$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cancel{(n-1)!}}{(n)\cancel{(n-1)!}}\cdot z^n$$

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot z^n$$

5 أوجد نشر تايلور عند النقطة $a=1$ للتابع:

$$f(z)=\ln(z)$$

الحل:

$$f(z)=\ln(z)\quad,\quad f(1)=0$$

$$f'(z)=\frac{1}{z}=z^{-1}\quad,\quad f'(1)=1$$

$$f''(z)=(-1)\,z^{-2}\quad,\quad f''(1)=-1$$

$$f'''(z)=2\,.\,z^{-3}\quad,\quad f'''(1)=2$$

$$f^{(4)}(z)=(-1)(6)(z)^{-4}\quad,\quad f^{(4)}(1)=(-1)(6)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,(z)^{-n}\quad,\quad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\cdot(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\cancel{(n-1)!}}{(n)\cancel{(n-1)!}}\cdot(z-1)^n$$

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(z-1)^n$$

6 أوجد نشر تايلور عند النقطة $a=-i$ للتابع:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}$$

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}\quad,\quad f(-i)=\frac{1}{1+i}$$

$$f'(z)=(+1)(1-z)^{-2}\quad,\quad f'(-i)=\frac{1}{(1+i)^2}$$

$$f''(z)=(-1)(2)(1-z)^{-3}\quad,\quad f''(-i)=\frac{(-1)(2)}{(1+i)^3}$$

$$f^{(3)}(z) = 6(1-z)^{-4} \quad , f^{(3)}(-i) = \frac{6}{(1+i)^4}$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n+1}(n!)\cdot(1-z)^{-(n+1)} \quad , f^{(n)}(-i) = \frac{(-1)^{n+1}(n!)}{(1+i)^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-i)}{n!}(z+i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot \cancel{n!}}{(1+i)^{n+1}\cdot \cancel{n!}}(z+i)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{1+i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n$$

$\boxed{7}$ أوجد نشر تايلور للتابع:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} \quad \text{عند النقطة} \quad a=-1$$

الحل:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} = (z+2)^{-2} \quad , f(-1) = 1$$

$$f'(z) = (-1)(2)(z+2)^{-3} \quad , f'(-1) = (-1)(2)$$

$$f''(z) = 6(z+2)^{-4} \quad , f''(-1) = 6$$

$$f'''(z) = (-1)(24)(z+2)^{-5} \quad , f'''(-1) = (-1)(24)$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n(n+1)!\,(z+2)^{-(n+2)} \quad , f^{(n)}(-1) = (-1)^n\cdot(n+1)!$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}\cdot(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(\cancel{n!})}{\cancel{n!}}\cdot(z+1)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z+1)^n$$

$\boxed{8}$ أوجد نشر تايلر حول النقطة $a=2i$ للتابع:

$$f(z) = \frac{1}{3-z}$$

/ /

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{3-z}=(3-z)^{-1}\quad,\ f(2i)=\frac{1}{3-2i}$$

$$f'(z)=(+1)(3-z)^{-2}\quad,\ f'(2i)=(3-2i)^{-2}$$

$$f''(z)=(+2)(3-z)^{-3}\quad,\ f''(2i)=2(3-2i)^{-3}$$

$$f'''(z)=(6)(3-z)^{-4}\quad,\ f'''(2i)=6(3-2i)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z)=n!\,(3-z)^{-(n+1)}\quad,\ f^{(n)}(2i)=\frac{n!}{(3-2i)^{n+1}}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2i)}{n!}(z-2i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,(3-2i)^{n+1}}\cdot(z-2i)^n$$

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(3-2i)^{n+1}}$$

9. أوجد منشور تايلور حول النقطة $a=1$ للتابع:

$$f(z)=\frac{z^2+2}{z^2-4}$$

الحل:

