} i\alpha_i$$

عندئذٍ فإن عدد تجزئات المجموعة $[n]$ من الطراز

$$1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots k^{\alpha_k}$$

هو

$$\frac{n!}{(1!)^{\alpha_1}\ (\alpha_1)!\ (2!)^{\alpha_2}\ \alpha_2!\ \cdots\ (k!)^{\alpha_k}\ \alpha_k!}$$