جامعة حلب

كلية العلوم

قسم الرياضيات

ملخص جبر خطي(2)

نظري دورة(2011-2012)

مدرس المقرر: د.عمر زيدي

التطبيق الخطي:ليكن V,W فضائين شعاعيين فوق الحقل K

يسمى كل تطبيق $f:V\to W$ يحقق الشرطين:

$$1)\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$2)\ f(\alpha x)=\alpha f(x) \qquad ;\ \forall\, x,y\in V\,,\alpha\in K$$

بتطبيق خطي(محول خطي) هومورفيزم فضاءات شعاعية .

وأن الشرطين 1) و 2) يكافئان شرط واحد وهو:

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y) \qquad ;\forall\, x,y\in V \quad , \quad \alpha,\beta\in K$$

<u>**نظرية:**</u> إذا كان $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً فإن:

$$1)\ f(0)=0$$

$$2)\ f(-a)=-f(a) \qquad ;\forall\, a\in V$$

تعريف:ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً تسمى المجموعة:

$$\{\,x\in V \ ;\ f(x)=0\}$$

بنواة التطبيق الخطي ويرمز لها بالرمز $Kerf$.

<u>**نظرية:**</u> إذا كان $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً فإن:

1- الصورة المباشرة وفق f لأي فضاء جزئي من V هو فضاء جزئي من W.
2- الصورة العكسية وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي من W هو فضاء جزئي من V .
3- $Kerf$ هي فضاء شعاعي جزئي من V.
4- إذا كانت الأشعة $v_1,v_2,\dots,v_n$ تولد V فإن الأشعة:

$f(v_1),f(v_2),\dots,f(v_n)$ تولد $f(V)$

برهان (4): $\forall\, y\in f(V)\Rightarrow \exists x\in V\,;y=f(x)$

$$x=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n$$

وذلك لأن العناصر $v_1,v_2,\dots,v_n$ تولد V

$$y=f(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n)\Rightarrow$$

$$y = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$$

وبالتالي العناصر $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ تولد $f(V)$

مثال: ليكن $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z,t) = (x - y + z + t\,, x + 2z - t\,, x + y + 3z - 3t)$$

1- عين $Kerf$ وأوجد أساساً لها.

2- أوجد أساساً ل $f(\mathbb{R}^4)$.

الحل:

حسب تعريف $Kerf$ نجد:

$$Kerf = \{\, (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,; f(x,y,z,t) = (0,0,0)\} \ \Rightarrow$$

$$Kerf = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x - y + z + t = 0\,\}$$

$$x + 2z - t = 0$$

$$x + y + 3z - 3t = 0$$

ومنه ينتج لدينا المعادلات الثلاثة:

$$1)\quad x - y + z + t = 0$$

$$2)\quad x + 2z - t = 0$$

$$3)\quad x + y + 3z - 3t = 0$$

نحل جملة المعادلات الثلاثة بطريقة غاوص:

بضرب (1 ب(-1) وبجمعها إلى (2 و(3 نجد:

$$1')\quad x - y + z + t = 0$$

$$2')\quad y + z - 2t = 0$$

$$3')\quad 2y + 2z - 4t = 0$$

بضرب($2'$ ب(-2) وبجمعها إلى ($3'$ نجد:

$$1'')\quad x - y + z + t = 0$$

$$2'')\quad y + z - 2t = 0$$

$$3'')\quad 0 = 0$$

من ("2) نجد:

$$y = 2t - z$$

بالتعويض في ("1) نجد:

$$x - 2t + z + z + t = 0 \Rightarrow$$

$$x = t - 2z$$

ومنه نجد أن:

$$Kerf = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; x = t - 2z \, , y = 2t - z \} \Rightarrow$$

$$Kerf = \{(-2z, -z, z, 0) + (t, 2t, 0, t) \ ; \ z, t \in \mathbb{R}\}$$

ومنه نجد وبفرض $z = \alpha \ , \ t = \beta$ نجد:

$$Kerf = \{ \alpha(-2, -1,1,0) + \beta(1,2,0,1) \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

ومنه نجد أن المجموعة:

$$\{ (-2, -1,1,0), (1,2,0,1)\}$$

تشكل أساس ل $Kerf$.

- نعلم أن الأساس القانوني ل$\mathbb{R}^4$ هو مجموعة الأشعة :

$$\{ (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

وهي تولد $\mathbb{R}^4$ ومستقلة خطياً:

وبما أنها تولد $\mathbb{R}^4$ فحسب النظرية تكون مجموعة الأشعة:

$$\{ f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f \ (0,0,1,0), f(0,0,0,1)\}$$

تولد $f(\mathbb{R}^4)$.

ولكن:

$$f(1,0,0,0) = (1,1,1) \quad , \quad f(0,1,0,0) = (-1,0,1)$$

$$f \ (0,0,1,0) = (1,2,3) \quad , \quad f(0,0,0,1) = (1, -1, -3)$$

إذاً مجموعة الأشعة:

$$\{ (1,1,1), (-1,0,1), (1,2,3), (1, -1, -3)\}$$

تولد $f(\mathbb{R}^4)$.

لنضع الأشعة الأخيرة أسطر في مصفوفة ونطبق عليها عدد من التحويلات الأولية المنتهية وذلك لكي تتحول للشكل الدرجي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

بإجراء التحويلات التالية :

$$R_1 + R_2 \ \ , -R_1 + R_3 , -R_1 + R_4$$

على المصفوفة السابقة نجد:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

أما بالنسبة للمصفوفة الأخيرة فنجري عليها التحويلات التالية:

$$-R_2 + R_3 \ \ , 2R_2 + R_4$$

فنحصل على المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبالتالي حسب الملاحظة المأخوذة في**(جبر خطي (1))** أن الأسطر غير الصفرية في المصفوفة الدرجية السابقة مستقلة خطياً وتولد $f(\mathbb{R}^4)$ وبالتالي مجموعة الأشعة:

$$\{\, (1,1,1), (0,1,2)\}$$

تشكل أساس ل $f(\mathbb{R}^4)$ أي أساس ل Imf وهو المطلوب.

تمرين: ليكن $f: V \to W$ تطبيقاً خطياً ولتكن $v_1, v_2, \dots, v_n$ أشعة من V برهن على أنه إذا كانت الأشعة $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ مستقلة خطياً فإن $v_1, v_2, \dots, v_n$ مستقلة خطياً.

البرهان:

نضع $\alpha_i \in K \ ; \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = f(0)$$

ولكن حسب الفرض f تطبيق خطي إذاً:

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = 0$$

وحسب الفرض إذاً $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ إذاً الأشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$ مستقلة خطياً.

نظرية: الشرط اللازم والكافي حتى يكون التطبيق الخطي $f: V \to W$ متبايناً هو أن يكون:

$$Kerf = \{0\}$$

لزوم الشرط: $\forall\ x \in \mathrm{Kerf} \Rightarrow \mathrm{f(x)} = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{f(x)} = \mathrm{f(0)}$$

$$\text{متباين}f \quad \Rightarrow \mathrm{x} = 0$$

$$\Rightarrow x \in \{0\} \Rightarrow Kerf = \{0\}$$

كفاية الشرط: لنفرض أن

$$Kerf = \{0\}$$

$$x, y \in V \qquad f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0$$

$$\text{خطي } f \Rightarrow f(x-y) = 0$$

ومنه نجد أن:

$$x - y \in Kerf = \{0\} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

ومنه fمتباين

تمرين: ليكن $f: V \to W$ تطبيقاً خطياً ولتكن $v_1, v_2, \dots, v_n$ أشعة من V برهن على أنه إذا كانت الأشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$مستقلة خطياً وكان f متباين فإن الأشعة $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ مستقلة خطياً.

البرهان:

نضع $\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots \alpha_2 f(v_2) = 0$

ولكن fخطي ومنه نجد:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = f(0)$$

وبما أن fمتباين حسب الفرض نجد:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

وبما أنه حسب الفرض $v_1, v_2, \dots, v_n$ مستقلة خطياً إذاً:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

إذاً الأشعة:

$f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ مستقلة خطياً وهو المطلوب.

<u>نظرية:</u> ليكن V فضاء شعاعي منته البعد فوق الحقل K

إذا كان $f: V \to U$ تطبيقاً خطياً فإن:

$$\dim V = \dim Kerf + \dim Imf$$

البرهان:

الحالة الأولى: إذا كان $Kerf = \{0\}$ أي إذا كان f متباين

لنفرض أن $\{ v_1, v_2, \dots, v_3 \}$ أساس ل V ولنبرهن على أن $\{ f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ أساس ل Imf

1- ليكن $y \in Imf$ عندئذٍ يوجد على الأقل $x \in V$ بحيث أن $y = f(x)$

بما أن $x \in V$ فإنه يوجد سلميات $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ بحيث أن:

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow$$

$$f(x) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \quad f \text{ خطي}$$

$$f(x) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots \alpha_n f(v_n)$$

إذاً الأشعة $\{ f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ تولد $f(V)$

2- لنبرهن أن مجموعة الأشعة $\{ f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ مستقلة خطياً

ليكن لدينا $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$:

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots \alpha_n f(v_n) = 0 \Rightarrow f \text{ خطي}$$
$$\Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

ومنه نجد أن:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \in Kerf = \{0\} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

ولكن $v_1, v_2, \dots, v_3$ مستقلة خطياً ومنه

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

وبهذا يتحقق المطلوب.

الحالة الثانية: $\text{Kerf} \neq \{0\}$

بما أن $Kerf \subseteq V$ فإن $\dim Kerf$ منتهٍ (لأنها موجودة في فضاء بعده منتهٍ)

لنفرض أن $\{w_1, w_2, \dots w_t\}$ أساس ل Kerf ولنوسع أساس Kerf إلى أساس ل V على النحو:

$$\{w_1, w_2, \dots w_t, w_{t+1}, \dots, w_n\}$$

ولنبرهن على أن مجموعة الأشعة

$$\{f(w_{t+1}), f(w_{t+2}), \dots, f(w_n)\}$$

هي أساس ل $f(V)$

1- نضع $\lambda_{t+1} f(w_{t+1}) + \lambda_{t+2} f(w_{t+2}) + \cdots + \lambda_n f(w_n) = 0$ وبحيث أن:

$$\lambda_i \in K$$

$$f(\lambda_{t+1} w_{t+1} + \cdots + \lambda_n w_n) = 0$$

ومه :

$$\lambda_{t+1} w_{t+1} + \cdots + \lambda_n w_n \in Kerf$$

ومن ثم فإن:

$$\lambda_{t+1} w_{t+1} + \cdots + \lambda_n w_n = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n$$

ومنه:

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n - \lambda_{t+1} w_{t+1} - \cdots - \lambda_n w_n = 0$$

وبما أن مجموعة الأشعة:

$$\{w_1, w_2, \dots w_t, w_{t+1}, \dots, w_n\}$$

أساس ل V فهي مستقلة خطياً وبالتالي:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_t = \lambda_{t+1} = \lambda_n = 0$$

إذاً مجموعة الأشعة :

$$\{f(w_{t+1}), f(w_{t+2}), \dots, f(w_n)\}$$

مستقلة خطياً.

2- ليكن $y \in f(V)$ عندئذٍ يوجد على الأقل $x \in V$ بحيث أن $y = f(x)$

بما أن $x \in V$ فإنه توجد سلميات

$\delta_1, \delta_2, \dots \delta_t, \delta_{t+1}, \dots, \delta_n$ بحيث أن:

$$x = \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2 + \dots + \delta_t w_t + \cdots \delta_n w_n$$

ومنه
$$y = \delta_1 f(w_1) + \delta_2 f(w_2) + \dots + \delta_t f(w_t) + \cdots \delta_n f(w_n)$$

وبما أ $\{w_1, w_2, \dots w_t\}$ أساس ل $Kerf$ فإن:

$$f(w_1) = f(w_2) = \dots = f(w_t) = 0$$

ومنه:

$$y = \delta_{t+1} f(w_{t+1}) + \cdots \delta_n f(w_n)$$

إذاً الأشعة:

$$\{ f(w_{t+1}), f(w_{t+2}), \dots, f(w_n)\}$$

تولد $f(V)$ وبما أنها مستقلة خطياً نستنتج أن مجموعة الأشعة:

$$\{ f(w_{t+1}), f(w_{t+2}), \dots, f(w_n)\}$$

أساس ل$f(V)$.

ومنه نجد:

$$\dim V = n = t + n - t = \dim Kerf + \dim Imf$$

وهو المطلوب.

المحاضرة الثالثة **2012/2/26**

تعريف: يقال عن تطبيق خطي $f: U \to W$ أنه مؤثر خطي على U إذا كان $U = V$

- ليكن f مؤثر خطي على الفضاء الشعاعي المنتهي البعد U ولتكن:

$S = \{ e_1, e_2, \dots e_n \}$ أساس أو قاعدة له وهذا الأساس مرتب وبما أن

$f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n)$ أشعة من U فإن:

$$f(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \cdots + \alpha_{1n}e_n$$

$$f(e_2) = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{2n}e_n$$

$$\vdots$$

$$f(e_n) = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \cdots + \alpha_{nn}e_n$$

حيث أن هذه الكتابات وحيدة.

- تسمى المصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ - & - & - & - \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

بمصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للأساس S ونرمز لها بالرمز $[f]_S$

تعريف:ليكن U فضاء شعاعي منتهي البعد فوق الحقل K .

$$S_1 = \{ e_1, e_2, \dots e_n \}$$

$$S_2 = \{d_1, d_2, \dots d_n\}$$

أساسين ل U ولنفرض أن:

$$e_1 = \beta_{11}d_1 + \beta_{12}d_2 + \cdots + \beta_{1n}d_n$$

$$e_2 = \beta_{21}d_1 + \beta_{22}d_2 + \cdots + \beta_{2n}d_n$$

$$\vdots$$

$$e_n = \beta_{n1}d_1 + \beta_{n2}d_2 + \cdots + \beta_{nn}d_n$$

تسمى المصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{n2} \\ - & - & - & - \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

بمصفوفة الإنتقال من القاعدة S_2 إلى القاعدة S_1 ونرمز لذلك ب:

$$T_{S_2 \to S_1}$$

نظرية: إذا كانت T هي مصفوفة الإنتقال من الأساس S_2 إلى الأساس S_1 فإن مقلقب T والذي هو T^{-1} هي مصفوفة الإنتقال من الأساس S_1 إلى الأساس S_2 أي هي:

$$T^{-1}{}_{S_1 \to S_2}$$

(تقبل دون ذكر البرهان).

نظرية:

$$T^{-1}{}_{S_1 \to S_2} \;\; . \;\; [f]_{S_2} \; . \; T\,{}_{S_2 \to S_1} = [f]_{S_1}$$

مثال: ليكن f مؤثر خطي $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالشكل:

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 2z \,, x - 4z \,, y + 3z)$$

1- أوجد مصفوفة f بالنسبة للأساس القانوني:

$$S_1 = \{\, e_1 = (1,0,0) \,, e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

2- أوجد مصفوفة الإنتقال من الأساس السابق إلى الأساس:

$$S_2 = \{d_1 = (1,1,1), d_2 = (1,1,0), d_3 = (1,0,0)\}$$

3- أوجد مصفوفة f بالنسبة للأساس S_2 بطريقتين مختلفتين.

الحل:

1- بما أن $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ فإن $f(e_1), f(e_2), f(e_3) \in \mathbb{R}^3$

ولكن:

$$f(1,0,0) = (1,1,0)$$

$$f(0,1,0) = (3,0,1)$$

$$f(0,0,1) = (2,-4,3)$$

ومنه نجد أن:

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$(3,0,1) = 3(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$(2,-4,3) = 2(1,0,0) - 4(0,1,0) + 3(0,0,1)$$

ويكون لدينا:

$$[f]_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

-2
$$(1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$(1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$T_{S_1 \to S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

-3

الطريقة الأولى:

$$f(1,1,1) = (6,-3,4)$$

$$f(1,1,0) = (4,1,1)$$

$$f(1,0,0) = (1,1,0)$$

$$(6,-3,4) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0)$$

ومنه ينتج لدينا:

$$\alpha + \beta + \gamma = 6$$

$$\alpha + \beta = -3$$

$$\alpha = 4$$

بحل جملة المعادلات الثلاثة السابقة نجد:

$$\alpha = 4 , \beta = -7, \gamma = 9$$

وبالتالي:

$$(6,-3,4) = 4(1,1,1) - 7(1,1,0) + 9(1,0,0)$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$(4,1,1) = 1(1,1,1) + 0(1,1,0) + 3(1,0,0)$$

$$(1,1,0) = 0(1,1,1,) + 1(1,1,0) + 0(1,0,0)$$

ومنه يكون لدينا:

$$[f]_{S_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية:

حسب النظرية

$$T^{-1}{}_{S_2 \to S_1} \quad . \quad [f]_{S_1} \ . \ T\ {}_{S_1 \to S_2} = [f]_{S_2}$$

ولكن لنوجد مقلوب $T\ {}_{S_1 \to S_2}$ والذي هو $T^{-1}{}_{S_2 \to S_1}$

سوف نوجد هذا المقلوب باستخدام التحويلات الأولية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بالتطبيق على المصفوفة الأخيرة التحويل التالي :

$R_1 \leftrightarrow R_3$ نجد:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أما بالنسبة للمصفوفة الأخيرة فنطبق التحويل التالي:

$$-R_2 + R_3$$

ومن ثم التحويل:

$$-R_1 + R_2$$

فنجد المصفوفة الجديدة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$T^{-1}{}_{S_2\to S_1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$[f]_{S_2}=\left[\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&2\\1&0&-4\\0&1&3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$[f]_{S_2}=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&-1&-7\\0&3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&0\\-7&0&1\\9&3&0\end{pmatrix}$$

نظرية: ليكن U,W فضاءين شعاعيين فوق الحقل K ولتكن:

$$S=u_1,u_2,\dots,u_n$$

قاعدة ل U.