نغير شكل التابع بقسمة البسط على المقام

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline z^2-4 & z^2+2 \\ & -(z^2-4) \\ \hline & +6 \end{array}$$

$$f(z)=1+\frac{6}{z^2-4}=1+\frac{6}{(z+2)(z-2)}$$

$$\frac{6}{(z+2)(z-2)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-2}$$

نوجد A ، B

$$\frac{6}{(z+2)(z-2)}=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{z+2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

إذاً:

$$f(z)=1+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+2}\right]$$

النشر بجوار الواحد إذاً نفرض: $z-1=t$

$$\Rightarrow z=t+1$$

$$f(z) = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+3}$$
$$= 1 - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-t}\right) - \frac{\cancel{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{3}(1+\frac{t}{3})}\right)$$
$$= 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-t}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-(-\frac{t}{3})}\right)$$

فلاحظ أن:

★ $\frac{1}{1-t}$ هو مجموع متسلسلة هندسية أساسها t بشرط:
$|t|<1 \iff |z-1|<1$ أي منطقة التقارب هي الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها (1).

★ $\frac{1}{1-(-\frac{t}{3})}$ هو مجموع متسلسلة هندسية أساسها $-\frac{t}{3}$ بشرط
$\left|-\frac{t}{3}\right|<1 \iff \left|\frac{t}{3}\right|<1 \iff |z-1|<3$ أي منطقة التقارب هي الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها (3).

وبهذا يكون نشر التابع المطلوب هو:
$$f(z) = z - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z+1}{3}\right)^n$$
ويكون التابع $f(z)$ تحليلياً في الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها (1)

$\boxed{10}$ أوجد منشور ماكلوران للدالة:
$$f(z) = \sqrt{\cos z}$$

الحل:

$$f(z) = \sqrt{\cos z} = (\cos z)^{\frac{1}{2}} = (1-(1-\cos z))^{\frac{1}{2}}$$

نفرض: $1-\cos z = w$ فنحصل على:

$f(z) = (1-w)^{\frac{1}{2}}$ منشور ثنائي الحدين

$$f(0) = 1$$

$f'(z) = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)(1-w)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(0) = -\frac{1}{2}$

$f''(z) = \frac{1}{4}(1-w)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}$

$f'''(z) = \frac{3}{8}(1-w)^{-\frac{5}{2}}$, $f'''(0) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$

$f^{(4)}(z) = \frac{15}{16}(1-w)^{-\frac{7}{2}}$, $f^{(4)}(0) = \frac{15}{16} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 5}{8}$

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2} w + \frac{1}{8} w^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!} \cdot w^3 + \dots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}(1-\cos z) + \frac{1}{8}(1-\cos z)^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!}(1-\cos z)^3 + \dots$$
$$\Rightarrow f(z) = 1 - \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{2n}\right]$$

المحاضرة (12) : الإثنين 25 / 11 / 2012

التكاملات العقدية

الطرق والمنحنيات:

الطريق هو تابع مركب لمتحول حقيقي $\gamma(t)$ مستمر من أجل كل نقطة وهذا يكافئ بلغة ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ ; |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$$

وذلك : $\forall t \in [\alpha, \beta]$

- نسمي النقطتين : $a = \gamma(\alpha)$ ، $b = \gamma(\beta)$ بنهايتي أو طرفي الطريق
- إذا كان : $\alpha < \beta$ عندئذ a هي بداية الطريق ، و b هي نهاية الطريق .
- نقول عن الطريق أنه مغلق إذا تحقق :

$$a = \gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$$

- نقول عن الطريق : $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$

أنه يقع في المجموعة M إذا كان : $\gamma(t) \in M$ وذلك : $\forall t \in [\alpha, \beta]$

/ /

الطريق البسيطة

تعريف:

نقول عن الطريق γ أنها بسيطة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\ t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] \quad ; \quad t_1 \neq t_2$$
$$\Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$$

وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت: $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ تكون γ مغلقة.

هندسياً:

نقول عن الطريق γ أنها بسيطة إذا لم تتقاطع مع نفسها في أي نقطة باستثناء حالة تطابق نقطة البداية مع نقطة النهاية وذلك يكافئ كون γ مغلقة.

