الفصل الثالث:

التوابع ذات الباقي

وجدنا سابقاً أن الصورة العكسية لمجموعة دنيا أساسية وفق تابع متزايد (بين مجموعتين مرتبتين) هي مجموعة دنيا لكن ليست بالضرورة دنيا أساسية، فالسؤال البديهي الذي يتبادر لذهن القارئ :

هل من الممكن إضافة شروط على التابع المتزايد بحيث تصبح الصورة العكسية لكل مجموعة دنيا أساسية هي مجموعة دنيا أساسية؟

الجواب بالإيجاب والمبرهنة التالية تبين ذلك (سندعو كل تابع يحقق هذه الخاصة تابع ذي باقي)

3-1- التوابع ذات الباقي:

3-1-1. مبرهنة:

من أجل أي مجموعتين مرتبتين $(A,\leq_1),(B,\leq_2)$ ومن أجل أي تابع $f:(A,\leq_1)\to(B,\leq_2)$ فإن الشروط التالية متكافئة:

1- الصورة العكسية وفق f لكل مجموعة دنيا أساسية في B هي مجموعة دنيا أساسية في A.

2- التابع $f:(A,\leq_1)\to(B,\leq_2)$ متزايد و يوجد تابع متزايد $g:(B,\leq_2)\to(A,\leq_1)$ يحقق[1]

$$g\circ f\geq id_A \quad , \quad f\circ g\leq id_B$$

3- الصورة العكسية وفق f لكل مجموعة دنيا أساسية في B هي مجموعة دنيا أساسية في A.

الإثبات:

$(1)\Rightarrow(2)$

لنفرض أن الصورة العكسية وفق f لكل مجموعة دنيا أساسية في B هي مجموعة دنيا أساسية في A، و بالتالي دنيا في A، فحسب المبرهنة 2-3-2 f متزايد.

لنعرِّف التابع $g:(B,\leq_2)\to(A,\leq_1)$ بالطريقة التالية:

من أجل كل $b\in B$ فإن الصورة العكسية وفق f للمجموعة $b^{\downarrow}$ هي مجموعة دنيا أساسية في $(A,\leq_1)$ ولتكن $a^{\downarrow}$، حيث $a\in A$ وحيد، عندئذٍ سنعرِّف

---

[1] -1 تذكر أنه من أجل أي مجموعة غير خالية A، ومن أجل أي مجموعة مرتبة $(A,\leq_1)$، فإن $F(A,B)$ مجموعة كل التوابع من A إلى B، مزودة بالعلاقة التالية $\preceq$ ستكون مجموعة مرتبة

$$\forall f,g\in F(A,B):\quad f\preceq g\ \Leftrightarrow\ (\ f(x)\leq_1 g(x)\ ;\forall x\in A\ )$$

[2] لأن التابع $\tilde{f}:(P(B),\subset)\to(P(A),\subset)$ متزايد حسب تمرين سابق.

[3] لأن $g(b)=a\ \Rightarrow\ \tilde{f}(b^{\downarrow})=g(b)^{\downarrow}$

[4] لو عَرَّفنا $B.I$ جداء المثاليين B,I بأنه المجموعة $X:=\{x.y:x\in B\wedge y\in I\}$ لما كانت المجموعة X مثالي.

$$g(b) \coloneqq a$$

أي أنه من أجل كل $A \ni a \, , B \ni b$ فإن

$$g(b) = a \;\; \Leftrightarrow \;\; \check{f}\left(b^{\downarrow}\right) = a^{\downarrow}$$

أي أن

$$g(b) \coloneqq \max\{x \in A : f(x) \leq b\}$$

فيكون

$$b_1 \leq_2 b_2 \Rightarrow \; b_1^{\downarrow} \subset \; b_2^{\downarrow} \overset{2}{\Rightarrow} a_1^{\downarrow} \subset \; a_2^{\downarrow} \; \Rightarrow \; a_1 \leq_1 a_2$$

إذاً التابع g متزايد.