وإذا كانت $w_1,w_2,\dots .w_n$ أشعة إختيارية من W فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f:U\to W$ يحقق العلاقات التالية:

$$f(u_1)=w_1\ ,f(u_2)=w_2\ ,\dots,f(u_n)=w_n \qquad (1$$

البرهان: ليكن $x\in U$ عندئذٍ فإن x يكتب بالشكل الوحيد التالي:

$$x=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n$$

ولنعرف التطبيق $f:U\to W$ بالشكل التالي

$$f(x)=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\cdots+\alpha_nw_n$$

وبما أن المركبات α_i وحيدة بالتالي التطبيق f معرف جيداً ويمكن التحقق بسهولة أن التطبيق f يحقق مجموعة العلاقات 1) ونفرض أن التطبيق $g:U\to W$ هو تطبيق خطي أخر يحقق العلاقات 1) ومنه نجد:

$$g(x)=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\cdots+\alpha_nw_n$$

$$=\alpha_1g(u_1)+\alpha_2g(u_2)+\cdots+\alpha_ng(u_n)$$

$$=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\cdots+\alpha_nw_n=f(x)\quad ;\forall\ x\in U$$

وبالتالي $g(x)=f(x)$ والتطبيق الخطي واحد.

مثال: بين أنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ويحقق العلاقات:

$$f(3,1) = (2,-4) \quad , \quad f(1,1) = (0,2)$$

وأوجد $f(x,y)$ لعنصر كيفي $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

الحل:

- إن مجموعة الأشعة $\{(3,1),(1,1)\}$ تشكل أساس ل$\mathbb{R}^2$**(تحقق من ذلك)؟.**

وبالتالي حسب النظرية السابقة يوجد تطبيق خطي وحيد $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ يحقق العلاقات

$$f(3,1) = (2,-4) \quad , \quad f(1,1) = (0,2)$$

- لنفرض أن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

ومنه نجد أن:

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(3,1)$$

ومن الأخيرة ينتج مايلي:

$$\alpha + 3\beta = x$$

$$\alpha + \beta = y$$

وبحل المعادلتين الأخيرتين ينتج لدينا:

$$\alpha = \frac{3y-x}{2} \text{ و } \beta = \frac{x-y}{2}$$

وبالتالي:

$$(x,y) = \frac{3y-x}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(3,1) \Rightarrow$$

$$f(x,y) = f\left(\frac{3y-x}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(3,1)\right)$$
$$= \frac{3y-x}{2}f(1,1) + \frac{x-y}{2}f(3,1) \Rightarrow$$

$$\frac{3y-x}{2}(0,2) + \frac{x-y}{2}(2,-4) = (0,3y-x) + (x-y\,,-2x+2y) \Rightarrow$$

$$f(x,y) = (x-y, 5y-3x)$$

وهو المطلوب.

تمرين:ليكن V فضاء شعاعي فوق الحقل $\mathbb{R}$ حيث $\dim V = 4$

وليكن φ مؤثر خطي على V

إذا علمت أن:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة φ بالنسبة للأساس $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ فأوجد مصفوفة φ بالنسبة للأساس

$$\{\, d_1 = e_1 \,, d_2 = e_1 + e_2 \,, d_3 = e_1 + e_2 + e_3, d_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \,\}$$

الحل:من النظرية:

$$[\varphi]_D = {T^{-1}}_{D\to E} \,.\, [\varphi]_E \,.\, T_{E\to ED}$$

$$d_1 = 1.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3 + 0.e_4$$

$$d_2 = 0.e_1 + 1.e_2 + 0.e_3 + 0.e_4$$

$$d_3 = 0.e_1 + 0.e_2 + 1.e_3 + 0.e_4$$

$$d_4 = 0.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3 + 1.e_4$$

$$T_{E\to D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لنوجد مقلوب مصفوفة الإنتقال والناتج سيكون مصفوفة الإنتقال ${T^{-1}}_{D\to E}$

$$M = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

بتطبيق على المصفوفة الأخيرة التحويلات الأولية المنتهية التالية :

$$-R_2 + R_1 \,, -R_3 + R_2 \,, -R_4 + R_3$$

نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$T^{-1}{}_{D\to E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$[\varphi]_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[\varphi]_D = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & -6 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -5 \\ 6 & 7 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

تعريف:ليكن V فضاء شعاعي فوق الحقل K ولتكن:

$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ أساس لـV إذا كان $x \in V$ فإن:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

تسمى المصفوفة $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ بشعاع إحداثيات x وفق القاعدة S ونرمز لهذا ب:

$$[x]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

تعريف: ليكن $f: E \to D$ تطبيقاً خطياً ولتكن:

$$S_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

$$S_2 = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

أساسين ل E, D على الترتيب

بما أن $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m)$ أشعة من D فإن:

$$f(e_1) = \alpha_{11}d_1 + \alpha_{12}d_2 + \cdots + \alpha_{1n}d_n$$

$$f(e_2) = \alpha_{21}d_1 + \alpha_{22}d_2 + \cdots + \alpha_{2n}d_n$$

$$\vdots$$

$$f(e_1) = \alpha_{m1}d_1 + \alpha_{m2}d_2 + \cdots + \alpha_{mn}d_n$$

تسمى المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m2} \\ - & - & - & - \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

وهي المصفوفة المستطيلة ذات البعد $m \times n$ بمصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة للأساسين S_1 و S_2 ونرمز لها بالرمز:

$$[f]_{S_2}^{S_1}$$

<u>نظرية:</u> إذا كان $f: E \to D$ تطبيقاً خطياً وكانت

$S_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ أساس E

$$S_2 = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

أساس ل D.

فإن $$[f]_E^D . [x]_E = [f(x)]_D \quad ; \ \forall\, x \in E$$

مثال: ليكن $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالعلاقة التالية:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z \,, y - 2z)$$

1- أوجد مصفوفة f بالنسبة للأساسين

$$E = \{ e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,0), e_3 = (1,0,0)\}$$

$$D = \{ d_1 = (1,1), d_2 = (-1,0)\}$$

2- إذا كان $v = (1,2,-1)$ فأوجد $[f(v)]_D$ بطريقتين مختلفتين.

الحل:

- بما أن $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ فإن $f(e_1), f(e_2) \in \mathbb{R}^2$

ولكن:

$$f(1,1,1) = (2,-1)$$

$$f(1,1,0) = (3,1)$$

$$f(1,0,0) = (1,0)$$

ومنه نجد أن:

$$(2,-1) = \alpha(1,1) + \beta(-1,0) \Rightarrow$$

$$\alpha - \beta = 2 \quad , \quad \alpha = -1$$

ومنه ينتج: $\beta = -3$ وبالتالي

$$(2,-1) = -1(1,1) - 3(-1,0)$$

$$(3,1) = 1(1,1) - 2(-1,0)$$

$$(1,0) = 0(1,1) - 1(-1,0)$$

ويكون لدينا:

$$[f]_E^D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

- **الطريقة الأولى:**

$$v = (1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$$

$$f(v) = f(1,2,-1) = (6,4) \in \mathbb{R}^2$$

$$(6,4) = \alpha(1,1) + \beta(-1,0)$$

ومن الأخيرة ينتج لدينا:

$$\alpha - \beta = 6 \ , \qquad \alpha = 4$$

ومنه $\Leftarrow \beta = -2$ $\qquad (6,4) = 4(1,1) - 2(-1,0)$

وبالتالي يكون لدينا:

$$[f(v)]_D = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية:

حسب النظرية فإن $\quad [f]_E^D \cdot [x]_E = \ [f(x)]_D$

$$x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = v = (1,2,-1)$$

$$(1,2,-1) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0)$$

ومنه نحصل على ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل وهي:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\alpha + \beta = 2$$

$$\alpha = -1$$

ويكون الحل لها هو:

$$\alpha = -1 \, , \beta = 3 \, , \gamma = -1 \quad \Rightarrow$$

$$(1,2,-1) = -1(1,1,1) + 3(1,1,0) - 1(1,0,0)$$

وبالتالي نحصل على:

$$[x]_E = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

وهو المطلوب.

نظرية: ليكن $f: E \to D$ تطبيقاً خطياً ولتكن $\{e'_i\}$ و $\{e_i\}$ قاعدتين مختلفتين ل E.

و $\{d'_i\}$ و $\{d_i\}$ قاعدتين مختلفتين أيضاً ولكن بالنسبة لD عندئذٍ فإن:

$$[f]_{e'}^{d'} = \theta^{-1}{}_{d' \to d} \cdot [f]_e^d \cdot p_{e \to e'}$$

بحيث أن θ هي مصفوفة الإنتقال من $\{d_i\}$ إلى$\{d'_i\}$

و p هي مصفوفة الإنتقال من$\{e_i\}$ إلى $\{e'_i\}$.

القيم الذاتية والأشعة الذاتية

القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمصفوفة مربعة:

لتكن $A \in M_{n\times n}(K)$ حيث K هي إما $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$.

نسمي العدد $\lambda \in K$ قيمة ذاتية(خاصة) للمصفوفة A إذا وجد شعاع $0 \neq X \in M_{n\times 1}(K)$

بحيث أن:

$$A.X = \lambda.X$$

ويسمى عندئذٍ X بالشعاع الذاتي للمصفوفة A والموافق للقيمة λ .

- تسمى مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة A بطيف A.

ملاحظات:

1- إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن مجموعة الأشعة الذاتية للمصفوفة A والموافقة للقيمة الذاتية λ بالإضافة للشعاع الصفري تشكل فضاء جزئي من الفضاء $M_{n\times 1}(K)$ يدعى هذا الفضاء بالفضاء الذاتي للمصفوفة A والموافق للقيمة λ ونرمز له بE_λ.

أي:

$$E_\lambda = \{\, X \in M_{n\times 1}(K)\, ; A.X = \lambda.X \,\}$$

2- إذا كانت λ_1, λ_2 قيمتين مختلفتين للمصفوفة A فإن:

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$$

والتي تعني أن الشعاع الذاتي لمصفوفة لايكون موافقاً لقيمتين ذاتيتين مختلفتين.

البرهان:

$$\forall X \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} \Rightarrow$$

$$X \in E_{\lambda_1} \quad \wedge \quad X \in E_{\lambda_2} \quad \Rightarrow$$

$$A.X = \lambda_1.X \quad \wedge \quad A.X = \lambda_2.X$$

$$\Rightarrow \lambda_1.X = \lambda_2.X \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_2).X = 0$$

ولكن $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Rightarrow X = 0 \Rightarrow X \in \{0\}$$

تعريف: ليكن t متحول وليكن $[a_{i\,j}] = A \in M_{n\times n}(K)$ نسمي:

$$|tI - A| = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{vmatrix}$$

بكثير الحدود المميز للمصفوفة A .

- **لنستنتج أن** : أن كل قيمة ذاتية للمصفوفة A تكون جذر لكثير الحدود المميز للمصفوفة A وبالعكس كل جذر لكثير الحدود المميز للمصفوفة Aهو قيمة ذاتية للمصفوفة .

الإستنتاج: لنفرض الأن أن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A وأن:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

شعاع ذاتي للمصفوفة A والموافق للقيمة λ أي:

$$X \in E_\lambda$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots + & a_{nn}x_n \end{bmatrix}_{n\times n} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد أن:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n$$

ومن الأخيرة ينتج لدينا:

$$(\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 - (\lambda - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - (\lambda - a_{nn})x_n = 0$$

وبما أن $X \neq 0$ لأنه شعاع ذاتي فإنه حسب النظرية القائلة:

الشرط اللازم والكافي حتى يكون ل n معادلة متجانسة بn مجهول عدد لانهائي من الحلول هو أن يكون محدد الأمثال مساوياً للصفر**(جبر خطي (1)).**

أي

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال(1): أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية وقاعدة للفضاء الذاتي للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

الحل: بما أن القيم الذاتية هي جذور لكثير الحدود المميز للمصفوفة A وبما أن كثير الحدود المميز للمصفوفة A يعطى ب:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 6 & 6 \\ 1 & \lambda - 4 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0$$

لنوجد قيمة هذا المحدد:

بجمع العمودين الثاني والثالث إلى الأول نحصل على:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 7 & 6 & 6 \\ \lambda - 5 & \lambda - 4 & -2 \\ \lambda + 7 & 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0$$

نضرب السطر الأول من المحدد الأخير ب(-1) وإضافة الناتج إلى السطر الثالث نجد:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 7 & 6 & 6 \\ \lambda - 5 & \lambda - 4 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر المحدد الأخير حسب السطر الثالث نجد:

$$(\lambda - 2).[(\lambda + 7).(\lambda - 4) - 6(\lambda - 5)] = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0$$

ومنه نستنتج أن مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة والتي تدعى بطيف A هي:

$$\{ 1,2\}$$

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = 1.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5x_1 - 6x_2 - 6x_3 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$5x_1 - 6x_2 - 6x_3 = x_1 \quad 1)$$

$$-x_1 + 4x_2 + 2x_3 = x_2 \quad 2)$$

$$3x_1 - 6x_2 - 4x_3 = x_3 \quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$4x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \quad 1)$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \quad 2)$$

$$3x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 0 \quad 3)$$

بحل جملة المعادلات السابقة والتي لها عدد لانهائي من الحلو.

بضرب المعادلة (2 ب (4) وإضافة الناتج إلى (1 ومن ثم بضرب المعادلة (2 ب (3) وإضافة الناتج إلى (3 نجد الجملة الجديدة:

$$6x_2 + 2x_3 = 0 \quad 1')$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \quad 2')$$

$$3x_2 + x_3 = 0 \quad 3')$$

نلاحظ أن ($1'$ و($3'$ متكافئتين وبالتالي الجملة الجديدة هي:

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \quad 2')$$

$$3x_2 + x_3 = 0 \quad 3')$$

من ($3'$ نجد أن $x_3 = -3x_2$ بالتعويض في ($2'$ نجد:

$$-x_1 = -3x_2 + 6x_2 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = -3x_2$$

ومنه :

$$X = \begin{bmatrix} -3x_2 \\ x_2 \\ -3x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=1}=\left\{x_2\begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}\quad;\quad x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

ونستنتج أن $\begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}$ أساس ل$E_{\lambda=1}$ وبعده مساوياً ل 1

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda=2$

لنفرض أن

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda=2$ يجب أن يتحقق:

$$A.X=1.X\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=2.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}5x_1-6x_2-6x_3\\-x_1+4x_2+2x_3\\3x_1-6x_2-4x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\\2x_3\end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$5x_1-6x_2-6x_3=2x_1\quad 1)$$

$$-x_1+4x_2+2x_3=2x_2\quad 2)$$

$$3x_1-6x_2-4x_3=2x_3\quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$3x_1-6x_2-6x_3=0\quad 1)$$

$$-x_1+2x_2+2x_3=0\quad 2)$$

$$3x_1-6x_2-6x_3=0\quad 3)$$

بحل جملة المعادلات السابقة والتي لها عدد لانهائي من الحلول.

بضرب المعادلة (2 ب (3) وإضافة الناتج إلى (1 و (3 نجد الجملة الجديدة:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad 1')$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad 2')$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad 3')$$

نلاحظ أن ($1'$ و($3'$ متكافئتين وبالتالي الجملة الجديدة هي:

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad 2')$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad 3')$$

من ($2'$ نجد أن

$$x_1 = 2x_2 + 2x_3$$

ومنه :

$X = \begin{bmatrix} 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; ; \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \quad ; x_2 \neq 0 \wedge x_1 \neq 0$ والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=1} = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

ونستنتج أن مجموعة الأشعة:

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ أساس ل$E_{\lambda=2}$ وبعده مساوياً ل 2 أي $\dim E_2 = 2$

مثال(2): أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ بحيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل: بما أن القيم الذاتية هي جذور لكثير الحدود المميز للمصفوفة A وبما أن كثير الحدود المميز للمصفوفة A يعطى ب:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

لنوجد قيمة هذا المحدد:

وبنشر المحدد الأخير نجد:

$$(\lambda - 1).(\lambda + 1) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

وبما أن $\lambda \in \mathbb{R}$ حسب الفرض وبالتالي لايوجد قيم ذاتية للمصفوفة A أي أن طيف A مساوياً للخالية.

مثال(3): أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A \in M_{2\times2}(\mathbb{C})$ بحيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1).(\lambda + 1) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

ومنه نجد ان:

$$\lambda = +\mathrm{i} \quad , \quad \lambda = -\mathrm{i}$$

إذاً طيف A هو $\{i, -i\}$.