الجدير بالذكر أن:

$$\gamma : z = z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad \forall\ t \in [\alpha, \beta]$$

ندعو هذه المعادلة: المعادلة الوسيطية للطريق γ. وبحذف الوسيط (t) من المعادلتين:

$$\begin{cases} x = x(t) = \mathrm{Re}\, z(t) \\ y = y(t) = \mathrm{Im}\, z(t) \end{cases}$$

نحصل على المعادلة الديكارتية للطريق γ في المستوي $\mathbb{C}$.

مثال:

صف هندسياً المعادلات التالية:

① $z = z(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, \pi]$

الحل:

نلاحظ أن $z(t)$ هو تابع مستمر على المجال المفروض $[0, \pi]$ وبالتالي هذا التابع يمثل طريقاً في المستوي المركب يمكن كتابته بالشكل:

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$x = x(t) = \cos t \quad , \quad y = y(t) = \sin t$$

نحذف الوسيط بالتربيع والجمع نتحصل على :

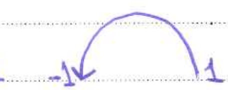
$x^2+y^2=1$; $t\in[0,\pi]$

اذا المعادلة الديكارتية للطريق لا في المستوي تمثل النصف العلوي لدائرة الوحدة موجهة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة ،

استنتجنا التوجيه من خلال :

$a=z(\alpha)=z(0)=e^{i0}=1$

$b=z(\beta)=z(\pi)=e^{i\pi}=-1$



ونلاحظ أن هذه الطريق غير مغلقة وبسيطة ومحدودة .

② $z=z(t)=e^{it}$; $t\in[0,2\pi]$

الحل :

$z(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t$

$x=x(t)=\cos t$, $y=y(t)=\sin t$

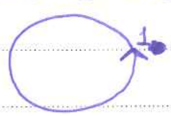
نحذف الوسيط بالتربيع والجمع :

$x^2+y^2=1$ $t\in[0,2\pi]$

$a=z(\alpha)=z(0)=e^{i0}=1$

$b=z(\beta)=z(2\pi)=e^{i2\pi}=0$

المعادلة الديكارتية للطريق لا في المستوي المركب تمثل دائرة الوحدة موجهة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة .



ونلاحظ أن هذه الطريق مغلقة وبسيطة ومحدودة .

③ $z=z(t)=\cos t$; $t\in[2\pi,3\pi]$

الحل :

$z=z(t)=\cos t$

$x=x(t)=\cos t$, $y=y(t)=0$

$$a = z(\alpha) = z(2\pi) = \cos 2\pi = 1$$

$-1 \longleftarrow 1$

$$b = z(\beta) = z(3\pi) = \cos 3\pi = \cos(2\pi + \pi) = -1$$

ان الطريق هي القطعة المستقيمة الموجهة من $1 \longleftarrow -1$ وهي غير مغلقة وبسيطة ومحدودة.

(4) $z = z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [\pi, 4\pi]$

الحل :

$$z = z(t) = \cos t$$
$$x = x(t) = \cos t$$
$$y = y(t) = 0$$
$$a = z(\alpha) = z(\pi) = \cos \pi = -1$$
$$b = z(\beta) = z(4\pi) = \cos 4\pi = 1$$

ان الطريق لا هي القطعة المستقيمة الموجهة من $-1 \longrightarrow 1$ وهي غير مغلقة ومحدودة ولكنها غير بسيطة لأنها تتقاطع مع نفسها في جميع نقاطها فهي مكررة ثلاث مرات :

$$\gamma_1 = z_1(t) \quad ; \quad t \in [\pi, 2\pi]$$
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = z_1(\alpha) = z_1(\pi) = \cos \pi = -1 \\ b_1 = z_1(\beta) = z_1(2\pi) = \cos 2\pi = 1 \end{array}\right\} \gamma_1 : -1 \longrightarrow +1$$