و لنبرهن أن

$$g \circ f \geq id_A \;\; , \;\;\; f \circ g \leq id_B$$

لنفرض أن $B \ni b$، و أن $g(b) = a$ (أي أن $\check{f}\left(b^{\downarrow}\right) = a^{\downarrow}$) و لنبرهن أن

$$(f \circ g)(b) \leq_2 b$$

بما أن $a \ni \check{f}\left(b^{\downarrow}\right)$ فإن $f(a) \in b^{\downarrow}$، و بالتالي $f(a) \leq_2 b$.

فيكون لدينا

$$(f \circ g)(b) = f\big(g(b)\big) = f(a) \leq_2 b$$

مما يعني أن $f \circ g \leq id_B$.

لنبرهن أن

$$\forall a \in A \; : \;\; a \leq_1 (g \circ f)(a)$$

لدينا

$$a \in \check{f}\big(f(a)^{\downarrow}\big) \overset{3}{=} g\big(f(a)\big)^{\downarrow}$$

و بالتالي

---

[2] لأن التابع $\check{f} : (P(B), \subset) \to (P(A), \subset)$ متزايد حسب تمرين سابق.

[3] لأن $g(b) = a \;\; \Rightarrow \;\; \check{f}\left(b^{\downarrow}\right) = g(b)^{\downarrow}$

د. وسام طلب ©2013

$$a \leq_1 (g \circ f)(a)$$

مما يعني أن $g \circ f \geq id_A$.

$(2) \Rightarrow (1)$

لنفرض أن التابعين $f: (A, \leq_1) \to (B, \leq_2)$ و $g: (B, \leq_2) \to (A, \leq_1)$ متزايدان و يحققان

$$g \circ f \geq id_A \, , f \circ g \leq id_B$$

و لنبرهن أن الصورة العكسية وفق f لكل مجموعة دنيا أساسية في B هي مجموعة دنيا أساسية في A.

ليكن $B \ni b$ و لنبرهن وجود $A \ni a$ يحقق $\overleftarrow{f}(b^{\downarrow}) = a^{\downarrow}$.

لدينا

$$f(g(b)) \leq_2 b \;\Rightarrow\; g(b) \in \overleftarrow{f}(b^{\downarrow})$$

ومنه

$$\boxed{g(b)^{\downarrow} \subset \overleftarrow{f}(b^{\downarrow})} \quad (1)$$

لنبرهن أن $\overleftarrow{f}(b^{\downarrow}) \subset g(b)^{\downarrow}$.

لدينا

$$x \in \overleftarrow{f}(b^{\downarrow}) \Rightarrow f(x) \leq_2 b$$

كما أنه لدينا

$$g \circ f \geq id_A \Rightarrow \forall x \in \overleftarrow{f}(b^{\downarrow}) \subset A : \; x \leq_1 g(f(x)) \leq_1 g(b)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \overleftarrow{f}(b^{\downarrow}) : \; x \in g(b)^{\downarrow}$$

و بالتالي

$$\boxed{\overleftarrow{f}(b^{\downarrow}) \subset g(b)^{\downarrow}} \quad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن

$$\overleftarrow{f}(b^{\downarrow}) = g(b)^{\downarrow}$$

إذاً الصورة العكسية وفق f لكل مجموعة دنيا أساسية في B هي مجموعة دنيا أساسية في A. ■

د. وسام طلب ©2013

2-1-3. تعريف:

سندعو كل تطبيق f يحقق أحد الشرطين المتكافئين في المبرهنة السابقة تابع ذي باقي (residuated)، و سندعو التابع g الوارد في المبرهنة 3-1-1 باقي التابع f (the residual of f).

3-1-3. ملاحظة:

التابع g الوارد في المبرهنة 3-1-1 وحيد، ذلك لأنه إذا فرضنا جدلاً وجود تابعين g, g' يحققان شروط المبرهنة، أي أن التابع $f: (A, \leq_1) \to (B, \leq_2)$ متزايد و يوجد تابعان متزايدان

$$g, g': (B, \leq_2) \to (A, \leq_1)$$

يحققان

$$g \circ f \geq id_A \quad , \quad f \circ g \leq id_B \qquad (1)$$
$$g' \circ f \geq id_A \quad , \quad f \circ g' \leq id_B \qquad (2)$$

عندئذٍ فإن

$$g = id_A \circ g \leq (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) \leq g' \circ id_B = g'$$

و بشكلٍ مشابه نجد $g \leq g'$، و بالتالي $g = g'$.