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = \mathrm{i}$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = \mathrm{i}$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = i.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathrm{i}. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i.x_1 \\ i.x_2 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$x_1 - 2x_2 = i.x_1 \quad 1)$$

$$x_1 - x_2 = \mathrm{i}.x_2 \quad 2)$$

ومنه نحصل على:

$$(i-1)x_1 + 2x_2 = 0 \quad 1)$$

$$-x_1 + (i+1)x_2 = 0 \quad 2)$$

نلاحظ أن (1و(2 متكافئتين لأن(1 تنتج من (2 وذلك بعد ضربها ب$(-i+1)$ ويكافئان معادلة واحدة وهي:

$$(i-1)x_1 + 2x_2 = 0$$

ومنه نجد أن:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{1}{2}(i-1)x_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=1} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2}(i-1) \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ونستنتج أن $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2}(i-1) \end{bmatrix}$ أساس ل$E_{\lambda=i}$ وبعده مساوياً ل 1

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = -\mathrm{i}$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = -\mathrm{i}$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = -i.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i.x_1 \\ -i.x_2 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$x_1 - 2x_2 = -i.x_1 \quad 1)$$

$$x_1 - x_2 = -\mathrm{i}.x_2 \quad 2) \quad \Rightarrow$$

$$(i+1)x_1 - 2x_2 = 0 \quad 1)$$

$$x_1 + (i-1)x_2 = 0 \quad 2)$$

نلاحظ أن (1و(2 متكافئتين لأن(1 تنتج من (2 وذلك بعد ضربها ب$(i+1)$ ويكافئان معادلة واحدة وهي:

$$(i+1)x_1 - 2x_2 = 0$$

ومنه نجد أن:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}(i+1)x_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=1} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(i+1) \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ونستنتج أن $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(i+1) \end{bmatrix}$ أساس ل$E_{\lambda=-i}$ وبعده مساوياً ل 1

ملاحظة:إن مجموع القيم الذاتية يسمى **(بأثر المصفوفة A)** أي مساوياً لمجموع عناصر القطر الرئيسي ونرمز له بالرمز trA

<u>نظرية(1):</u> إذا كانت A مصفوفة تناظرية وإذا كان X,Y شعاعين ذاتيين للمصفوفة A موافقين لقيمتين ذاتيتين مختلفتين λ,θ على الترتيب فإن $X'.Y=0$

البرهان:لنحسب الجداء التالي:

$$X'AY$$

بما أن A تناظرية من الفرض نجد أن:

$$X'AY = X'A'Y = (AX)'Y = (\lambda X)'Y = \lambda(X'Y) \quad -1)$$

$$X'AY = X'(\theta Y) = \theta(X'Y) - 2)$$

ومنه نجد:

$$\lambda(X'Y) = \theta(X'Y) \Rightarrow (\lambda-\theta)(X'Y) = 0$$

ولكن $\lambda \neq \theta$ إذاً:

$$X'Y = 0$$

وهو المطلوب.

<u>نتيجة:</u> إن جداء شعاعين ذاتيين موافقين لقيمتين ذاتيتين مختلفتين لمصفوفة متناظرة يكون معدوماً(أي يكون X,Y متعامدين) .

<u>نظرية(2):</u> القيم الذاتية لمصفوفة حقيقية تناظرية هي أعداد حقيقية.

البرهان:

لنفرض أن A مصفوفة حقيقية تناظرية وأن λ هي عبارة عن قيمة ذاتية للمصفوفة A و X شعاعاً ذاتياً للمصفوفة A موافقاً للقيمة الذاتية λ لنحسب الجداء:

$$X'A\overline{X}$$

بما أن A تناظرية إذاً:

$$X'A\overline{X} = X'A'\overline{X} = (AX)'\overline{X} = (\lambda X)'\overline{X} = \lambda X'\overline{X} \quad -1)$$

وبما أن A مصفوفة حقيقية نجد:

$$X'A\overline{X} = X'\overline{A}\ \overline{X} = X'\ \overline{A\,X} = X'\ \overline{\lambda\,X} = \overline{\lambda}(X'\overline{X}) \quad -2)$$

من 1)و2)نجد:

$$\overline{\lambda}X'\overline{X} = \lambda\left(X'\overline{X}\right) \Rightarrow \left(\overline{\lambda} - \lambda\right)X'\overline{X} = 0 \Rightarrow \overline{\lambda} - \lambda = 0 \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda$$

وبالتالي نستنتج أن λ عدد حقيقي وبالتالي تتحقق النظرية السابقة.

ملاحظات هامة متعلقة بالنظرية السابقة:

1- مرافق مصفوفة:هو مرافق جميع عناصرها
2- جداء عدد بمرافقه يساوي إلى مربع طويلته
3- $\overline{\left(AX\right)} = \overline{A}.\overline{X}$

المحاضرة السابعة **2012/3/11**

<u>**نظرية:**</u> القيم الذاتية لمصفوفة حقيقية شبه تناظرية هي أعداد عقدية من الشكل:

$$\lambda = \mathrm{b.i} \quad ; \quad \mathrm{b} \in \mathbb{R}$$

البرهان: لنوجد مايلي:

$$X'A\overline{X}$$

بما أن A شبه تناظرية إذاً:

$$X'A\overline{X} = X'(-A')\overline{X} = -(AX)'\overline{X} = -(\lambda X)'\overline{X} = -\lambda X'\overline{X} \quad -1)$$

وبما أن A مصفوفة حقيقية نجد:

$$X'A\overline{X} = X'\overline{A}\ \ \overline{X} = X'\ \ \overline{A\,X} = X'\ \ \overline{\lambda\,X} = \overline{\lambda}\left(X'\overline{X}\right) \ -2)$$

من 1)و2)نجد:

$$\overline{\lambda}X'\overline{X} = -\lambda\left(X'\overline{X}\right) \Rightarrow \left(\overline{\lambda} + \lambda\right)X'\overline{X} = 0 \Rightarrow \overline{\lambda} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\overline{\lambda}$$

وبالتالي نستنتج أن λ عدد عقدي .

لأنه ليمكن أن يكون $X'\overline{X} = 0$ لأنه عبارة عن مجموع مقادير موجبة كل منها لاتساوي الصفر.

ملاحظة:إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن:

$$|\lambda I - A| = \lambda^n - trA\,\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n detA$$

تعريف: نقول أن المصفوفة A تشابه المصفوفة B إذا وجد مصفوفة غير شاذة X بحيث أن:

$$A = X^{-1}.B.X \qquad\qquad A,B,X \in M_{n\times n}(\,)$$

ملاحظة: إذا كانت $A = X^{-1}.B.X$ فإن:

$$B = (X^{-1})^{-1}.A.X^{-1}$$

وبالتالي إذا كانت A تشابه B فإن B تشابه A.

وبالتالي علاقة يشابه تناظرية.

وأكثر من ذلك إذا كانت

$$A = X^{-1}.B.X$$

وكانت:

$$B = Y^{-1}.C.Y$$

أي إذا كانت A تشابه B وكانت B تشابه C فإن:

$$A = X^{-1}.(Y^{-1}.C.Y).X$$

$$= X^{-1}Y^{-1}.C.YX$$

$$= (YX)^{-1}.C.(YX)$$

ومنه نستنتج أن A تشابه C.

وبالتالي فإن علاقة يشابه علاقة متعدية على مجموعة المصفوفات المربعة وأخيراً فإن كل مصفوفة تشلبه نفسها لأن:

$$A = I^{-1}.A.I$$

وبالتالي علاقة تشابه هي علاقة إنعكاسية وبالتالي هي علقة تكافؤ.

ونستنتج مما سبق أن مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n تتجزء إلى صفوف تكافؤ

نظرية: للمصفوفات المتشابهة نفس كثير الحدود المميز.

البرهان: لنفرض أن A تشابه B عندئذٍ توجد مصفوفة غير شاذة X بحيث أن:

$$A = X^{-1}.B.X$$

وبالتالي لنبرهن المساواة التالية:

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$$

$$l_1 = |\lambda I - A| = |\lambda X^{-1}.X - X^{-1}.B.X| = |X^{-1}(\lambda.I - B)X|$$
$$= |X^{-1}|.|\lambda I - B|.|X| = |X^{-1}.X|.|\lambda I - B| = |I|.|\lambda I - B|$$
$$= 1.|\lambda I - B| = |\lambda I - B| = l_2$$

وهو المطلوب.

نتيجة: للمصفوفات المتشابهة نفس القيم الذاتية ونفس أثر المصفوفة ونفس قيمة المحدد.

ملاحظة: إن العكس ليس صحيح في الحالة العامة فعلى سبيل المثال للمصفوفتين:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نفس كثير الحدود المميزإلا أنهما غير متشابهتين وذلك لأنه:

$\forall X \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ غير الشاذة ونلاحظ أن شرط التعدي غير محقق لأن:

$$X^{-1}.I.X = I \neq B$$

نظرية كيلي هاملتون:

كل مصفوفة مربعة هي جذر لكثير حدودها المميز.

البرهان: بفرض أن A مصفوفة مربعة من المرتبة n وأن B هي المصفوفة المساعدة للمصفوفة $\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}$ عندئذٍ فإن:

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}).B = |\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}|I$$

- بما أن عناصر B هي كثيرات حدود بλ درجة كل منها أصغر أو تساوي $(n-1)$ فإنه يمكن التعبير عن B بالشكل:

$$B = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}$$

حيث B_i مصفوفات مربعة من المرتبة n وبحيث:

$$\forall i = 1,2, \dots n-1$$

وبالتالي فإن:

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}).(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = |\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}|I$$
$$= (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \lambda^n).I$$

ومن الأخيرة نستنتج أن:

$$-AB_0 = \alpha_0 I$$

$$-AB_1 + B_0 = \alpha_1 I$$

$$\vdots$$

$$-AB_{n-1} + B_{n-2} = \alpha_{n-1}$$

$$B_{n-1} = I$$

بضرب المعادلات السابقة من اليسار ب:

$$A^n, \ldots\ldots, A^2, A, A^0$$

على الترتيب وجمعها نجد:

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + A^n = 0$$

إيجاد مقلوب مصفوفة غير شاذة باستخدام نظرية كيلي هاملتون

- باستخدام نظرية كيلي هاملتون أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

إن كثير الحدود المميز للمصفوفة A هو:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

بنشر المحدد الأخير حسب السطر الأول نجد:

$$(\lambda - 1)[(\lambda - 1).(\lambda - 1) - 4] = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$$

وحسب نظرية كيلي هاملتون نجد أن:

$$A^3 - 3A^2 - A + 3I = 0$$

$$\Rightarrow 3\mathrm{I} = -A^3 + 3A^2 + A$$

$$\Rightarrow 3A^{-1} = -A^2 + 3A + I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(-A^2 + 3A + I) \ldots .*$$

ولكن نعلم أن:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وأن:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

وبالعودة إلى * نجد:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 2 & \frac{-2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

وللتأكد نحسب:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمؤثر خطي

تعريف: ليكن $f: V \to V$ مؤثراً خطياً يسمى العدد $\lambda \in K$ حيث K هو الحقل المعرف على V هي قيمة ذاتية للمؤثر f إذا وجد شعاع $V \ni x \neq 0$ بحيث أن:

$$\forall x \in V \;\; ; \;\; f(x) = \lambda x$$

يسمى كل شعاع x يحقق العلاقة السابقة شعاعاً ذاتياً لf رموافقاً للقيمة الذاتية λ بحيث $\lambda \in K$.

- إن مجموعة الاشعة الذاتية للمؤثر الخطي f والموافقة للقيمة الذاتية λ بما فيها الشعاع الصفري تشكل فضاءاً شعاعياً من V يسمى بالفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية λ ونرمز له بE_λ أي:

$$E_\lambda = \{\, x \in V \;\; ; \;\; f(x) = \lambda x \,\}$$

مثال:أوجد القيم الذاتية والأشعة للمؤثر الخطي:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

والمعرف بالشكل التالي:

$$f(x,y) = (x+2y, 3x+2y)$$

الحل: حسب التعريف يسمى العدد $\lambda \in \mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ هو الحقل المعرف على $\mathbb{R}^2$ هي قيمة ذاتية للمؤثر f إذا وجد شعاع $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$ بحيث أن:

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{V} \;\; ; \;\; \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, y_1) = \lambda(\mathrm{x}_1, y_1)$$

$$\Rightarrow (x_1 + 2y_1, 3x_1 + 2y_1) = (\lambda \mathrm{x}_1, \lambda y_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + 2y_1 = \lambda \mathrm{x}_1$$

$$3x_1 + 2y_1 = \lambda y_1$$

ومنه نجد ان:

$$1) \quad (\lambda - 1)\mathrm{x}_1 - 2y_1 = 0$$

$$2) \quad -3x_1 + (\lambda - 2)y_1 = 0$$

ونلاحظ أن (1 و 2) معادلتين بمجهولين ومتجانستين وحسب النظرية

الشرط اللازم والكافي حتى يكون ل n معادلة متجانسة بn مجهول عدد لانهائي من الحلول هو أن يكون محدد الأمثال مساوياً للصفر

وبالتالي ينتج لدينا:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

ومنه نستنتج أن:

$$\lambda = -1 \,, \lambda = 4$$

قيمتين ذاتيتين للمؤثر الخطي f

إيجاد الأشعة الذاتية للمؤثر f الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = -1$

لنفرض أن

$$x = (x_1, y_1)$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل f وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = -1$ يجب أن يتحقق:

$$A.x = -1.x \Rightarrow$$

$$1) \quad -2x_1 - 2y_1 = 0$$

$$2) \quad -3x_1 - 3y_1 = 0$$

نلاحظ أن (1و(2 متكافئتين لأن(1 تنتج من (2 وذلك بعد ضربها ب $\frac{2}{3}$ ويكافئان معادلة واحدة وهي:

$$x_1 + y_1 = 0$$

ومنه نجد أن:

$$x_1 = -y_1$$

$$x = \{ \ (x_1, -x_1) \quad ; \ \ x_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=-1} = \{ \, x_1(1, -1) \quad ; \ \ x_1 \in \mathbb{R}\}$$

ونستنتج أن $(1, -1)$ أساس ل$E_{\lambda=-1}$ وبعده مساوياً ل 1

- إيجاد الأشعة الذاتية للمؤثر f الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 4$

لنفرض أن

$$x = (x_1, y_1)$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل f وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 4$ يجب أن يتحقق:

$$A.x = 4.x \Rightarrow$$

$$1) \quad 3x_1 - 2y_1 = 0$$

$$2) \quad -3x_1 + 2y_1 = 0$$

نلاحظ أن (1و(2 متكافئتين لأن(1 تنتج من (2 وذلك بعد ضربها ب (-1) ويكافئان معادلة واحدة وهي:

$$3x_1 - 2y_1 = 0$$

ومنه نجد أن:

$$3x_1 = 2y_1$$

$$x = \{ \ (x_1, \frac{3}{2} x_1) \ \ ; \ \ x_1 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=4} = \left\{ x_1 (1, \frac{3}{2}) \ \ ; \ \ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

ونستنتج أن $(1, \frac{3}{2})$ أساس ل$E_{\lambda=4}$ وبعده مساوياً ل 1

المحاضرة الثامنة **2012/3/14**

تعريف:ليكن V فضاء شعاعي منتهي البعد فوق الحقل K وليكن:

$$f: V \to V$$

مؤثراً خطياً يسمى كثير الحدود $|\lambda I - A|$ بكثير الحدود المميز للمؤثر الخطي f

(حيث A مصفوفة f بالنسبة لقاعدة ما S)

- إذا كانت S' قاعدة أخرى ل V وكانت B هي مصفوفة f بالنسبة للقاعدة S'

عندئذٍ وحسب نظرية سابقة نجد:

$$B = [f]_{S'} = T^{-1}{}_{S' \to S} \cdot [f]_S = A \ \ .T_{S \to S'}$$

حيث T هي مصفوفة الإنتقال من S إلى S'

أي أن مصفوفة f بالنسبة للقاعدة S تشابه مصفوفة f بالنسبة للقاعدة S'(وحسب نظرية)وبما أن للمصفوفان المتشابهة نفس كثير الحدود المميز فإن كثير الحدود المميز لمؤثر خطي لايتعلق باختيار (قاعدة الفضاء الشعاعي).

على شكل نظرية: برهن أن كل قيمة ذاتية هي جذر لكثير حدودها المميز أي برهن أن كل قيمة ذاتية لمؤثر خطي f هي جذر لكثير حدودها المميز $|\lambda I - A|$ بحيث أن A هي مصفوفة بالنسبة لقاعدة ما للفضاء V.

البرهان:لنفرض أولاً أن λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي f ولنفرض أن A هي مصفوفة f بالنسبة للقاعدة S التالية:

$$S = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2}\\ - & - & - & -\\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

وبما أنه فرضنا أن λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي f إذاً يوجد $x\in V$ وبحيث:

$$(1)\ldots..f(x)=\lambda.x$$

وبما أن $x\in V \Leftarrow$

$$x=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n \quad \Rightarrow f\text{خطي} \Rightarrow$$

$$f(\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n)=\lambda(\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n)$$

$$f\text{خطي} \Rightarrow \beta_1f(e_1)+\beta_2f(e_2)+\cdots+\beta_nf(e_n)$$
$$=\lambda\beta_1e_1+\lambda\beta_2e_2+\cdots+\lambda\beta_ne_n$$

ولكن:

$$f(e_1)=\alpha_{11}e_1+\alpha_{12}e_2+\cdots+\alpha_{1n}e_n$$

$$f(e_2)=\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\cdots+\alpha_{2n}e_n$$

$$\vdots$$

$$f(e_1)=\alpha_{n1}e_1+\alpha_{n2}e_2+\cdots+\alpha_{nn}e_n$$

وبالتعويض نجد:

$$\beta_1(\alpha_{11}e_1+\alpha_{12}e_2+\cdots+\alpha_{1n}e_n)+\cdots\beta_n(\alpha_{n1}e_1+\alpha_{n2}e_2+\cdots+\alpha_{nn}e_n)$$
$$=\lambda\beta_1e_1+\lambda\beta_2e_2+\cdots+\lambda\beta_ne_n$$

وبما أن

$$\{\,e_1,e_2,\ldots,e_n\,\}$$

قاعدة إذاً فإن $\forall x\in V$ فهو يكتب بشكل وحيد.

$$\Rightarrow \quad (\lambda-\alpha_{11})\beta_1-\alpha_{12}\beta_2-\cdots-\alpha_{1n}\beta_n=0$$

$$2)\ldots\ldots\ldots\ldots.. \qquad \alpha_{21}\beta_1-(\lambda-\alpha_{22})\beta_2-\cdots-\alpha_{2n}\beta_n=0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n1}\beta_1-\alpha_{n2}\beta_2-\cdots-(\lambda-\alpha_{nn})\beta_n=0$$

وبالتالي للجملة حل بالإضافة إلى الحل الصفري وذلك لأن x شعاع ذاتي.

$$\begin{vmatrix} \lambda-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \lambda-\alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \lambda-\alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

ومنه ينتج:

$$(3) \ldots . |\lambda I - A| = 0$$

وبالتالي فإن كل قيمة ذاتية للمؤثر الخطي f هي جذر لكثير حدوده المميز.