$$\gamma_2 = z_2(t) \quad ; \quad t \in [2\pi, 3\pi]$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 = z_2(\alpha) = z_2(2\pi) = \cos 2\pi = 1 \\ b_2 = z_2(\beta) = z_2(3\pi) = \cos 3\pi = -1 \end{array}\right\} \gamma_2 : -1 \longleftarrow +1$$

$$\gamma_3 = z_3(t) \quad ; \quad t \in [3\pi, 4\pi]$$
$$\left.\begin{array}{l} a_3 = z_3(\alpha) = z_3(3\pi) = \cos 3\pi = -1 \\ b_3 = z_3(\beta) = z_3(4\pi) = \cos 4\pi = 1 \end{array}\right\} \gamma_3 : -1 \longrightarrow +1$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

/ /

(5) $z = z(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, 3\pi]$

الحل:

$z = z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$

$x = x(t) = \cos t$

$y = y(t) = \sin t$

حذف الوسيط بالتربيع والجمع:

$x^2 + y^2 = 1$

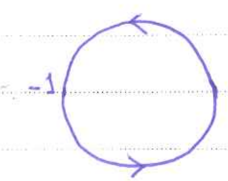
$a = z(\alpha) = z(0) = e^{i0} = 1$

$b = z(\beta) = z(3\pi) = e^{i(3\pi)} = -1$

الطريق γ هي دائرة الوحدة موجهة بعكس اتجاه عقارب الساعة

وهي مغلقة ومحدودة وغير بسيطة لأنها تتقاطع مع نفسها من

النصف العلوي مرتين



$\gamma_1 : z_1(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_2 : z_2(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [2\pi, 3\pi]$

---

(6) $z = z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [-\pi, \frac{3\pi}{2}]$

الحل:

$z = z(t) = \cos t$

$x = x(t) = \cos t$

$y = y(t) = 0$

$a = z(\alpha) = \cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$

$b = z(\beta) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$

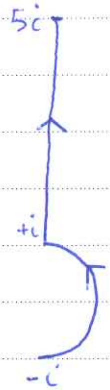
الطريق γ هو القطعة المستقيمة الموجهة من $-1 \to 0$

وهي غير مغلقة ومحدودة وبسيطة.

$$⑦ \quad z = z(t) = \begin{cases} e^{it} & ; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ (\frac{4t}{\pi} - 1)i & ; t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

الحل:

$$z = z(t) = \begin{cases} e^{it} = \cos t + i\sin t & ; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ (\frac{4t}{\pi} - 1)i & ; t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$



$$z = z(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \ , y(t) = \sin t \\ (\frac{4t}{\pi} - 1)i \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① & a = z(\alpha) = z(-\frac{\pi}{2}) = e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -i \\ & b = z(\beta) = z(\frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ ② & a = z(\alpha) = z(\frac{\pi}{2}) = (\frac{4\frac{\pi}{2}}{\pi} - 1)i = i \\ & b = z(\beta) = z(\frac{3\pi}{2}) = (\frac{4(\frac{3\pi}{2})}{\pi} - 1)i = 5i \end{cases}$$

بحذف الوسيط من معادلتي الفرع الأول نحصل على:

$$x^2 + y^2 = 1$$

ان الطريق γ هي النصف الأيمن من دائرة الوحدة موجهة بعكس اتجاه عقارب الساعة و القطعة المستقيمة الموجهة من $i \longrightarrow 5i$

ونلاحظ أن الطريق γ غير مغلقة و بسيطة ومحدودة.