إن وحدانية التابع g تجعل مفهوم باقي تابع الوارد في التعريف 3-1-2 معرف جيداً.

إذاً من أجل كل تابع f ذي باقي يوجد تابع وحيد g سندعوه باقي التابع f و سنرمز له $g = f^+$.

عندئذٍ فإن هذا التابع الوحيد f^+ و المعرف كما يلي

$$\forall\, b \in B \ : \ f^+(b) := \max \overleftarrow{f}\left(b^{\downarrow}\right) = \max\{x \in A : f(x) \leq b\}$$

سيحقق الشرطين التاليين

$$f^+ \circ f \geq id_A \ , \ f \circ f^+ \leq id_B$$

4-1-3. تمرين:

أثبت أنه من أجل كل تابع $f: A \to B$، فإن التابع

$$\vec{f}: (P(A), \subset) \to (P(B), \subset)$$

ذي باقي و باقيه هو التابع

$$\overleftarrow{f}: (P(B), \subset) \to (P(A), \subset)$$

أي أن $\left(\vec{f}\right)^+ = \overleftarrow{f}$.

د. وسام طلب ©2013

3-1-5. تمرين:

لتكن $B \subset A$، و لنعرّف التابع

$$\Psi_B : (P(A), \subset) \to (P(A), \subset) \ ; \ X \mapsto \Psi_B(X) := B \cap X$$

أثبت أن التابع Ψ_B ذي باقي و باقيه هو التابع

$$\Psi_B^+ : (P(A), \subset) \to (P(A), \subset) \ ; \ X \mapsto X \cup B^c$$

3-1-6. تمرين:

ليكن $m \ni \mathbb{N}^*$، و لنعرّف

$$f_m : (\mathbb{N}^*, \leq) \to (\mathbb{N}^*, \leq) \ ; \ n \mapsto f_m(n) := mn$$

أثبت أن f ذي باقي و باقيه هو التابع

$$f_m^+ : (\mathbb{N}^*, \leq) \to (\mathbb{N}^*, \leq) \ ; \ k \mapsto f_m^+(k) := \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor$$

3-1-7. تمرين:

لتكن $(S, .)$ نصف زمرة، و لنزود مجموعة أجزائها $P(S)$ بقانون التشكيل الداخلي $*$ المعرف كما يلي

$$\forall X, Y \in P(S) \ : \ X * Y := \begin{cases} \{x.y : x \in X \wedge y \in Y\} & if \quad X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و لتكن $B \subset P(S)$، أثبت أن التابع التالي ذي باقي

$$f_B : (P(S), \subset) \to (P(S), \subset) \ ; \ \{X_i \subset S : i \in I\} \mapsto \{B * X_i \subset S : i \in I\}$$

3-1-8. تمرين:

لتكن $(A, +, .)$ حلقة تبديلية واحدية، و ليكن B مثالي ما فيها، لنرمز $I(A)$ لمجموعة المثاليات على A، من الواضح أن $(I(A), \subset)$ مجموعة مرتبة.

أثبت أن التابع التالي ذي باقي

$$g_B : (I(A), \subset) \to (I(A), \subset) \ ; \ I \mapsto B.I$$

حيث $B.I$ هو جداء المثاليين B, I و المعرَّف[4] بأنه مجموعة كل المجاميع المنتهية لجداءات عناصر المثاليين B, I.

[4] لو عَرَّفنا $B.I$ جداء المثاليين B, I بأنه المجموعة $\{x.y : x \in B \wedge y \in I\} := X$ لما كانت المجموعة X مثالي.