وبالعكس: إذا كانت λ جذراً لكثير الحدود المميز فإن للمعادلة (3) والجملة (2) حلاً:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

يختلف عن الحل الصفري وبالتالي مقابل العدد λ يوجد شعاع:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

يكون شعاع ذاتي للتطبيق f والموافق للقيمة λ للمؤثر.

مثال:أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمؤثر الخطي f معرف على $\mathbb{R}^3$ بالشكل التالي:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$$

وذلك بطريقتين مختلفتين.

الحل:

الطريقة الأولى: حسب التعريف يسمى العدد $\lambda \in \mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ هو الحقل المعرف على $\mathbb{R}^3$ هي قيمة ذاتية للمؤثر f إذا وجد شعاع $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$ بحيث أن:

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{V} \;\; ; \;\; \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, y_1, z_1) = \lambda(\mathrm{x}_1, y_1, z_1)$$

$$\Rightarrow (2x_1 + y_1, y_1 - z_1, 2y_1 + 4z_1) = (\lambda \mathrm{x}_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 + y_1 = \lambda \mathrm{x}_1$$

$$y_1 - z_1 = \lambda y_1$$

$$2y_1 + 4z_1 = \lambda z_1$$

ومنه نجد ان:

$$1)\quad (\lambda - 2)x_1 - y_1 = 0$$

$$2)\quad (\lambda - 1)y_1 + z_1 \qquad = 0 \; \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$3)\quad -2y_1 + (\lambda - 4)z_1 = 0$$

ونلاحظ أن (1 و (2 و(3 ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل ومتجانسة وحتى تقبل حلول غير الحلول الصفرية يجب أن يتحقق:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

ومن المحدد الأخير نجد:

$$(\lambda - 2)[(\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2] = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$$

ومنه نجد أن:

$$\lambda \in \{ 2,3\}$$

وهي مجموعة القيم الذاتية للمؤثر f.

لنوجد مجموعة الأشعة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ للمؤثر f

نعوض في الجملة (2) كل $\lambda = 2$ فنجد:

$$1)\quad 0x_1 - y_1 = 0$$

$$2)\quad y_1 + z_1 = 0$$

$$3)\quad -2y_1 - 2z_1 = 0$$

$$0x_1 - y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

بالتعويض في (3) نجد:

$$z_1 = 0$$

$$\{ \ (x_1, 0,0) \ \ ; \ \ x_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=2} = \{ \ x_1(1,0,0) \quad ; \ \ x_1 \in \mathbb{R}\}$$

ونستنتج أن $(1,0,0)$ أساس ل$E_{\lambda=2}$ وبعده مساوياً ل 1

- لنوجد مجموعة الأشعة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 3$ للمؤثر f

نعوض في الجملة (2) كل $\lambda = 3$ فنجد:

$$1) \quad x_1 - y_1 = 0$$

$$2) \quad 2y_1 + z_1 = 0$$

$$3) \ -2y_1 - z_1 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$x_1 = y_1$$

ونجد أيضاً أن: $\quad z_1 = -2y_1$

$$\{ \ (y_1, y_1, -2y_1) \ \ ; \ \ y_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=3} = \{ \ y_1(1,1,-2) \quad ; \ \ y_1 \in \mathbb{R}\}$$

ونستنتج أن $(1,1,-2)$ أساس ل$E_{\lambda=3}$ وبعده مساوياً ل 1

الطريقة الثانية: سوف نستخدم مصفوفة بالنسبة للقاعدة القانونية ل$\mathbb{R}^3$

نعلم أن القاعدة القانونية ل$\mathbb{R}^3$ هي:

$$E = \{ \ e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

لنوجد مصفوفة f بالنسبة للقاعدة السابقة:

$$f(1,0,0) = (2,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$f(0,1,0) = (1,1,2) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$$

$$f(0,0,1) = (0,-1,4) = 0(1,0,0) - 1(0,1,0) + 4(0,0,1)$$

ومنه يكون لدينا:

$$A = [f]_E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

وكثير الحدود المميز للمصفوفة الأخيرة هو:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

وبالمتابعة نحصل على نفس النتائج في الطريقة الأولى.

المحاضرة التاسعة **2012/3/18**

نظرية: ليكن V فضاء شعاعي فوق الحقل K.

وليكن $f: V \to V$ مؤثراً خطياً إن الأشعة الذاتية للمؤثر الخطي f والموافقة لقيم ذاتية مختلفة تكون مستقلة خطياً.

البرهان:

سنبرهن النظرية بتطبيق مبدأ الإستقراء الرياضي على عدد الأشعة.

أولاً واضح أن كل شعاع ذاتي يكون مستقل خطياً(باعتباره مغاير للصفر).

- لنفرض أن النظرية صحيحة لكل جملة أشعة ذاتية موافقة لقيم ذاتية مختلفة مثنى مثنى عددها أقل تماماً من n.
- لنفرض أن $x_1, x_2, \dots, x_n$ أشعة ذاتية لـf موافقة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ المختلفة مثنى مثنى على الترتيب ولنبرهن على أن $x_1, x_2, \dots, x_n$ مستقلة خطياً نضع:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \quad \dots (1)$$

بتطبيق f على طرفي (1) نجد:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = 0 \Rightarrow \text{خطي } f \Rightarrow$$

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n) = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{f}(x_i) = \lambda_i x_i \Rightarrow$$

$$\alpha_1(\lambda_1 x_1) + \alpha_2(\lambda_2 x_2) + \cdots + \alpha_n(\lambda_n x_n) = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha_1\lambda_1)x_1 + (\alpha_2\lambda_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n\lambda_n)x_n = 0 \dots (2$$

بضرب طرفي العلاقة (1) ب λ_n وطرحها من (2) نجد:

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_n)x_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_n)x_2+\cdots\alpha_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_{n-1}=0$$

وبحسب فرضية الإستقراء الرياضي نجد أن:

$$\alpha_i(\lambda_i-\lambda_n)=0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,n-1$$

وبما أن $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1}$ مختلفة مثنى مثنى فإن:

$$\alpha_i=0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,n-1$$

وبالتعويض في (1) نجد أن:

$$\alpha_n x_n=0$$

وبما أن x_n شعاع ذاتي فإن $x_n\neq 0$ وبالتالي $\alpha_n=0$

وبهذا نجد أن:

$$\alpha_i=0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

وهو المطلوب.

ملاحظة: الشرط اللازم والكافي حتى تكون المصفوفة المربعة من المرتبة n غير الشاذة هو أن تكون الأشعة الممثلة بأعمدتها مستقلة خطياً

تقطير المصفوفات

تعريف:لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n يقال عن المصفوفة A أنها قابلة للتقطير إذا وجدت مصفوفة(إذا شابهت)مصفوفة قطرية:

أي إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P بحيث أن:

$P^{-1}.A.P$ قطرية.

__**نظرية:**__ الشرط اللازم والكافي حتى تكون المصفوفة المربعة A من المرتبة n قابلة للتقطير هو أن يكون ل A n شعاع ذاتي مستقل خطياً(وفي هذه الحالة تكون العناصر القطرية للمصفوفة $P^{-1}.A.P$ هي القيم الذاتية لـA وتكون P هي المصفوفة التي أعمدتها الأشعة الذاتية المقابلة)

البرهان:

لزوم الشرط:بما أن A قابلة للتقطير فإنه توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث أن:

$$P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A.P = P.\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

لنفرض أن: $P = [\, X_1, X_2, \dots, X_n \,] \quad \Rightarrow$

$$A.[\, X_1, X_2, \dots, X_n \,] = [\, X_1, X_2, \dots, X_n \,].\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[\, AX_1, AX_2, \dots, AX_n \,] = [\, \lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \dots, \lambda_n X_n \,]$$

ومنه نجد بالمطابقة:

$$A.X_i = \lambda_i.X_i$$

- وبما أن P غير شاذة فإن الأشعة X_i غير صفرية وبالتالي فهي أشعة ذاتية ل A(وينتج أيضاً من كون P غير شاذة أن الأشعة X_i مستقلة خطياً.

كفاية الشرط: لنفرض أن ل A n شعاعاً ذاتياً مستقلة خطياً:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

ومنه:

$$A.X_i = \lambda_i.X_i$$

وبالتالي فإن المصفوفة:

$$P = [\, X_1, X_2, \dots, X_n \,]$$

مصفوفة غير شاذة.

$$\begin{aligned} A.P = A.[\, X_1, X_2, \dots, X_n \,] &= [\, AX_1, AX_2, \dots, AX_n \,] \\ &= [\, \lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \dots, \lambda_n X_n \,] \\ &= [\, X_1, X_2, \dots, X_n \,].\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

وهو المطلوب.

مثال: قطر إن أمكن المصفوفة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل: لنوجد القيم الذاتية ل A

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 & 2 \\ -3 & \lambda + 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = 0$$

بنشر المحدد الأخير حسب السطر الأخير نجد:

$$(\lambda - 6)[(\lambda + 1)^2 - 9] = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 6)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0 \Rightarrow (\lambda - 6)(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0$$

وبالتالي نستنتج أن طيف A هو:

$$\{ 6, -4, 2\}$$

لنوجد شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية $\lambda = 2$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = 2.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2x_1 \quad 1)$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 2x_2 \quad 2)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 6x_3 = 2x_3 \quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad 1)$$

$$3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad 2)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 0 \quad 3)$$

من (3) نجد ان $x_3 = 0$ ونلاحظ أن $1)$ و $2)$ متكافئتين وتكافئ معادلة واحدة وهي:

$$3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad *$$

وذلك لأن $2)$ تنتج من $1)$ بعد ضربها ب(-1) وبتعويض في * $x_3 = 0$ نجد أن:

$$3x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

وبإعطاء $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$ ويكون لدينا الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ وهو:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- لنوجد شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية $\lambda = -4$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = -4$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = -4.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -4. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1 \\ -4x_2 \\ -4x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4x_1 \quad 1)$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = -4x_2 \quad 2)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 6x_3 = -4x_3 \quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad 1)$$

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad 2)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 10x_3 = 0 \quad 3)$$

من (3) نجد ان $x_3 = 0$ ونلاحظ أن $1)$ و $2)$ متكافئتين وتكافئ معادلة واحدة وهي:

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad *$$

وبتعويض في * $x_3 = 0$ نجد أن:

$$3x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

وبإعطاء $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$ ويكون لدينا الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = -4$ وهو:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- لنوجد شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية $\lambda = 6$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 6$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = 6.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 6.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 \\ 6x_2 \\ 6x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6x_1 \quad 1)$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 6x_2 \quad 2)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 6x_3 = 6x_3 \quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$-7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad 1)$$

$$3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \quad 2)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad 3)$$

بضرب 1) ب(-1) وجمع الناتج إلى 2) نجد الجملة الجديدة:

$$-7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad 1)$$

$$10x_1 - 10x_2 = 0 \quad 2)$$

$$0x_3 = 0 \quad 3)$$

من 2) نجد أن:

$$10x_1 - 10x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

بالتعويض في (1) نجد ان:

$$-4x_1 = 2x_3 \Rightarrow x_3 = -2x_1$$

وبإعطاء $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \;\;,\;\; x_3 = -2$ ويكون لدينا الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 6$وهو:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ولابد من التأكد أن:

$$P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

المحاضرة العاشرة **2012/3/25**

نظرية: لتكن A مصفوفة مربعة وليكن:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}. \dots .. (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

وبحيث ان λ_i قيمة ذاتية مكررة m_i مرة.

عندئذٍ فإن:

$$1) \quad \dim E_{\lambda_i} \leq m_i \quad ; \quad i = 1,2, \dots k$$

$2) \dim E_{\lambda_i} = m_i \Leftrightarrow$ قابلة للتقطير A

ملاحظة: إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ القيمة الذاتية المختلفة للمصفوفة A وكانت:

$$S_1, S_2, \dots, S_i$$

قاعدة للفضاء الذاتي:

$$E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_i}$$

فإن:

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_i$$

تكون مستقلة خطياً**(البرهان بالإستقراء الرياضي).**

مثال: لتكن:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

والمطلوب أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث أن:

$P^{-1}.A.P$ قطرية.

الحل:لنرى فيما إذا كانت المصفوفة A قابلة للتقطير حسب النظرية السابقة:

بما أن القيم الذاتية هي جذور لكثير الحدود المميز للمصفوفة A وبما أن كثير الحدود المميز للمصفوفة A يعطى ب:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -8 & -16 \\ -4 & \lambda - 1 & -8 \\ 4 & 4 & \lambda + 11 \end{vmatrix} = 0$$

لنوجد قيمة هذا المحدد:

بضرب العمود الثاني ب(-1) وبإضافته ل العمود الأول نجد:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -8 & -16 \\ -\lambda - 3 & \lambda - 1 & -8 \\ 0 & 4 & \lambda + 11 \end{vmatrix} = 0$$

بإضافة السطر الأول من المحدد الأخير إلى السطر الثاني نجد:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -8 & -16 \\ 0 & \lambda - 9 & -24 \\ 0 & 4 & \lambda + 11 \end{vmatrix} = 0$$

بنشر المحدد الأخير حسب العمود الأول نجد:

$$(\lambda + 3)[\,(\lambda - 9)(\lambda + 11) + 96] = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda + 3)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)^2(\lambda - 1)$$

ومنه نستنتج أن مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة والتي تدعى بطيف A هي:

$$\{-3,1\}$$

- لنوجد شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = 1.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5x_1 + 8x_2 + 16x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 \\ -4x_1 - 4x_2 - 11x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$5x_1 + 8x_2 + 16x_3 = x_1 \quad 1)$$

$$4x_1 + x_2 + 8x_3 = x_2 \quad 2)$$

$$-4x_1 - 4x_2 - 11x_3 = x_3 \quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$4x_1 + 8x_2 + 16x_3 = 0 \quad 1)$$

$$4x_1 + 8x_3 = 0 \quad 2)$$

$$-4x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0 \quad 3)$$

بجمع 1) ل 2) نجد الجملة الجديدة:

$$4x_1 + 8x_2 + 16x_3 = 0 \quad 1)$$

$$4x_1 + 8x_3 = 0 \quad 2)$$

$$4x_2 + 4x_3 = 0 \quad 3)$$

من 2) نجد أن:

$$4x_1 + 8x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_3$$

ومن 3) نجد أن:

$$4x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -x_3$$

وبإعطاء $x_3 = -1$, $x_1 = -2 \Rightarrow x_2 = 1$ ويكون لدينا الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$وهو:

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- لنوجد بعد الفضاء E_{-3}

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = -3$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = -3$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = -3.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -3. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5x_1 + 8x_2 + 16x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 \\ -4x_1 - 4x_2 - 11x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \\ -3x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$5x_1 + 8x_2 + 16x_3 = -3x_1 \quad 1)$$

$$4x_1 + x_2 + 8x_3 = -3x_2 \quad 2)$$

$$-4x_1 - 4x_2 - 11x_3 = -3x_3 \quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$8x_1 + 8x_2 + 16x_3 = 0 \quad 1)$$

$$4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0 \quad 2)$$

$$-4x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \quad 3)$$

ومنه نجد ان جملة المعادلات الثلاثة الأخيرة متكافئة وتكافئ معادلة واحدة لأن:

1) تنتج من 2) وذلك بعد ضربها ب(2) وكذلك 1) تنتج من 3) وذلك بعد ضربها ب(−2)
ومنه نجد أن:

$$8x_1 + 8x_2 + 16x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -(x_2 + 2x_3)$$

والأخيرة هي $X = \begin{bmatrix} -(x_2 + 2x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad ; \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \qquad ; x_2 \neq 0 \wedge x_1 \neq 0$
التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=-3} = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

ونستنتج أن مجموعة الأشعة:

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ أساس ل$E_{\lambda=-3}$ وبعده مساوياً ل 2 أي $\dim E_{-3} = 2$

وبما أن $\dim E_{-3} = 2$ وبالتالي المصفوفة A قابلة للتقطير ويكون لدينا المصفوفة P هي:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا:

$$P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال:قطر إن أمكن المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل: لنرى فيما إذا كانت المصفوفة A قابلة للتقطير حسب النظرية السابقة:

بما أن القيم الذاتية هي جذور لكثير الحدود المميز للمصفوفة A وبما أن كثير الحدود المميز للمصفوفة A يعطى ب:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -3 & \lambda-2 & 0\\ -5 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=0$$

لنوجد قيمة هذا المحدد:

بالنشر حسب السطر الأول نجد:

$$(\lambda-2)[(\lambda-2)(\lambda+1)-0]=0\Rightarrow(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0$$

ومنه نستنتج أن مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة والتي تدعى بطيف A هي:

$$\{-1,2\}$$

- لنوجد بعد الفضاء E_2

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda=2$

لنفرض أن

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda=2$ يجب أن يتحقق:

$$A.X=2.X\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=2.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}2x_1+0x_2+0x_3\\ 3x_1+2x_2+0x_3\\ 5x_1-2x_2-x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1\\ 2x_2\\ 2x_3\end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$2x_1+0x_2+0x_3=2x_1 \qquad 1)$$

$$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 2x_2 \qquad 2)$$

$$5x_1 - 2x_2 - x_3 = 2x_3 \quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad 1)$$

$$3x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \qquad 2)$$

$$5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad 3)$$

من 2) نجد $x_1 = 0$ وبالتعويض في 3) نجد:

$$-2x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow 2x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow 2x_2 = -3x_3$$

ومنه نجد أن:

$X = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \frac{-2}{3}x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{R}\{0\}$ والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية

أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=2} = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ونستنتج أن مجموعة الأشعة:

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \right\}$ أساس ل$E_{\lambda=2}$ وبعده مساوياً ل 1 أي $\dim E_2 = 1$

ومنه نستنتج أن المصفوفة غير قابلة للتقطير

تعريف: ليكن V فضاءاً شعاعياً منته البعد فوق حقل K نقول عم مؤثر خطي:

$$f: V \to V$$

أنه قابل للتقطير إذا أمكن إيجاد قاعدة لV بحيث تكون مصفوفة f بالنسبة لهذه القاعدة أي $[f]_S$ هي مصفوفة قطرية.