صنف الطرق المتكافئة:

نقول عن الطريقين:

$$\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \longrightarrow \mathbb{C}$$

أنهما طريقان متكافئان ونكتب: $(\gamma_1 \sim \gamma_2)$ أو $(\gamma_1 \equiv \gamma_2)$، إذا وجد تابع مستمر ومتزايد تماماً:

$$\tau = \tau(t) : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow [\alpha_2, \beta_2] \quad ①$$

بحيث يكون: $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$ وذلك: $\forall t \in [\alpha_1, \beta_1]$

كما نقول في هذه الحالة أن الطريق γ_1 ناتج عن الطريق γ_2 بواسطة التحويل ①

وبسهولة يمكن التأكد من أن هذه العلاقة: $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ تحقق جميع خواص علاقة التكافؤ (انعكاسية - تناظرية - متعدية).
الجدير بالذكر أن صف الطرق المتكافئة والذي نرمز له بالرمز $\{\gamma_K\}$ هو صف غير منتهي وهذه الطرق المتكافئة تمثل هندسياً بمنحني واحد أو بمجموعة نقطية واحدة، وبناءً على ذلك يمكن أن نعرّف المنحني كما يلي:

تعريف المنحني:

نعرّف المنحني في المنطقة $G \subset \mathbb{C}$ على أنه التابع المستمر:

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

حيث: $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

إذا كان المشتق لهذا التابع: $\gamma'(t)$ موجوداً من أجل جميع قيم $t \in [a,b]$ وكان: $\gamma'(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ مستمراً أيضاً عندئذٍ يكون γ منحنياً أملس.

المنحني الأملس:

المنحني الأملس هو المنحني الذي يكون من أجله التابع $\gamma(t)$ قابلاً للاشتقاق ومشتقه $\gamma'(t)$ مستمراً.

المنحني الأملس تقطيعياً:

نقول عن $\gamma(t)$ أنه منحني أملس تقطيعياً إذا وجدت تجزئة للمجال المغلق $[a,b]$ على الشكل: $[a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b]$

بحيث يكون γ قابلاً للاشتقاق باستمرار على كل مجال جزئي $[t_{j-1}, t_j]$

حيث: $1 \leq j \leq n$.

الطريق الجورداني:

نقول عن الطريق $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ أنه جورداني إذا كان لامستمراً ومتبايناً.

الطريق القابل للإصلاح أو القياس:

نقول عن الطريق $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ أنه طريق قابل للإصلاح أو قابل للقياس بشرط لامنحني أملس جزئياً إذا كان $\gamma'(t)$ موجوداً في كل مكان من المجال $[a,b]$ وقابل للمكاملة إطلاقاً حسب مفهوم ليبيغ:

$$\int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$$

أي أن التكامل السابق موجود ومحدود وقيمته تساوي طول الطريق γ.
ومن الواضح أن كل طريق أملس جزئياً "تقطيعياً" هو طريق قابل للإصلاح

صف توابع C^1:

نقول عن التابع $\gamma(t)$ أنه ينتمي إلى صف التوابع C^1 إذا كان مستمراً وقابلاً للاشتقاق.

صف توابع C^n:

نقول عن التابع $\gamma(t)$ أنه ينتمي إلى صف التوابع C^n إذا كان مشتقه من المرتبة n مستمراً.

النقطة العادية:

إن النقطة العادية للطريق γ هي النقطة التي تكون فيها الطريق ملساء. أي هي تلك النقطة التي زاوية مماسيها من الجهتين تساوي $(\mp\pi)$.

النقطة الشاذة «الرأسية»

النقطة الشاذة أو الرأسية للطريق γ هي كل نقطة ليست عادية، وفي الحالة الخاصة: إذا كانت الزاوية في نقطة من طريق تساوي 0 أو 2π عندئذ ندعو تلك النقطة: النقطة التراجعية.

وعليه فإن النقاط الشاذة لطريق ما تشمل:

الطرفين - نقاط التقاطع - نقاط التماس - النقاط التراجعية.

مثال:

في المثال السابق رقم (4) حيث:

$$\gamma : z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [\pi, 4\pi]$$

إن كلاً من $t = 2\pi$ ، $t = 3\pi$ نقطتان تراجعيتان.

و γ هنا ليست طريق جورداني لأن:

$z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [\pi, 4\pi]$ ليس متبايناً.

مثال:

في المثال السابق رقم (1) حيث:

$$\gamma : z = z(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, \pi]$$

إن الطريق γ هو طريق جورداني لأنه مستمر ومتباين.