د. وسام طلب 2013©

9-1-3. مبرهنة :

ليكن $f:(P(X),\subset)\to(P(X),\subset)$ تابع ذي باقي، عندئذٍ فإنه

من أجل كل مجموعة جزئية من X مثل A فإن

$$\bigcup_{x\in A} f(\{x\}) = f(A)$$

الإثبات:

إذا كانت المجموعة A خالية فالقضية صحيحة وضوحاً، لنفرض أن A غير خالية، فنجد

$$(\forall x\in A:\{x\}\subset A) \overset{f\ \text{متزايد}}{\Longrightarrow} \left(\forall x\in A: f(\{x\})\subset f(A)\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\bigcup_{x\in A} f(\{x\})\subset f(A)} \quad ❶$$

لنرمز

$$B := \bigcup_{x\in A} f(\{x\})$$

لدينا من أجل كل $x\in A\ni$ فإن $f(\{x\})\subset B$ و بالتالي

$$\forall x\in A\ :\ \{x\}\subset f^{+}f(\{x\})\subset f^{+}(B)$$

و بالتالي

$$A\subset f^{+}(B)$$

ومن ثم

$$f(A)\subset ff^{+}(B)\subset B$$

إذاً

$$\boxed{f(A)\subset \bigcup_{x\in A} f(\{x\})} \quad ❷$$

د. وسام طلب ©2013

من ❶ و ❷ نستنتج أن

$$\blacksquare. \bigcup_{x\in A} f(\{x\}) = f(A)$$

النتيجة التالية هي تطبيق مباشر للمبرهنة السابقة

10-1-3. نتيجة :

ليكن $(P(A),\subset) \to (P(A),\subset)$ $: f,g$ تابعان ذي باقي، و لنفرض أن f,g متطابقان على المجموعات وحيدة العنصر، أي أن

$$\forall\, x \in A : f(\{x\}) = g(\{x\})$$

عندئذٍ فإن $f = g$.

الإثبات:

يترك كتمرين للقارئ.

11-1-3. مبرهنة :

لتكن A مجموعة غير خالية، و لتكن R علاقة ما على A، عندئذٍ فإن التطبيق

$$\xi_R : (P(A),\subset) \to (P(A),\subset) ; B \mapsto \{y \in A/ \quad \exists x \in B: (x,y) \in R\}$$

ذي باقي، زد على ذلك فإن كل تطبيق ذي باقي $f: (P(A),\subset) \to (P(A),\subset)$ سيكون من الشكل ξ_R من أجل علاقة مناسبة R على A.

الإثبات:

❶ لنثبت أن التطبيق ξ_R ذي باقٍ و لنوجد باقيه.

ليكن التابع

$$f : (P(A),\subset) \to (P(A),\subset) ; B \mapsto B^c = A \setminus B$$

عندئذٍ فإن f متناقص (تحقق من ذلك)، و لنثبت أن

$$\xi_R^{+} = f \circ \xi_{R^{-1}} \circ f$$

إن التابع $f \circ \xi_{R^{-1}} \circ f$ متزايد (لأن تركيب توابع متزايدة هو تابع متزايد).

لنتحقق من كون

$$\xi_R \circ (f \circ \xi_{R^{-1}} \circ f) \le id_{P(A)} \ \wedge \ (f \circ \xi_{R^{-1}} \circ f) \circ \xi_R \ge id_{P(A)}$$

لدينا

د. وسام طلب ©2013

$$\boxed{\forall\, B \in P(A):\ \xi_R \circ\ (f \circ \xi_{R^{-1}} \circ f)(B) = \xi_R\big(\big(\xi_{R^{-1}}(B^c)\big)^c\big) \subset B} \quad (1)$$

حيث إثبات الاحتواء الأخير هو التالي

$$y \in \xi_R\big(\big(\xi_{R^{-1}}(B^c)\big)^c\big) \Rightarrow \exists\, x \in \big(\xi_{R^{-1}}(B^c)\big)^c : (x,y) \in R$$

$$\Rightarrow\ (x,y) \in R \wedge \big((y',x) \notin R^{-1}, \qquad \forall y' \in B^c\ \big)$$

$$\Rightarrow\ (x,y) \in R \wedge \big((x,y') \notin R\ \ , \qquad \forall y' \in B^c\ \big)$$

$$\Rightarrow y \in B.$$

و بشكل مشابه يمكن اثبات أن:

$$\boxed{\forall\, B \in P(A):\ (f \circ \xi_{R^{-1}} \circ f) \circ \xi_R(B) = \big(\xi_{R^{-1}}(\xi_R(B)^c)\big)^c \supset B} \quad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) و بالاعتماد على المبرهنة 3-1-1 نستنتج أن

$$\boxed{\boldsymbol{\xi_R^+ = f \circ \xi_{R^{-1}} \circ f}}$$

❷ **لنثبت أن كل تطبيق ذي باقي $f:(P(A),\subset) \to (P(A),\subset)$ سيكون من الشكل ξ_R من أجل علاقة مناسبة R على A.**