نظرية: يكون المؤثر الخطي f على الفضاء الشعاعي النتهي البعد V قابلاً للتقطير إذا وفقط إذا وجدت قاعدة ل V عناصرها هي أشعة ذاتية لf .

الفضاءات الشعاعية الجزئية اللامتغيرة(المستقرة)

بالنسبة لمؤثر خطي

تعريف:ليكن $f: V \to V$ مؤثراً خطياً يقال عن فضاء شعاعي جزئي W من V أنه لامتغير(مستقر) بالنسبة لf إذا كان:

$$f(x) \in W \quad ; \forall x \in W$$

أي إذا كان

$$f(W) \subseteq W$$

وينتج من التعريف مباشرةً أن $\{0\}$ وV مستقرين بالنسبة لf .

مثال:ليكن $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ مؤثراً خطياً معرفاً بالعلاقة التالية:

$$f(x, y, z) = (3x + 2y, y - z, 4x + 2y - z)$$

بين أن الفضاء الشعاعي الجزئي:

$$W = \{ (a, b, a) ; a, b \in \mathbb{R} \}$$

مستقر بالنسبة لf.

الإثبات: ليكن $x = (a, b, a) \in W$ ومنه نجد:

$$f(x) = (3a + 2b, b - a, 3a + 2b) \in W$$

تمرين:ليكن V فضاء شعاعي فوق الحقل K وليكن f مؤثراً خطياً:

$$f: V \to V$$

برهن على أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة:

$$\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

مستقراً بالنسبة لf هو أن يكون:

$$f(x_i) \in W \quad ; \quad i = 1,2, \dots , n$$

البرهان:

لزوم الشرط:لنفرض أن الفضاء الجزئي W مستقر وبالتالي:

$$\forall\, x \in W \Rightarrow f(x) \in W = Span(x_1, x_2, \dots , x_n) \Rightarrow f(x_i) \in W$$

كفاية الشرط:لنفرض أن $f(x_i) \in W$ وبحيث W الفضاء الجزئي المولد بالأشعة $\{\, x_1, x_2, \dots , x_n \,\}$

ولنبرهن أن $W = Span(x_1, x_2, \dots , x_n)$ مستقر(لامتغير)بالنسبة ل f

$$\forall x \in W$$

فإن:

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_1 x_n \ \Rightarrow$$

$$f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_1 x_n) \Rightarrow \text{خطي } f \Rightarrow$$

$$f(x) = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_1 f(x_n)$$

ولكن $f(x_i) \in W$ و W فضاء جزئي⇐ $f(x) \in W$ ومنه نجد أن:

$$f(W) \subseteq W$$

وبالتالي W مستقر بالنسبة ل f.

<u>نظرية:</u> ليكن V فضاء شعاعي فوق الحقل K وليكن $f: V \rightarrow V$ مؤثراً خطياً:

- إذا كان a شعاعاً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية λ فإن الفضاء الشعاعي الجزئي $Span(a)$ إحادي البعد ومستقراً بالنسبة ل f.
- إذا كان W فضاء شعاعي جزئي من V إحادي البعد ومستقر بالنسبة ل f فإن كل شعاع يختلف عن الصفر من W يكون شعاعاً ذاتياً ل f .

البرهان:

- بما أن $a \neq 0$ لأنه شعاع ذاتي

فإن $\{\, a\}$ أساس ل $Span(a)$ وبالتالي فإن $Span(a)$ أحادي البعد.

$$\forall x \in Span(a)$$

فهو يكتب بالشكل:

$$x = \alpha . a \quad ; \quad \forall \alpha \in K$$

ومنه نجد:

$$f(x) = \alpha . f(a) = \alpha(\lambda . a) = (\alpha . \lambda) . a \in Span(a)$$

- لنفرض ان $\{e\}$ أساس ل W

ليكن $0 \neq x \in W$ عندئذٍ فإن x يكتب بالشكل:

$$x = \alpha . e$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \alpha . f(e)$$

وبما أن W مستقر بالنسبة ل f فإن $f(e) \in W$ ومن ثم فإن:

$$f(e) = \beta . e \quad ; \quad \beta \in K$$

ومنه نجد:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha . (\beta . e) \\ &= (\alpha . \beta) . e \\ &= (\beta . \alpha) . e \\ &= \beta(\alpha . e) = \beta . x \end{aligned}$$

إذاً x شعاع ذاتي ل f.

المحاضرة الحادية عشر **2012/3/28**

مثال(1): ليكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ مؤثر خطي معرف ب:

$$f(x, y) = (y, -x)$$

أوجد جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من $\mathbb{R}^2$ المستقرة بالنسبة ل f.

الحل:

لنكتب مصفوفة f بالنسبة للقاعدة القانونية لـ$\mathbb{R}^2$:

نعلم أن القاعدة القانونية لـ$\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأشعة:

$$\{ e_1 = (1,0) , e_2 = (0,1)\}$$

$$f(e_1) = f(1,0) = (0,-1)$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (1,0)$$

وبالتالي يكون لدينا المصفوفة المطلوبة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

وإن كثير الحدود المميز للمصفوفة السابقة هو:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

والمعادلة الأخيرة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$.

وبالتالي لاتوجد فضاءات شعاعية جزئية من $\mathbb{R}^2$ أحادية البعد ومستقرة بالنسبة لـf

إذاً $\{0\}$ و $\mathbb{R}^2$ هي كل الفضاءات الشعاعية الجزئية من $\mathbb{R}^2$ والمستقرة بالنسبة لـf.

مثال(2): ليكن $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ مؤثر خطي

حيث $\mathbb{C}^2$ فضاء شعاعي جزئي فوق الحقل $K = \mathbb{C}$

معرف ب:

$$f(x,y) = (y,-x)$$

أوجد جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من $\mathbb{C}^2$ المستقرة بالنسبة لـf.

الحل:

لنكتب مصفوفة f بالنسبة للقاعدة القانونية لـ$\mathbb{C}^2$:

نعلم أن القاعدة القانونية لـ$\mathbb{C}^2$ هي مجموعة الأشعة:

$$\{ e_1 = (1,0) , e_2 = (0,1)\}$$

$$f(e_1) = f(1,0) = (0,-1)$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (1,0)$$

وبالتالي يكون لدينا المصفوفة المطلوبة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

وإن كثير الحدود المميز للمصفوفة السابقة هو:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

ومنه نجد ان:

$$\lambda = +\mathrm{i} \quad , \quad \lambda = -\mathrm{i}$$

إذاً طيف A هو $\{i,-i\}$.

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = \mathrm{i}$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = \mathrm{i}$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = i.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathrm{i}. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i.x_1 \\ i.x_2 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$x_2 = i.x_1 \quad 1)$$

$$-x_1 = \mathrm{i}.x_2 \quad 2)$$

ومنه نحصل على:

$$ix_1 - x_2 = 0 \quad 1)$$

$$x_1 + ix_2 = 0 \qquad 2)$$

نلاحظ أن (1و(2 متكافئتين لأن(1 تنتج من (2 وذلك بعد ضربها ب(i) ويكافئان معادلة واحدة وهي:

$$ix_1 - x_2 = 0 \Rightarrow ix_1 = x_2$$

ومنه نجد أن:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_1 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=i} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

ونستنتج أن $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ أساس ل$E_{\lambda=i}$ وبعده مساوياً ل 1 ويكون لدينا:

$$v_1 = (1, i)$$

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = -\mathrm{i}$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = -\mathrm{i}$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = -i.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i.x_1 \\ -i.x_2 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$x_2 = -i.x_1 \qquad 1)$$

$$-x_1 = -\mathrm{i}.x_2 \qquad 2) \qquad \Rightarrow$$

$$ix_1 + x_2 = 0 \qquad 1)$$

$$-x_1 + ix_2 = 0 \qquad 2)$$

نلاحظ أن (1و(2 متكافئتين لأن(1 تنتج من (2 وذلك بعد ضربها ب$(-i)$ ويكافئان معادلة واحدة وهي:

$$-x_1 + ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = ix_2$$

ومنه نجد أن:

$$X = \begin{bmatrix} ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=-i} = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

ونستنتج أن $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ أساس ل$E_{\lambda=-i}$ وبعده مساوياً ل 1 ويكون لدينا:

$$v_2 = (i, 1)$$

ويكون لدينا حسب النظرية:

$Span((1, i))$ أحادي البعد ومستقر بالنسبة لf.

$Span((i, 1))$ أحادي البعد ومستقر بالنسبة لf.

وبالتالي فإن الفضاءات الشعاعية الجزئية من $\mathbb{C}^2$ والمستقرة بالنسبة لf هي:

$$\{0\}, \mathbb{C}^2, Span(v_1), Span(v_2)$$

المحاضرة الثانية عشر **2012/4/1**

فضاءات الجداء الداخلي

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي فوق الحقل K حيث K إما $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

يقال عن التطبيق:

$$< , > \ : \ V \times V \to K$$

$$(x, y) \to < x, y >$$

أنه جداء داخلي على V إذا تحققت الشروط التالية:

1) $< x , y > = \overline{< y , x >}$

2) $< x + z , y > = < x , y > + < z , y >$

3) $< \alpha x , y > = \alpha . < x , y >$

4) $< x , x > \geq 0 \quad , < x , x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$

إن الشرطين 2) و 3) يمكن دمجهما بشرط واحد كالأتي:

$$< \alpha x + \beta y , z > = \alpha < x , z > + \beta < y , z >$$

إذا كان V فضاء خطي عرف عليه $< , >$ جداء داخلي عندئذٍ يدعى $(V, < , >)$ بفضاء الجداء الداخلي.

نتائج:

1) $< x , y > \in \mathbb{R} \quad , \quad < x , x > \in \mathbb{R}^{+} \quad ; \forall x, y \in V$

2) $< x, y + z > = < x , y > + < x , z >$

3) $< x, \alpha y > = \overline{\alpha} < x , y >$

4) $< x , 0 > = < 0 , x > = 0$

5) $< x , y > + < y , x \geq 2 < x , y \geq 2 < y , x >$

تمرين:برهن على أنه إذا كان $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ عنصرين من $\mathbb{R}^2$ فإن التطبيق:

$$< , > : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

المعرف بالشكل التالي:

$$< x , y > = < (x_1, x_2), (y_1, y_2) > = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

هو جداء داخلي على $\mathbb{R}^2$.

البرهان:

$$1)\quad <(x_1,x_2),(y_1,y_2)>= x_1y_1+x_2y_2=\overline{y_1x_1+y_2x_2}= \\ <(y_1,y_2),(x_1,x_2)>=<y\,,x>$$

$$2)\quad <(x_1,x_2)+(y_1,y_2),(z_1,z_2)>=<(x_1+y_1,x_2+y_2),(z_1,z_2)> \\ =(x_1+y_1).z_1+(x_2+y_2).z_2 \\ =x_1z_1+y_1z_1+x_2z_2+y_2z_2 \\ =(x_1z_1+x_2z_2)+(y_1z_1+y_2z_2)=<x\,,z>+<y\,,z> \\ <(x_1,x_2),(y_1,y_2)>$$

$$3)\quad <\alpha.(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=<(\alpha x_1,\alpha x_2),(y_1,y_2)> \\ =(\alpha x_1)y_1+(\alpha x_2)y_2=\alpha(x_1y_1)+\alpha(x_2y_2) \\ =\alpha(x_1y_1+x_2y_2)=\alpha<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=\alpha<x\,,y>$$

$$4)\quad <(x_1,x_2),(x_1,x_2)>={x_1}^2+{x_2}^2\geq 0$$

$$<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=0\Leftrightarrow (x_1,x_2)=(0,0)=\theta$$

يسمى الجداء الداخلي السابق بالجداء الداخلي العادي على $\mathbb{R}^2$.

- برهن على أنه إذا كان $x=(x_1,x_2,\dots x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ عنصرين من $\mathbb{C}^2$ فإن التطبيق:

$$<\,,>:\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$$

المعرف بالشكل التالي:

$$<x\,,y>=<(x_1,x_2,\dots x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)>=\sum_{i=1}^{n}x_i.\overline{y}_i \\ =x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n}$$

هو فضاء جداء داخلي يدعى بفضاء الجداء الداخلي العقدي على $\mathbb{C}^n$

تعريف: إذا كان V فضاء جداء داخلي منته البعد فوق $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ فإن V يدعى فضاء(هرميتي-واحدي)على الترتيب.

تعريف:ليكن V فضاء جداء داخلي إن نظيم عنصر $x\in V$ هو بالتعريف:

$$\|x\|=\sqrt{<x\,,x>}$$

وينتج من التعريف الأخير مباشرةً أن:

$$\|\alpha . x\| = |\alpha| . \|x\|$$

مثال: ليكن $x = (3,4)$ أوجد $\|x\|$ مستخدماً الجداء الداخلي العادي على $\mathbb{R}^2$ ومستخدماً الجداء الداخلي المعرف بالشكل:

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= 3x_1y_1 + 3x_2y_2$$

الحل:

$$- \|x\| = \sqrt{< x\,, x >} \Rightarrow \|x\|^2 =< x\,, x >=< (3,4), (3,4) >= 9 + 16$$
$$= 25 \;\Rightarrow \|x\| = 5$$

$$- \|x\| = \sqrt{< x\,, x >} \Rightarrow \|x\|^2 =< x\,, x >=< (3,4), (3,4) >= 3(9 + 16)$$
$$= 75 \;\Rightarrow \|x\| = 5\sqrt{3}$$

متراجحة كوشي شفارتز:

إذا كان v فضاء جداء داخلي فإن:

$$|< x\,, y >| \leq \|x\| . \|y\| \quad ; \quad \forall x, y \in V$$

البرهان:

واضح أن المترجحة تكون محققة إذا كان $x = 0$ أو $y = 0$

لنفرض أن $x \neq 0$ و $y \neq 0$ زلنرمز بـz للشعاع

$$z =< x\,, x > y- < y\,, x > x$$

عندئذٍ فإن:

$$< z\,, x >=<< x\,, x > y- < y\,, x > x\,, x >=$$

$$< x\,, x >< x\,, y > - < y\,, x >< x\,, x >= 0$$

$$\|z\|^2 =< z\,, z >=<< x\,, x > y- < y\,, x > x, < x\,, x > y- < y\,, x > x >$$

$$= \|x\|^4 < y\,, y > - < y\,, x > \|x\|^2 < x\,, y >$$

$$= \|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . | < x\,, y > |^2$$

$$= \|x\|^2 \left(\|x\|^2 . \|y\|^2 - | < x\,, y > |^2\right)$$

إذاً نستنتج أن:

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 \left(\|x\|^2 . \|y\|^2 - | < x\, ,y > |^2\right)$$

وبما أن $\|z\|^2 \geq 0$ نجد أن:

$$\|x\|^2 \left(\|x\|^2 . \|y\|^2 - | < x\, ,y > |^2\right) \geq 0$$

وبما ان $x \neq 0$ فإن $\|x\| \neq 0$ وبالتالي:

$$\|x\|^2 . \|y\|^2 - . | < x\, ,y > |^2 \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$| < x\, ,y > | \leq \|x\| . \|y\| \quad ; \ \forall x, y \in V$$

الزوايا في فضاء جداء داخلي حقيقي:

ليكن V فضاء جداء داخلي حقيقي تعرف الزاوية بين شعاعين x, y بحيث أن $x, y \in V$ بأنه العدد θ المعرف بالشكل:

$$cos\theta = \frac{< x\, ,y >}{\|x\| . \|y\|} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

والسؤال هنا هل الزاوية موجودة؟

لدينا من متراجحة شوارتز نجد:

$$| < x\, ,y > | \leq \|x\| . \|y\| \Rightarrow \frac{< x\, ,y >}{\|x\| . \|y\|} \leq 1$$

وبالتالي الزاوية موجودة أي θ موجودة.