مثال:

$$\gamma : z = z(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

إن الطريق γ هو طريق جورداني لأنه مستمر ومتباين وهو مغلق

مثال:

$$\gamma : z = z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [2\pi, 3\pi]$$

إن الطريق γ ليس جوردانياً لأنه غير متباين.

مثال:

$$\gamma : z = z(t) = \begin{cases} e^{it} & ; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ (\frac{4t}{\pi} - 1)i & ; t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

ان الطريق γ هو طريق أملس جزئياً والنقطة $z = i$ هي نقطة شاذة.

مثال:

لتكن لدينا الطرق التالية:

$$\gamma_1(t) = t \quad ; \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = \sin t \quad ; \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\gamma_3(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\gamma_4(t) = \sin t \quad ; \quad t \in [0, \pi]$$

بالتعويض نجد أن:

الطريق γ_1 هي القطعة المستقيمة الموجهة من $0 \leftarrow 1$ وهي

الطريق γ_2 هي القطعة المستقيمة الموجهة من $0 \leftarrow 1$

الطريق γ_3 هي القطعة المستقيمة الموجهة من $1 \leftarrow 0$

الطريق γ_4 هي القطعة المستقيمة الموجهة ذهاباً من $0 \leftarrow 1$ وإياباً من $1 \leftarrow 0$

نلاحظ أن مجموعة قيم الطرق في الحالات جميعها هي مجموعة واحدة وهي المجال المغلق $[0,1]$.

ان الطريقان γ_1، γ_2 متكافئان ونكتب: $\gamma_1 \equiv \gamma_2$

ان الطرق γ_3، γ_4 غير متكافئة وكذلك (γ_1, γ_3)، (γ_1, γ_4)، (γ_2, γ_3)، (γ_2, γ_4) أيضاً غير متكافئة.

إن الطرق: γ_1، γ_2، γ_3 هي طرق جوردانية.

ان الطريق γ_4 ليس طريقاً جوردانياً لأنه غير مستمر. ونلاحظ أن له نقطة تراجع هي النقطة: $\gamma_4(\frac{\pi}{2}) = 0$.

/ /

مثال:

$$\gamma(t) = e^{it} + \cos 2t \quad ; \quad t \in [0, \pi]$$

إن الطريق γ هو طريق مغلق حيث:

$$\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t + \cos 2t$$

$$\gamma(t) = \cos t + \cos 2t + i\sin t$$

① $x = x(t) = \cos t + \cos 2t = \cos t + 2\cos^2 t - 1$

② $y = y(t) = \sin t$

بتربيع ② ومضاعفتها وجمعها مع ① نحصل على:

$$x + 2y^2 = \cos t + \underline{2\cos^2 t} - 1 + \underline{2\sin^2 t}$$

$$x + 2y^2 = \cos t + 1$$

$$\Rightarrow \cos t = x + 2y^2 - 1$$

بالتربيع و الجمع مع مربع ② نحصل على المعادلة الديكارتية للطريق γ وهي:

$$y^2 + [(x-1) + 2y^2]^2 = 1$$

إن الطريق γ هو طريق مغلق وأملس إلا أنه ليس جوردانياً.

مثال:

$$\gamma(t) = t^2(t+i) \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

إن الطريق γ هو منحني جورداني لأنه مستمر ومتباين وهو قابل للاشتقاق فهو طريق قابل للإصلاح و القياس. وهو أملس جزئياً.

مثال: $\gamma(t) = t(1 + i\sin\frac{1}{t}) \quad ; \quad t \in [-\frac{1}{\pi}, +\frac{1}{\pi}]$

إن الطريق γ هو منحني جورداني لأنه مستمر ومتباين ولكنه غير قابل للإصلاح فهو ليس أملس جزئياً. فالتابع يفقد قابليته للاشتقاق عند $t = 0$

ملاحظة هامة:

بالنسبة للمنحني الأملس جزئياً يشترط لتوابع التحويل (1) أن تكون مستمرة في كل مكان باستثناء عدد منته من النقاط، ومشتقاتها موجبة ومستمرة.