ليكن $f:(P(A),\subset) \to (P(A),\subset)$ تابع ما ذي باقي، و لنعرِّف العلاقة R_f على A كما يلي :

$$\forall\, x,y \in A:\ \big((x,y) \in R_f \Leftrightarrow y \in f(\{x\})\big)$$

فنلاحظ أن

$$\forall \{x\} \in P(A)\ :\ \xi_{R_f}(\{x\}) = \{y \in A : (x,y) \in R_f\} = f(\{x\})$$

و بالاعتماد على النتيجة 3-1-10 نستنتج أن

$$\forall\, B \in P(A):\ \xi_{R_f}(B) = f(B)$$

و بالتالي $\xi_{R_f} = f$. ■

3-1-12. تمرين:

لتكن A,B,C ثلاث مجموعات مرتبة و لنرمز $F_{\nearrow}(A,B)$ لمجموعة كل التوابع **المتزايدة** من A إلى B، و لنرمز $F_{\nearrow}(B,C)$ لمجموعة كل التوابع **المتزايدة** من B إلى C، أثبت أن[5]

[5] زودنا سابقاً مجموعة التوابع بين مجموعتين مرتبتين بعلاقة ترتيب، انظر المثال 6 من الفقرة 1-5 بعنوان أمثلة و تمارين.

د. وسام طلب ©2013

$$\forall g, g_1, g_2 \in F_{\nearrow}(A,B), \qquad \forall f, f_1, f_2 \in F_{\nearrow}(B,C) \ :$$

$$g_1 \leq g_2 \Rightarrow f \circ g_1 \leq f \circ g_2$$

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1 \circ g \leq f_2 \circ g$$

13-1-3. نتيجة:

من أجل كل تابع ذي باقي $f: (A, \leq) \to (B, \leq)$، فإن

$$f \circ f^+ \circ f = f \quad , \quad f^+ \circ f \circ f^+ = f^+$$

الإثبات:

$$f \circ f^+ \leq id_B \xrightarrow{f \text{ متزايد}} (f \circ f^+) \circ f \leq id_B \circ f = f$$

$$f^+ \circ f \geq id_A \xrightarrow{f \text{ متزايد}} f \circ (f^+ \circ f) \geq f \circ id_A = f$$

مما يثبت أن $f \circ f^+ \circ f = f$.

بطريقة مشابهة يمكن اثبات أن $f^+ \circ f \circ f^+ = f^+$.

14-1-3. مبرهنة:

إذا كان $g : A \to B$ ، $f : B \to C$ تابعان ذي باقي فإن تركيبهما سيكون تابع ذي باقي و سيعطى باقيه بالعلاقة التالية

$$(f \circ g)^+ = g^+ \circ f^+$$

الإثبات:

$$(f \circ g) \circ (g^+ \circ f^+) \leq id_C \ , \qquad (g^+ \circ f^+) \circ (f \circ g) \geq id_A$$

لدينا

$$(f \circ g) \circ (g^+ \circ f^+) = f \circ (g \circ g^+) \circ f^+ \overset{\text{تمرين } 3-1-12}{\leq} f \circ f^+ \leq id_C$$

و كذلك

$$(g^+ \circ f^+) \circ (f \circ g) = g^+ \circ (f^+ \circ f) \circ g \overset{\text{تمرين } 3-1-12}{\geq} g^+ \circ g \geq id_A$$

و أخيراً بالاعتماد على المبرهنة 3-1-1 نجد المطلوب. ■

د. وسام طلب ©2013

15-1-3.نتيجة:

من أجل كل مجموعة مرتبة $(A, \preceq)$ فإن $Res(A)$ مجموعة كل التوابع ذات الباقي من A إلى A تشكل نصف زمرة مع عملية تركيب التوابع، و كذلك المجموعة

$$Res^{+}(A) \coloneqq \{f^{+} : \ f \in Res(A)\}$$

تشكل نصف زمرة مع عملية تركيب التوابع.

د. وسام طلب 2013©