مثال(1): في الفضاء الإقليدي(الهرميتي) $\mathbb{R}^3$ أوجد $cos\theta$ حيث θ هي الزاوية بين الشعاعين:

$$x = (1, -3,2)$$

$$y = (2,1,5)$$

الحل:

$$cos\theta = \frac{< x\, ,y >}{\|x\| . \|y\|} = \frac{2 - 3 + 10}{\sqrt{1 + 9 + 4} . \sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{9}{\sqrt{14} . \sqrt{30}}$$

مثال(2): ليكن V فضاء المصفوفات الحقيقية من المرتبة الثانية مع الجداء الداخلي المعرف كالأتي:

$$< A \, , B >= tr(B'.A)$$

والمطلوب: أوجد $cos\theta$ حيث θ هي الزاوية الكائنة بين الشعاعين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$< A \, , B >= tr(B'.A)$$

ولكن $B' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ وبالتالي يكون:

$$B'.A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$< A \, , B >= tr(B'.A) = 6 + (-4) = 2$$

$$\|A\|^2 =< A \, , A >= tr(A'.A) = tr \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = tr \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= 15 \Rightarrow \|A\| = \sqrt{15}$$

$$\|B\|^2 =< B \, , B >= tr(B'.B) = tr \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = tr \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} =$$
$$= 14 \Rightarrow \|B\| = \sqrt{14}$$

ومنه نستنتج أن:

$$cos\theta = \frac{< x \, , y >}{\|x\|. \|y\|} = \frac{2}{\sqrt{15}.\sqrt{14}}$$

تعريف:ليكن x, y شعاعين من فضاء جداء داخلي V يقال عن x أنه يعامد y ونكتب:

$x \perp y$ إذا كان $< x \, , y >= 0$

نتائج:

1- إذا كان $y \perp x$ فإنه حتماً $x \perp y$.
2- $x \perp 0$ لكل $x \in V$.
3- إذا كان $x \perp y$ فإن $x \perp \alpha y$ وذلك أياً كان $\alpha \in \mathbb{R}$.
4- $x \perp x \Leftrightarrow x = 0$

تعريف: إذا كان v فضاء جداء داخلي فوق الحقل K وكانت S مجموعة جزئية من V غير خالية فإن:

$$\{ x \in V \quad ; < x , s >= 0 \ ; \forall s \in S \}$$

تدعى بالمجموعة المعامدة لـS ويرمز لها ب $S^{\perp}$

<u>نظرية:</u> إذا كان V فضاء جداء داخلي وكانت S مجموعة جزئية من V غير خالية فإن المجموعة المعامدة لـS هي فضاء جزئي من V:

البرهان:

واضح أن $0 \in S^{\perp}$

ليكن $x, y \in S^{\perp}$ و $\alpha, \beta \in K$

$$< x , s >= 0 \ \wedge < y , s >= 0$$

$$< \alpha x + \beta y , s >= \alpha < x , s > + \beta < y , s >= \alpha 0 + \beta 0 = 0 \ ; \forall s \in S$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in S^{\perp}$$

المحاضرة الثالثة عشر **2012/4/4**

مثال: ليكن $V = \mathbb{R}^3$ ولتكن:

$$S = \{ (1,2,-1)\}$$

والمطلوب: أوجد قاعدة للمجموعة الجزئية المعامدة لـS .

الحل:

$$S^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \quad ; < x , s >= 0 \ ; \forall s \in S \}$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; < (x_1, x_2, x_3), (1,2,-1) >= 0 \}$$

$$\Rightarrow \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$S^{\perp} = \{ x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1 + 2x_2 = x_3 \}$$

وبفرض $x_1 = \alpha$ و $x_2 = \beta$ نجد:

$$S^{\perp} = \{ \alpha, \beta, \alpha + 2\beta) ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,2) \; ; \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

إذاً $\{(1,0,1) + (0,1,2) \}$ هي قاعدة ل$S^{\perp}$.

تعريف: يقال عن مجموعة $S \neq \emptyset$ من فضاء جداء داخلي V أنها مجموعة متعامدة إذا كانت عناصر S متعامدة مثنى مثنى كما يقال عن S أنها مجموعة نظامية التعامد إذا كانت متعامدة وكان نظيم كل عنصر من عناصرها يساوي الواحد.

نظرية: إذا كان V فضاء جداء داخلي فوق الحقل K وكانت S مجموعة جزئية من V لاتحوي الصفر ومتعامدة فإن S مستقلة خطياً.

البرهان:

لنفرض أن $D = \{ x_1, x_2, \dots x_n \}$ مجموعة متعامدة ولاتحوي الصفر ولنبرهن أن:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \quad *$$

$$< \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \, , x_1 >= \alpha_1 < x_1, x_1 > + \alpha_2 < x_2, x_1 > + \cdots \alpha_n < x_n, x_1 >$$

بما أن D مجموعة متعامدة فإن:

$$< x_i \, , x_j >= 0 \quad ; \quad i \neq j$$

ومن * نجد أن:

$$\alpha_1 < x_1, x_1 >= 0$$

وبما أن $x_1 \neq 0$ نجد أن $< x_1, x_1 > \neq 0$ وبالتالي نستنتج أن:

$$\alpha_1 = 0$$

وبنفس الطريق نجد ان:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$$

مثال: في الفضاء الإقليدي $V = \mathbb{R}^4$ لتكن $S = \{ (1,1,1,1) \}$ والمطلوب أوجد قاعدة نظامية التعامد ل$S^{\perp}$.

الحل:

حسب تعريف $S^{\perp}$ نجد:

$$S^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^4 \;\; ; < x \, , s >= 0 \;\; ; \forall s \in S \}$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; < (x_1, x_2, x_3, x_4), (1,1,1,1) >= 0 \}$$

$$\Rightarrow \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

بإعطاء $x_1 = x_2 = 0 \ , \ x_3 = 1 \Rightarrow x_4 = -1$

فنحصل على الشعاع الأول:

$$v_1 = (0,0,1,-1)$$

أما بالنسبة للشعاع الثاني فيكون من عناصرالقاعدة ويعامد v_1 أي يحقق المعادلتين:

$$1) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2) \quad x_3 - x_4 = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = x_4$$

وبتعويض الأخيرة في 1) نجد:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

بإعطاء $x_3 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \ , \ x_1 = 1 \ \Rightarrow x_2 = -1$

ومنه نحصل على الشعاع الثاني:

$$v_2 = (1,-1,0,0)$$

أما بالنسبة للشعاع الثالث فيكون من عناصر القاعدة ومعامد ل v_1, v_2 أي هو حل المعادلات الثلاثة التالية:

$$1) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2) \qquad x_3 - x_4 = 0$$

$$3) \quad x_1 - x_2 = 0$$

من 2) نجد $x_3 = x_4$ و من 3) نجد $x_1 = x_2$ وبإعطاء $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$ وبإعطاء $x_3 = 1 \Rightarrow x_4 = 1$ فنحصل على الشعاع الثالث:

$$v_3 = (-1,-1,1,1)$$

فيكون لدينا القاعدة نظامية التعامد:

$$\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\}$$

$$\Rightarrow \left\{\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

قاعدة نظامية التعامد.

نظرية: لتكن $S = \{ z_1, z_2, \dots z_n\}$ مجموعة نظامية التعامد في فضاء جداء داخلي V وليكن $W = Span(S)$ عندئذٍ:

$\forall x \in V$ فإن x يكتب على شكل مجموع عنصرين أحدهما من W والأخر يعامد W وذلك بصورة وحيدة.

البرهان: ليكن $x \in V$ وليكن:

$$w = < x , z_1 > z_1 + < x , z_2 > z_2 + \cdots + < x , z_n > z_n$$

ولنرمز بـa للشعاع:

$$a = x - w$$

عندئذٍ فإن $x = a + w$ وبحيث $w \in W$ ولنبرهن أن a يعامد W فيجب أن يعامد كل عنصر من المجموعة S

$$< a , z_1 > = < x - < x , z_1 > z_1 - < x , z_2 > z_2 - \cdots - < x , z_n > z_n , z_1 >$$

$$= < x , z_1 > - < x , z_1 > < z_1 , z_1 > - \cdots - < x , z_n > < z_n , z_1 > = 0$$

وبطريقة مماثلة نجد أن $\quad < a , z_i > = 0 \quad ; i = 1,2, \dots n$

ولنبرهن الأن على وحدانية الكتابة:

$$(3) \quad \dots \quad a - a' = w' - w$$

بما أن كلاً من a, a' يعامد W فإن $a - a'$ يعامد W ولكن بحسب (3) فإن $a - a'$ يعامد نفسه وعليه $a' - a = 0$ ومن ثم فإن $\quad a' = a \quad \wedge w' = w$

- ***ملاحظة:*** يسمى الشعاع w بالمسقط العمودي للشعاع x على w وتسمى a بمركبة x العمودية على W
- إذا كان $a \neq 0$ فإن مجموعة العناصر:

$\{ z_1, z_2, \dots z_n, z_{n+1} = \frac{a}{\|a\|} \}$ نظامية التعامد.

تمارين هامة:

1- برهن أن $\lambda = 0$ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة A إذا وفقط إذا كانت A شاذة.
2- برهن أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة غير الشاذة A فإن λ^{-1} قيمة ذاتية لـA^{-1}.
3- برهن أنه إذا كان f مؤثر إسقاط $(f^2 = f)$ على الفضاء الشعاعي V فإن القيم الذاتية لـf تساوي 0 أو 1.

4- برهن على أن A,B مصفوفتين مربعتين من المرتبة n فإن لـ$A.B$ و $B.A$ نفس القيم الذاتية.

البرهان:

1- لزوم الشرط:

لنفرض أن $\lambda = 0$ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة A عندئذٍ فإن كثير الحدود المميز هو:

$$|\lambda I - A| = 0^n - trA\, 0^{n-1} + \cdots + (-1)^n detA = 0 \Rightarrow$$

$$(-1)^n detA = 0 \Rightarrow detA = 0$$

كفاية الشرط:لنفرض أن A شاذة ونعلم أن كثير الحدود المميز هو:

$$|\lambda I - A| = \lambda^n - trA\, \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n detA$$

وبما أن القيم الذاتية للمصفوفة هي جذور لكثير حدودها المميز وبما أن المصفوفة شاذة نجد:

$$|\lambda I - A| = \lambda^n - trA\, \lambda^{n-1} + \cdots + 0 = 0$$

وبالتالي نجد أن:

$$\lambda(\lambda^{n-1} - trA\, \lambda^{n-2} + \cdots) = 0$$

وبالتالي $\lambda = 0$ هي جذر لكثير الحدود المميز وهي قيمة ذاتية للمصفوفة السابقة.

2- إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة غير الشاذة A فحسب التعريف يوجد مصفوفة عمودية X بحيث أن $\quad * \ldots A.X = \lambda.X \qquad ; \lambda \in K$

حيث K هوالحقل.

وبما أن المصفوفة A غير شاذة فإن مصفوفة مقلوب A موجودة.

وبما أن $\lambda \in K$ و K حقل فإن $\lambda^{-1} \in K$ وبالعودة إلى * نجد:

بضرب طرفي * بـA^{-1} نجد:

$$A^{-1}(A.X) = A^{-1}(\lambda.X) \Rightarrow (A^{-1}.A).X = \lambda.(A^{-1}.X) \Rightarrow$$

$$I.X = \lambda.(A^{-1}.X) \quad \ldots **$$

وبضرب طرفي ** ب λ^{-1} نجد ان:

$$\lambda^{-1}(I.X) = \lambda^{-1}.\lambda.(A^{-1}.X) \Rightarrow$$

$$\lambda^{-1}.\mathrm{X} = 1.(A^{-1}.X) \Rightarrow$$

$$A^{-1}.X = \lambda^{-1}.\mathrm{X}$$

ومن الأخيرة نستنتج أن λ^{-1} قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1}.

3- لنفرض أن λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي f عندئذٍ:

$$\mathrm{f(x)} = \lambda.\mathrm{x} \ldots * \qquad ; x \in V$$

وإذا قمنا بأخذ صورة الطرفين ل* نجد:

$$f\big(f(x)\big) = f(\lambda.\mathrm{x}) \Rightarrow \text{خطي} f \Rightarrow$$

$$f^2(x) = \lambda.f(x) \ldots **$$

وبما أنه حسب الفرض f مؤثر إسقاط نجد من ** أن:

$$f\ (x) = \lambda.f(x)\ \ldots ***$$

بطرح *من *** نجد:

$$f\ (x) - f(x) = \lambda.(f(x) - x) \Rightarrow$$

$$\lambda.(f(x) - x) = 0$$

ومنه نجد أن:

$$\lambda = 0$$

أو $\quad f(x) - x = 0 \Rightarrow f(x) = x$

وبتعويض الأخيرة في * نجد:

$$x = \lambda.\mathrm{x} \Rightarrow \lambda = 1$$

وبالتالي نستنتج انه إذا كان f مؤثر إسقاط $(f^2 = f)$ على الفضاء الشعاعي V فإن القيم الذاتية لf تساوي 0 أو 1.

4- لنفرض أنه:

$\forall\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{K}$ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $A.B$ فإنه يوجد شعاع X من أجله يكون:

$$* \qquad (A.B).X = \lambda.X$$

وبما أن $\quad X \in M_{n\times1}(K)$ أي ان X مصفوفة عمود من المرتبة $n \times 1$ نجد أنه:

بضرب طرفي العلاقة * بالمصفوفة B نجد:

$$B.(A.B).X = B.(\lambda.X) \Rightarrow$$

$$(B.A).(B.X) = \lambda.(B.X) \quad **$$

ولكن:

$$B_{n\times n}.X_{n\times 1} = U_{n\times 1}$$

بالعودة إلى ** نجد أن:

$$(B.A).U = \lambda.U$$

والأخيرة تعني أنه λ قيمة ذاتية للمصفوفة $B.A$ وهو مانريد برهانه وهو المطلوب.

المحاضرة الخامسة عشر **2012/4/22**

__**نظرية:**__ كل فضاء جداء داخلي منتهي البعد يملك قاعدة نظامية التعامد.

البرهان:لنفرض أن V فضاء جداء داخلي منتهي البعد

1) إذا كان $\dim V = 1$ عندئذٍ $\forall\ 0 \neq x \in V$ فإن المجموعة $\left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$ تمثل قاعدة نظامية التعامد.
2) لنفرض أن $\dim V = n \neq 1$ ولنفرض أن $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ قاعدة لـ V

نضع $z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ فتكون المجموعة المؤلفة من z_1 هي عبارة عن مجموعة نظامية التعامد.

- لنفرض أن

$$y_2 = x_2 - < x_2 , z_1 >. z_1$$

فيكون $y_2 \perp z_1$ وبما أن $\{x_1, x_2\}$ مستقلة خطياً لأن المجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ أساس لـV وبالتالي تولد V ومستقلة خطياً وكل مجموعة جزئية منها تكون مستقلة خطياً وبالتالي فإن:

$\left\{z_1, z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}\right\}$ نظامية التعامد.

لنضع:

$$y_3 = x_3 - < x_3 , z_1 >. z_1 - < x_3 , z_2 >. z_2$$

وأنه يعامد كل من z_1, z_2 وبما أن المجموعة $\{x_1, x_2, x_3\}$ مستقلة خطياً وبالتالي تكون لدينا المجموعة:

$\left\{ z_1, z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}\ , z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} \right\}$ نظامية التعامد.

بمتابعة العمل نحصل على مجموعة نظامية التعامد مؤلفة من n شعاع وبالتالي فهي قاعدة(اساس) نظامية التعامد لـV .

(تسمى الطريقة السابقة في بناء قاعدة نظامية التعامد بطريقة (غرام شميدت))

مثال(1): إستخدم القاعدة في الفضاء المنتهي البعد $\mathbb{R}^3$:

$$\{\ x_1 = (1,1,1), x_2 = (1,1,0), x_3 = (1,0,0)\}$$

وطريقة غرام شميدت في بناء قاعدة نظامية التعامد.

الحل:

إن الشعاع $(1,1,1) = x_1 \neq 0$ وبالتالي $\left\{ \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\}$ نظامية التعامد.

لنرمز ب:

$$z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

لنأخذ الشعاع:

$$y_2 = x_2 - < x_2\ , z_1 >. z_1$$

إن الشعاع السبق يعامد z_1 وبما أن $\{\ x_1\ , x_2\ \}$ مستقلة خطياً وبالتالي:

$$z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

ولكن

$$y_2 = (1,1,0) - < (1,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) >. \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= (1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{3}}. \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (1,1,0) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

وبالتالي نجد:

$$z_2=\frac{y_2}{\|y_2\|}=\frac{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{6}{9}}}=\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

لنأخذ الشعاع

$$y_3=x_3-<x_3\,,z_1>.z_1-<x_3\,,z_2>.z_2$$

$$=(1,0,0)-<(1,0,0),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>.\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-$$
$$<(1,0,0),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)>.\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$=(1,0,0)-\frac{1}{\sqrt{3}}.\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}.\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$=(1,0,0)-\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{-2}{6}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6},0-\frac{1}{3}-\frac{1}{6},0-\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$z_3=\frac{y_3}{\|y_3\|}=\frac{\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=\frac{\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$$

وبالتالي القاعدة نظامية التعامد هي:

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$$

مثال(2): إذا كانت S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ معرفة ب $S=\{\,(1,1,1)\}$ أوجد قاعدة نظامية التعامد ل $S^\perp$ وذلك بطريقتين مختلفتين.

الحل:حسب تعريف $S^\perp$ نجد:

$$S^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \ \ ; < x , s >= 0 \ ; \forall s \in S \}$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; < (x_1, x_2, x_3), (1,1,1) >= 0 \}$$

$$\Rightarrow \ x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \ x_3 = -x_1 - x_2$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_3 = -x_1 - x_2 \}$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \ ; x_3 = -\alpha - \beta \ \ ; \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (\alpha, \beta, -\alpha - \beta) \ \ ; \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) ; \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \}$$

ومنه نستنتج أن مجموعة الأشعة:

$$\{ (1,0,-1) , (0,1,-1) \}$$

تشكل أساس ل $S^{\perp}$.

- لنستخدم طريقة غرام شميدت في بناء القاعدة المطلوبة والتي هي قاعدة نظامية التعامد.

لنفرض أن الاساس ل$S^{\perp}$ هو المجموعة S المكونة من:

$$S = \{S_1, S_2\}$$

إن الشعاع $S_1 = (1,1,1) \neq 0$ وبالتالي $\left\{ \frac{S_1}{\|S_1\|} \right\}$ نظامية التعامد.

لنرمز ب:

$$z_1 = \frac{S_1}{\|S_1\|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$$

لنأخذ الشعاع:

$$y_2 = S_2 - < S_2 , z_1 > . z_1$$

إن الشعاع السبق يعامد z_1 وبما أن $\{ S_1 , S_2 \}$ مستقلة خطياً وبالتالي:

$$z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

ولكن

$$y_2 = (0,1,-1) - < (0,1,-1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) > . \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (0,1,-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} . \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = (0,1,-1) - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2}\right)$$

وبالتالي نجد:

$$z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{\left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{6}{4}}} = \frac{(-1,2-1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

وبالتالي استطعنا بناء القاعدة نظامية التعامد وهي:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

نظرية: إذا كان V فضاء جاء داخلي منته البعد وكان U فضاء جزئي من V فإن:

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

البرهان:لنفرض ان S قاعدة نظامية التعامد ل U عندئذٍ:

$x \in V$ يكتب بصورة وحيدة بالشكل:

$$x = u + a \quad ; u \in U \,, a \in U^{\perp}$$

وبالتالي فإن:

$$V = U + U^{\perp}$$

تمرين: ليكن لدينا $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ مزوداً بالجداء الداخلي المعرف بالشكل:

$$< A \,, B >= tr\, B' . A$$

1- أثبت أن القاعدة القانونية لـV نظامية التعامد.

2- ليكن W الفضاء الجزئي من V المؤلف من المصفوفات القطرية والمطلوب

أوجد قاعدة نظامية التعامد لـ$W^{\perp}$(المتمم العمودي لـW)

3- ليكن U الفضاء الجزئي من V المؤلف من المصفوفات المتناظرة

أوجد قاعدة نظامية التعامد ل$U^{\perp}$

الحل:

1- إن القاعدة القانونية هي:

$$\left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

واضح أن نظيم كل عنصر من القاعدة مساوياً للواحد.

لنرى فيما إذا كانت العناصر متعامدة مثنى مثنى

$$< E_1 , E_2 >= tr(E_2{}'.E_1) = 0$$

وبنفس الطريقة نجد أن متعامدة مثنى مثنى وبالتالي الاساس القانوني يشكل قاعدة نظامية التعامد.

2- $$W = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\; ; \;\; A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \; ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

لنوجد قاعدة لW ومن الواضح أن:

$\{ E_1 , E_4 \}$ قاعدة لW

وبالتالي يكون لدينا

$\{ E_2 , E_3\}$ قاعدة ل$W^{\perp}$ وهي قاعدة وذلك لأن $W \oplus W^{\perp} = V$ وهي قاعدة نظامية التعامد.

أو بطريقة ثانية:

$$W^{\perp} = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\; ; < \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , E_i >= 0 \; ; i = 1,4 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \;\; ; b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;\; ; b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

وبالتالي يكون لدينا مجموعة الأشعة:

$$\left\{ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

قاعدة نظامية التعامد.

3- $$U = \left\{ A \in V \;\; ; A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \; ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

والتي لها قاعدة وهي:

$$\left\{ E_1 , E_4 , E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$U^{\perp} = \{ A \in V \quad ; < A , E_i > \; ; i = 1,4,5 \}$$

$$\Rightarrow \quad a = 0$$

$$d = 0$$

$$b + c = 0$$

$$U^{\perp} = \left\{ A \in V \quad ; A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad ; b \in \mathbb{R} \}$$

$$U^{\perp} = \left\{ b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad ; b \in \mathbb{R} \}$$

وبالتالي يكون لدينا :

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ أساس ل$U^{\perp}$

ومنه نستنتج ان المجموعة:

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \right\}$ تشكل قاعدة نظامية التعامد ل$U^{\perp}$

- إذا كان f مؤثراً خطياً على الفضاء الواحدي الإقليدي V فغنه يوجد مؤثر خطي وحيد f^* على V بحيث يكون:

$$< f(x), y > = < x , f^*(y) > \qquad \forall x, y \in V$$

كما أن

$M(f^*) = [M(f)]^*$ وذلك بالنسبة لقاعدة نظامية التعامد.

يسمى f^* بقرين f أما قرين المصفوفة A فهو:

$$A^* = (\overline{A})'$$

مثال:

أوجد f^* قرين المؤثر الخطي f على $\mathbb{R}^3$ الواحدي المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z) = (2x - z\,, 2y + 3x\,, -z - y)$$

الحل: لنوجد المصفوفة والتي هي مصفوفة f بالنسبة للأساس القانوني ل$\mathbb{R}^3$ والذي يشكل قاعدة نظامية التعامد:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

وبما ان f مؤثر خطي على فضاء واحدي فإن:

$$M(f^*) = [M(f)]^* = \left[\overline{M(f)}\right]' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$f^*(x,y,z) = (2x + 3y\,, 2y - z\,, -x - z\,)$$

<u>**نظرية:**</u> إذا كان f, g مؤثرين خطيين على الفضاء الواحدي الإقليدي V فإن:

1) $f^{**} = f$

2) $(\alpha f)^* = \overline{\alpha}(f^*)$

3) $(f + g)^* = f^* + g^*$

4) $(f.g)^* = g^*.f^*$

5) $0^* = 0$

6) $1^* = 1$

7) $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$

بحيث ان التابع f في الخاصة السابقة يحقق شرط التقابل.

المحاضرة السادسة عشر **2012/4/25**

تعريف: يسمى المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي(الإقليدي) هرميتياً أو تناظرياً إذا كان:

$$f = f^*$$

- يسمى المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي(الإقليدي)شبه هرميتي أوشبه تناظري إذا كان:

$$f = -f^*$$

نتيجة:يكون المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي(الإقليدي) هرميتياً(تناظرياً) على الترتيب إذا كان:

$$< f(x), y >=< x , f(y) > \quad ; \quad \forall\, x, y \in V$$

- يكون المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي(الإقليدي) شبه هرميتي(شبه تناظري) على الترتيب إذا كان:

$$< f(x), y >= - < x , f(y) > \quad ; \quad \forall\, x, y \in V$$

تعريف: تسمى المصفوفة المربعة العقدية هرميتية إذا كان:

$$A^* = A \Leftrightarrow \overline{(A')}$$

نظرية: يكون المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي(الإقليدي) هرميتياً(تناظرياً) على الترتيب إذا وفقط إذا كانت مصفوفة f بالنسبة لقاعدة نظامية التعامد هي مصفوفة هرميتية(تناظرية).

البرهان:

1- لتكن $M(f)$ مصفوفة f بالنسبة لقاعدة نظامية التعامد.

إذا كان f هرميتياً فإن

$$f = f^*$$

وبالتالي $M(f\ ) = M(f^*)$

ولكن:

$$M(f^*) = [M(f)]^*$$

ومنه $M(f\ ) = [M(f)]^*$

وبالتالي $M(f\ )$ هرميتية.

2- لنفرض أن $M(f)$ هرميتية وهذا يعني أن:

$$M(f\ ) = [M(f)]^*$$

ولكن

$$M(f^*) = [M(f)]^*$$

ومنه يكون:

$$M(f\ ) = M(f^*)$$

وبالتالي $$f = f^*$$

وبالتالي f هرميتي.

مثال: برهن على أن المؤثر الخطي:

$$f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$$

المعرف بالشكل التالي:

$$f(x, y, z) = (2x + 5i\ y\ , -5i\ x - 3y + 2z\ , 2y + z)$$

مؤثراً هرميتياً.

البرهان:

حسب النظرية نجد أن:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 5i & 0 \\ -5i & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الأخيرة هي مصفوفة f بالنسبة لقاعدة نظامية التعامد (القاعدة القانونية ل $\mathbb{C}^3$

ولكن:

$$M(f^*) = [M(f)]^*$$

ونعلم أن:

$$[M(f)]^* = \overline{[M(f)]'} = \begin{bmatrix} 2 & 5i & 0 \\ -5i & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = M(f)$$

وبالتالي $f = f^*$ وبالتالي f هرميتي.

ملاحظة: عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة هرميتية هي أعداد حقيقية فقط .

نظرية: يكون المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي (الإقليدي) شبه هرميتي(شبه تناظري) إذا وفقط إذا كانت مصفوفة f هي مصفوفة شبه هرميتية(شبه تناظرية) إذا كانت مأخوذة بالنسبة لقاعدة نظامية التعامد.

<u>نظرية:</u> القيم الذاتية لمؤثر خطي هرميتي هي أعداد حقيقية.

البرهان:ليكن f مؤثراً هرميتياً على الفضاء الواحدي V ولتكن λ قيمة ذاتية لf ولنفرض أن x شعاع ذاتي لf موافق للقيمة الذاتية λ

$$< f(x), x >=< \lambda x , x >= \lambda < x , x > \quad ...1)$$

$$< f(x), x >=< x , f(x) >=< x , \lambda x >= \bar{\lambda} < x , x > \quad ....2)$$

من 1) و2) نجد أن:

$$\lambda < x , x >= \bar{\lambda} < x , x > \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) < x , x >= 0$$

ومنه إما $\quad \lambda - \bar{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \bar{\lambda}$

وبالتالي λ قيمة حقيقية.

أو $< x , x >= 0$ ولكن $< x , x >\neq 0$ لأن $x \neq 0$ ولأنه شعاع ذاتي.

نتائج:

1- القيم الذاتية لمصفوفة هرميتية هي أعداد حقيقية.
2- القيم الذاتية لمصفوفة حقيقية تناظرية هي أعداد حقيقية.
3- القيم الذاتية لمؤثر تناظري هي أعداد حقيقية.

<u>نظرية:</u> إن الأشعة الذاتية لمؤثر هرميتي والموافقة لقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة.

البرهان: ليكن f مؤثر هرميتي على الفضاء الواحدي V ولتكن x, y أشعة ذاتية لf موافقة لقيم ذاتية مختلفة λ, θ لدينا:

$$< f(x), y >=< \lambda x , y >= \lambda < x , y > \quad ...1)$$

$$< f(x), y >=< x , f(y) >=< x , \theta y >= \theta < x , y > \quad ...2)$$

من 1) و 2) نجد أن

$$\lambda < x , y >= \theta < x , y > \Rightarrow (\lambda - \theta) < x , y >= 0$$

وبما أن $\lambda \neq \theta$ فإن:

$$< x , y >= 0$$

ومن الأخيرة نجد: $\quad x \perp y$

وهو المطلوب.

المحاضرة السابعة عشر **2012/4/29**

نظرية: القيم الذاتية لمصفوفة شبه هرميتية(شبه تناظرية) هي أعداد تخيلية بحتة.

تعريف:تسمى المصفوفة المربعة العقدية(الحقيقية) A واحدية(عمودية) إذا تحقق الشرط الأتي:

$$A.A^* = A^*.A = I$$

أي تكون المصفوفة المربعة الحقيقة A عمودية إذا كان:

$$A.A' = A'.A = I$$

أي تكون المصفوفة المربعة الحقيقية عمودية إذا كان مقلوب المصفوفة هو منقولها.

مثال: لتكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -i \\ -i & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{واحدية}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{عمودية}$$

نظرية: تكون المصفوفة (واحدية)(عمودية) إذا وفقط إذا كانت أعمدتها(أسطرها) أشعة نظامية التعامد بالنسبة للجداء الداخلي العادي على $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ على الترتيب.

تمرين:أوجد مصفوفة عمودية P سطرها الأول $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

الحل:إن اسطر المصفوفة المطلوبة أو أعمدتها يجب أن تشكل مجموعة أشعة نظامية التعامد وبالتالي لنبحث عن شعاع غير صفري وليكن $x \neq 0$ بحيث ان:

$x = (x_1, x_2, x_3)$ وهو يعامد الشعاع المعطى وبالتالي يعامد $(1,2,2)$ ومنه:

$$< (1,2,2), (x_1, x_2, x_3) >= 0 \Rightarrow$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

وبأخذ $x_1 = 0$ نجد أن $x_2 = -x_3$

وبإعطاء $x_2 = 1$ نجد$x_3 = -1$ ومنه يكون لدينا:

$$x = (0,1,-1)$$

هو الشعاع الثاني.

- لنبحث عن شعاع ثالث غير صفري ويعامد كل من الشعاع x والشعاع المعطى ولنرمز له ب: $y = (y_1, y_2, y_3)$ ومنه نجد المعادلتين:

$$1)\quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2)\quad x_2 - x_3 = 0$$

من 2) نجد أن:

$$x_2 = x_3$$

وبتعويض الأخيرة في 1) نجد:

$$x_1 = -4x_2$$

ويكون بإعطاء $x_2 = 1$ نجد $x_1 = -4$, $x_3 = 1$ ومنه يكون لدينا الشعاع الثالث هو:

$$y = (-4,1,1)$$

وبالتالي يكون لدينا المصفوفة العمودية P وهي:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ومنه حسب النظرية أسطرها أشعة نظامية التعامد وبالتالي P عمودية ومنه يكون:

$$P^{-1} = P' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

وهو المطلوب.

تعريف:يسمى المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي(الإقليدي) واحدياً(عمودياً) على الترتيب إذا تحقق التالي:

$$< x , y >=< f(x), f(y) >$$

وذلك لكل x, y

مثال: برهن على أن المؤثر الخطي f المعرف على $\mathbb{R}^2$ ب:

$$f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b\ ,a-b)$$

عمودي.

البرهان: لنأخذ عنصرين وليكن:

$$x = (x_1, x_2)$$

$$y = (y_1, y_2)$$

من $\mathbb{R}^2$

$$< f(x), f(y) >=< f(x_1, x_2), f(y_1, y_2) >$$

$$= \frac{1}{2} < (x_1 + x_2\ , x_1 - x_2)\ , (y_1 + y_2\ , y_1 - y_2) >$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2).(y_1 + y_2) + (x_1 - x_2).(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[\ 2x_1y_1 + 2x_2y_2] = x_1y_1 + x_2y_2$$

ونعلم ان:

$$< x\ , y >=< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1y_1 + x_2y_2$$

وبالتالي f مؤثر عمودي.

نظرية: يكون المؤثر الخطي f على الفضاء الواحدي (الإقليدي) واحدياً(عمودياً) إذا وفقط إذا كانت مصفوفة f بالنسبة لقاعدة نظامية التعامد(واحدية)(عمودية).

نظرية: كل مصفوفة حقيقية تناظرية تكون قابلة للتقطير بمصفوفة عمودية.

مثال: قطر المصفوفة التالية بواسطة مصفوفة عمودية(إن أمكن).

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل: نلاحظ أن المصفوفة A حقيقية ومتناظرة إذاً حسب النظرية القائلة أن كل مصفوفة حقيقية تناظرية تكون قابلة للتقطير بمصفوفة عمودية .

لنوجد القيم الذاتية للمصفوفة A .

بما أن القيم الذاتية هي جذور لكثير الحدود المميز للمصفوفة A وبما أن كثير الحدود المميز للمصفوفة A يعطى ب:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda + 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

لنوجد قيمة هذا المحدد:

بجمع العمودين الثاني والثالث إلى الأول نحصل على:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -2 \\ \lambda - 3 & \lambda + 1 & -2 \\ \lambda - 3 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

نضرب السطر الأول من المحدد الأخير ب(-1) وإضافة الناتج إلى السطر الثاني والسطر الثالث نجد:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0$$

ونلاحظ أن المحدد الأخير مثلثي علوي وقيمته هي جداء عناصر القطر الرئيسي:

$$(\lambda - 3).(\lambda + 3)^2 = 0$$

ومنه نستنتج أن مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة والتي تدعى بطيف A هي:

$$\{ 3, -3\}$$

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 3$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 3$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = 3.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3x_1 \quad 1)$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3x_2 \quad 2)$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3x_3 \quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$-4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad 1)$$

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \quad 2)$$

$$2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \quad 3)$$

بحل حملة المعادلات السابقة والتي لها عدد لانهائي من الحلول.

بضرب المعادلة (2 ب (2) أولاً وإضافة الناتج إلى (1 ومن ثم بضرب المعادلة (2 ب (1−) وإضافة الناتج إلى (3 نجد الجملة الجديدة:

$$-6x_2 + 6x_3 = 0 \quad 1')$$

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \quad 2')$$

$$6x_2 - 6x_3 = 0 \quad 3')$$

نلاحظ أن ('1 و('3 متكافئتين وبالتالي الجملة الجديدة هي:

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \qquad 2')$$

$$6x_2 - 6x_3 = 0 \quad 3')$$

من $3')$ نجد أن $6x_2 - 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3$ بالتعويض في $2')$ نجد:

$$2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ومنه :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=3} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ونستنتج أن $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ أساس ل$E_{\lambda=3}$ وبعده مساوياً ل 1

وبالتالي لنأخذ الشعاع:

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = -3$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = -3$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = -3.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -3. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \\ -3x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3x_1 \quad 1)$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3x_2 \quad 2)$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = -3x_3 \quad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad 1)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad 2)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad 3)$$

بحل حملة المعادلات السابقة والتي لها عدد لانهائي من الحلول.

نلاحظ أن المعادلات الثلاثة السابقة متكافئة وتكافئ المعادلة:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

ومنه :

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad ; \ x_1 \neq 0 \ \wedge \ x_2 \neq 0 \right\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية أما بالنسبة للفضاء الذاتي فإن:

$$E_{\lambda=-3} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ومنه نستنتج أن مجموعة الاشعة:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$ أساس للفضاء E_{-3} وبعده $\dim E_{-3} = 2$

لنأخذ الشعاع $h_2 = (1,0,-1)$ وهو يعامد h_1 حصراً. لأن الأشعة الذاتية لمصفوفة متناظرة والموافقة لقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة.

- لنبحث عن شعاع $h_3 = (x_1, x_2, x_3) \in E_{-3}$ بحيث يعامد h_2 و h_1 ونلاحظ وضوحاً ومهما كان هذا الشعاع فهو يعامد h_1 ولكن لكي يعامد h_2 نضع:

$$< h_2 \ , h_3 >=< (1,0,-1), (x_1, x_2, x_3) >= 0$$

ومنه نجد أن:

$$x_1 - x_3 = 0 \quad *$$

ولكن بما أنه من عناصر الفضاء الجزئي E_{-3} فيجب أن يحقق أيضاً:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad **$$

من * نجد أن $x_1 = x_3$ وبالتعويض في ** نجد:

$$x_2 = -2x_1$$

وبإعطاء $x_1 = 1$ نجد:

$$x_2 = -2 \quad , \quad x_3 = 1$$

ومنه يكون لدينا الشعاع الثالث:

$$h_3 = (1,-2,1)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$P^{-1} = P' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

ويكون لدينا:

$$P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

وهو المطلوب.

-------------------------------------- ----------

الأشكال ثنائية الخطية والأشكال التربيعية

ليكن V فضاء شعاعي فوق الحقل K

يقال عن تطبيق $T: V \times V \to K$

$$(x, y) \to T(x, y)$$

أنه شكل ثنائي الخطية على V إذا كان T خطياً بالنسبة للمركبة الأولى وخطياً بالنسبة للمركبة الثانية.

أي إذا تحققت الشروط التالية:

$$1)\ T(x_1 + x_2 , y_1) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_1)$$

$$2)\ T(\alpha x_1 , y_1) = \alpha\, T(x_1, y_1) = T(x_1, \alpha y_1)$$

$$3)\ T(x_1 , y_1 + y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_1, y_2)$$

وذلك لكل $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ و لكل $\alpha \in K$

ملاحظة:

إن مجموعة الأشكال ثنائية الخطية على V تشكل فضاء شعاعي فوق K بالنسبة لعملية جمع تطبيق وضرب تطبيق بعدد.

مثال: إذا كان $(V, <,>)$ فضاء جداء داخلي حقيقي فإن $<,>$ تشكل ثنائية الخطية على V.

سنرمز لمجموعة كل الأشكال ثنائية الخطية على V بالرمز $Bil(V)$

- **مصفوفة شكل ثنائي الخطية:**

ليكن V فضاء شعاعي منتهي البعد فوق الحقل K ولتكن:

$S = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ قاعدة لـV

لنفرض أن $T \in Bil(V)$

$$\forall\, x, y \in V \Rightarrow \exists\, x_i, y_i \in K \;; x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \;, \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

$$T(x\,, y) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \;, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right)$$

$$= x_1.T(e_1, e_1).y_1 + x_1.T(e_1, e_2).y_2 + \cdots + x_1.T(e_1, e_n).y_n +$$

$$x_2.T(e_2, e_1).y_1 + x_2.T(e_2, e_2).y_2 + \cdots + x_2.T(e_2, e_n).y_n +$$

$$+ - +$$

$$x_n.T(e_n, e_1).y_1 + x_n.T(e_n, e_2).y_2 + \cdots + x_n.T(e_n, e_n).y_n$$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\,].\begin{bmatrix} T(e_1, e_1) & T(e_1, e_2) & \dots & T(e_1, e_n) \\ T(e_2, e_1) & T(e_2, e_2) & \dots & T(e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T(e_n, e_1) & T(e_n, e_2) & \dots & T(e_n, e_n) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_2 \end{bmatrix}$$

إذاً مقابل كل شكل ثنائي الخطية T على V توجد مصفوفة مربعة $[a_{i\,j}]$ حيث

$a_{i\,j} = T(e_i, e_j)$ تسمى بمصفوفة الشكل T بالنسبة للقاعدة S وبالعكس إذا كانت $B = [b_{i\,j}]$ مصفوفة مربعة من المرتبة n فوق الحقل K وعرفنا التطبيق:

$T: V \times V \to K$ بالشكل التالي:

$$T(x\,, y) = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\,].B.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_2 \end{bmatrix}$$

حيث $x_1, x_2, \dots, x_n$ مركبات x بالنسبة للقاعدة S

$y_1, y_2, \dots, y_n$ مركبات y بالنسبة للقاعدة S .

وتكون B هي المصفوفة T بالنسبة للقاعدة S وذلك لأن:

$$T(e_i, e_j) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0\,].\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(e_i, e_j) = b_{i\,j}$$

مثال(1): ليكن $V = \mathbb{R}^2$ وليكن T شكلاً ثنائي الخطية على V معرف ب:

$$T(\,(x_1, x_2), (y_1, y_2)\,) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$$

والمطلوب أوجد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة:

$$S = \{\, e_1 = (1,0)\,, e_2 = (0,1)\,\}$$

الحل:

$$T(e_1, e_1) = T\big((1,0)\,, (1,0)\,\big) = 2(1)(0) - 3(0)(1) = 0$$

$$T(e_1, e_2) = T\big((1,0)\,, (0,1)\,\big) = 2(1)(1) - 3(0)(0) = 2$$

$$T(e_2, e_1) = T\big((0,1)\,, (1,0)\,\big) = 2(0)(0) - 3(1)(1) = -3$$

$$T(e_2, e_2) = T\big((0,1)\,, (0,1)\,\big) = 2(0)(1) - 3(1)(0) = 0$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال(2): ليكن $V = \mathbb{R}^2$ ولتكن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

والمطلوب أوجد شكل ثنائي الخطية على V الممثل للمصفوفة A بالنسبة للقاعدة:

$$S = \{\, e_1 = (1,0)\,, e_2 = (0,1)\,\}$$

الحل:إذا كان $x = (x_1, x_2) \in V$ فإن:

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

وبالتالي إن الشكل ثنائي الخطية على V الممثل للمصفوفة A بالنسبة للقاعدة S هو التطبيق المعرف ب:

$$T: V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(\,(x_1, x_2), (y_1, y_2)\,) &= [x_1 \quad x_2].\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 + 3x_2 \quad -2x_1 + 4x_2].\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= (x_1 + 3x_2).y_1 + (-2x_1 + 4x_2).y_2 \\ &= x_1y_1 + 3x_2y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_2 \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن:

$$T(\,(x_1, x_2), (y_1, y_2)\,) = x_1y_1 + 3x_2y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_2$$

وهو شكل ثنائي الخطية المطلوب.

مثال(3): ليكن $V = \mathbb{R}^2$ ولتكن:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب أوجد شكل ثنائي الخطية على V الممثل للمصفوفة B بالنسبة للقاعدة:

$$S = \{\, d_1 = (1,1)\,, d_2 = (1,0)\,\}$$

الحل:إذا كان $x = (x_1, x_2) \in V$ فإن:

$$(x_1, x_2) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$$

ومن الأخيرة نستنتج أن:

$$\alpha + \beta = x_1 \quad , \quad \alpha = x_2$$

ويكون الحل المشترك هو:

$$\alpha = x_2 \quad , \quad \beta = x_1 - x_2$$

وبالتالي فإن الشكل ثنائي الخطية على V الممثل للمصفوفة B بالنسبة للقاعدة S هو التطبيق المعرف ب:

$$T: V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(\,(x_1, x_2), (y_1, y_2)\,) &= [x_2 \quad x_1 - x_2].\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} \\ &= [6x_2 - (x_1 - x_2) \quad 4x_2 + (x_1 - x_2)].\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} \\ &= [7x_2 - x_1 \quad 3x_2 + x_1\,].\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} \\ &= (7x_2 - x_1).y_2 + (3x_2 + x_1).(y_1 - y_2) \\ &= 7x_2y_2 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_1y_1 - x_1y_2 \\ &= x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2 \end{aligned}$$

وبالتالي نستنتج أن:

$$T(\,(x_1, x_2), (y_1, y_2)\,) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$$

و هو شكل ثنائي الخطية المطلوب.

دورة(2011-2012) فصل ثاني مع الحل

السؤال الأول:

لتكن $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ حيث $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ المطلوب:

1) أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A .
2) إذا علمت أن $\lambda = 1$ قيمة ذاتية لـA فأوجد الاشعة الذاتية الموافقة لها.

الحل: بما أن القيم الذاتية هي جذور لكثير الحدود المميز للمصفوفة A وبما أن كثير الحدود المميز للمصفوفة A يعطى ب:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -3 & -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

لنوجد قيمة هذا المحدد:

بضرب العمود الثاني ب(-1)وإضافة الناتج إلى العمود الأول نجد ان:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -\lambda + 1 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

بجمع السطر الأول إلى السطر الثاني في المحدد الأخير نجد أن:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر المحدد الأخير حسب العمود الأول نجد:

$$(\lambda-1).[(\lambda-4).(\lambda-4)-9] = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-8\lambda+7) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda-7) = 0$$

ومنه نستنتج أن مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة والتي تدعى بطيف A هي:

$$\{\,1,7\}$$

- إيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$

لنفرض أن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحتى يكون شعاع ذاتي ل A وموافق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ يجب أن يتحقق:

$$A.X = 1.X \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1+x_2+x_3 \\ 2x_1+3x_2+2x_3 \\ 3x_1+3x_2+4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد ان:

$$2x_1+x_2+x_3 = x_1 \qquad 1)$$

$$2x_1+3x_2+2x_3 = x_2 \qquad 2)$$

$$3x_1+3x_2+4x_3 = x_3 \qquad 3)$$

ومنه نحصل على:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad 1)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad 2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \quad 3)$$

ونلاحظ أن المعادلات الثلاثة السابقة متكافئة وتكافئ معادلة واحدة وهي:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

ومن الأخيرة نجد:

$$x_3 = -x_1 - x_2$$

ومنه :

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} \; ; \; x_1 \neq 0 \; \wedge \; x_2 \neq 0 \right\}$$

والأخيرة هي التي تعطي الأشعة الذاتية غير الصفرية .

السؤال الثاني:

1) ليكن $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ وليكن $f: V \to V$ المؤثر الخطي المعرف بالقاعدة:

$T(A) = DA$ حيث $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. أثبت أن الفضاء الشعاعي الجزئي W المولد بالشعاعين I و D مستقر بالنسبة لـ T.

البرهان:

حسب الفرض إن الفضاء الجزئي W مولد بالشعاعين I و D أي:

$$W = Span(I, D)$$

وحسب تمرين سابق والذي يمكن إعتباره كنظرية وجدنا أن:

الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة:

$$\{ I, D \}$$

مستقراً بالنسبة لـ T هو أن يكون:

$$T(I), T(D) \in W$$

لنرى فيما إذا كان الشرط محقق:

نعلم أن $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$T(I)=T\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=D\in W$$

$$T(D)=T\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

وحتى يكون $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\in W$ يجب ان يكتب كتركيبة خطية بالشعاعين I,D لان الشعاعين الأخيرين يولدان W

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

ومن الأخيرة ينتج لدينا المعادلات:

$$\alpha+\beta=0 \quad , \quad -\beta=-1 \ , \ \beta=1 \ , \ \alpha=-1$$

ومنه نستنتج أن:

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=(-1).\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+1.\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

وبالتالي كُتب كتركيبة خطية بالشعاعين ومنه نستنتج ان:

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\in W$$

وبالتالي حسب النظرية القائلة: الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة:

$$\{I,D\}$$

مستقراً بالنسبة لـT هو أن يكون:

$$T(I),T(D)\in W$$

نستنتج أن الفضاء الجزئي W من V مستقر بالنسبة لـT .

---

2) أوجد f^* المؤثر لقرين للمؤثر الخطي $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ المعرف ب:

$$f(x,y)=(x-iy\,,ix+y)$$

ماذا تستنتج؟

الحل:

لنوجد مصفوفة f بالنسبة لقاعدة نظامية التعامد.

نعلم أن مجموعة الأشعة $\{e_1 = (1,0) , e_2 = (0,1)\}$ تمثل قاعدة نظامية التعامد ويكون لدينا مصفوفة f بالنسبة لتلك القاعدة هي:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

وحسب التعريف يوجد مؤثر خطي وحيد f^* يحقق:

$$M(f^*) = [M(f)]^*$$

وذلك بالنسبة لقاعدة نظامية التعامد.

ولكن نعلم أن:

$$[M(f)]^* = \overline{[M(f)']}$$

وبالتالي:

$$\overline{[M(f)']} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

ومن الأخيرة نلاحظ أن:

$$[M(f)]^* = M(f) \ldots *$$

ويكون لدينا:

$$f^*: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

معرف بالشكل

$$f^*(x, y) = (x - iy , ix + y)$$

ومن * وحسب نظرية نستنتج أن f مؤثر هرميتي(تناظري).

السؤال الثالث:

1) في الفضاء الإقليدي $V = \mathbb{R}^2$ استخدم خوارزمية غرام-شميدت لتحويل القاعدة $\{ x_1 = (1,0), x_2 = (3, -5)\}$ إلى قاعدة نظامية التعامد لـ V

الحل:

إن الشعاع $x_1 = (1,0) \neq 0$ وبالتالي $\left\{ \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\}$ نظامية التعامد.

لنرمز ب:

$$z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{(1,0)}{\sqrt{1}} = (1,0)$$

لنأخذ الشعاع:

$$y_2 = x_2 - < x_2 , z_1 >. z_1$$

إن الشعاع السابق يعامد z_1 وبما أن $\{ x_1 , x_2 \}$ مستقلة خطياً وبالتالي:

$$z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

ولكن

$$y_2 = (3,-5) - < (3,-5), (1,0) >. (1,0)$$

$$= (3,-5) - 3. (1,0) = (3,-5) - (3,0) = (0,-5)$$

وبالتالي نجد:

$$z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{(0,-5)}{\sqrt{25}} = \frac{(0,-5)}{5} = (0,-1)$$

وبالتالي القاعدة نظامية التعامد هي:

$$\{ (1,0) , (0,-1) \}$$

----

2) ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الواحدي V.برهن على أنه إذا كان W فضاء جزئي من V مستقر بالنسبة ل f فإن $W^{\perp}$ مستقر بالنسبة ل f^*

البرهان:

$$\forall\, y \in W^{\perp} \ \exists\, x \in W \quad ; < x, y >= 0$$

ولكن بما ان W فضاء جزئي من V مستقر بالنسبة ل f فإن:

$f(x) \in W$ وبالتالي:

$$< f(x), y >= 0$$

وبما انه يوجد مؤثر خطي وحيد f^* من أجله يكون:

$$< f(x), y >=< x , f^*(y) >$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$< f(x), y >=< x , f^*(y) >= 0$$

وبما أن $< x , f^*(y) >= 0$

وبما ان $x \in W$ فإن $f^*(y) \in W^{\perp}$

وبما أننا أخذنا $\forall\ y \in W^{\perp}$ وجدنا أن $f^*(y) \in W^{\perp}$ وبالتالي نستنتج أن $W^{\perp}$ مستقر بالنسبة ل f^*

وهو المطلوب برهانه.

السؤال الرابع:

1) ليكن T الشكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^2$ المعرف ب:

$$T(\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ ) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_2$$

المطلوب أوجد مصفوفة T بالنسبة للأساس $\{\ e_1 = (1,1), e_2 = (1,0)\ \}$.

الحل:

$$T(e_1, e_1) = T\big((1,1)\,,(1,1)\ \big) = 3(1)(1) - 2(1)(1) + (1)(1) = 2$$

$$T(e_1, e_2) = T\big((1,1)\,,(1,0)\ \big) = 3(1)(1) - 2(1)(0) + (1)(0) = 3$$

$$T(e_2, e_1) = T\big((1,0)\,,(1,1)\ \big) = 3(1)(1) - 2(1)(1) + (0)(1) = 1$$

$$T(e_2, e_2) = T\big((1,0)\,,(1,0)\ \big) = 3(1)(1) - 2(1)(0) + (0)(0) = 3$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$A = [a_{i\,j}] = T(e_i, e_j) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

وهي المصفوفة المطلوبة.

----

2) برهن على أن للمصفوفات المتشابهة نفس كثير الحدود المميز.

البرهان: لنفرض أن A تشابه B عندئذٍ توجد مصفوفة غير شاذة X بحيث أن:

$$A = X^{-1}.B.X$$

وبالتالي لنبرهن المساواة التالية:

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$$

$$\begin{aligned} l_1 = |\lambda I - A| &= |\lambda X^{-1}.X - X^{-1}.B.X| = |X^{-1}(\lambda.I - B)X| \\ &= |X^{-1}|.|\lambda I - B|.|X| = |X^{-1}.X|.|\lambda I - B| = |I|.|\lambda I - B| \\ &= 1.|\lambda I - B| = |\lambda I - B| = l_2 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

تم بعونه تعالى إعداد ملخص جبر خطي(2)

والحمد لله رب العالمين

أتمنى في حال وجود أي خطأ في الملخص تنبيهنا عليه

مع تمنياتي بالتوفيق لجميع الطلاب بإذن الله

إعداد الطالب:وسام عرابي

0991108462

0936517691