أما بالنسبة للمنحني القابل للإصلاح «القابل للقياس» فيشترط لتوابع التحويل (1) أن تكون متزايدة ومستمرة إطلاقاً.

مبرهنة:

إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون الطريق γ قابلاً للإصلاح هو أن يكون: $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ ذو تغيرات محدودة.

أي أن تابعيه: $x(t)$ ، $y(t)$ ذوي تغيرات محدودة وأن يكون التابع المركب: $\gamma[t(\tau)]$ ذو تغيرات محدودة أيضاً حيث $t(\tau)$ مستمر إطلاقاً.

تابع التغير المحدود:

تعريف:

نقول عن تابع: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ أنه ذو تغير محدود إذا وجد ثابت موجب $m\geq 0$ على نحو تتحقق فيه المتراجحة التالية:

وذلك من أجل كل تجزئة P للمجال المغلق $[a,b]$:

$$P=\{a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b\}$$

وبحيث يكون:

$$\omega(\gamma,P)=\sum_{K=0}^{n}|\gamma(t_K)-\gamma(t_{K-1})|\leq M$$

يمثل المجموع لتجزئة.

التغير الكلي للطريق:

نعرف التغير الكلي للطريق γ والذي نرمز له بالرمز $V(\gamma)$ على الشكل:

$$V(\gamma) = \sup \{ \sigma(\gamma, P) \; ; \; [a,b] \text{ تجزئة } P \}$$

وبشرط: $V(\gamma) \leq M < \infty$

ومن السهل علينا إثبات أنه كي يكون الطريق γ ذو تغير محدود يلزم ويكفي أن يكون كل من القسمين الحقيقي والتخيلي: $x(t), y(t)$ ذو تغير محدود.

كما يسهل علينا كذلك أن نرى أنه إذا كان γ ذو قيم حقيقية وغير تناقصي فإنه ذو تغير محدود دوماً ويكون:

$$V(\gamma) = \gamma(b) - \gamma(a)$$

ومما سبق نستطيع صياغة تعريف المنحني بشكله النهائي مع ملاحظة أنه يوجد أكثر من مفهوم للمنحني في المستوي المركب $\mathbb{C}$ ولكننا سنعتمد التعريف التالي:

المنحني في المستوي المركب $\mathbb{C}$:

هو اتحاد عدد منتهي من الطرق المغلقة وغير المغلقة γ_k حيث $k=1,2,\dots,n$ وقد تكون هذه الطرق متقاطعة أو غير متقاطعة وقد تكون محدودة أو غير محدودة.

نتائج:

1. كل طريق هو منحني فيها $k=1$ ولهذا نستغني عن كلمة طريق ونستبدلها بكلمة منحني.
2. يتحدد اتجاه المنحني γ من اتجاه الطرق γ_k المشكّلة له.
3. يمكن لنقطة واحدة أو أكثر أن تقع على أكثر من طريق واحدة في آن معاً وذلك في حال كانت نقاط تقاطع أو تماس ~~[illegible]~~ لطرق.
4. النقاط المعزولة والقطوع هي من أنواع الطرق γ_k.

المنحني المقيس:

تعريف:

نقول عن منحني γ أنه منحني مقيس أو اختصاراً طريق إذا كان γ ذو تغير محدود.

إن قولنا عن γ أنه منحني مقيس يعني أن له طولاً محدوداً ونرمز لطوله بالرمز $\mathcal{L}(\gamma)$

مبرهنة:

إذا كان: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ طريقاً قابلاً للاشتقاق باستمرار عندئذ γ منحني مقيس وطوله يعطى بالعلاقة:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \cdot dt$$

المحاضرة الثالثة عشرة — الأربعاء 27/11/2012

التكامل المحدد:

تعريف:

نصادف عملية المكاملة بشكلين مختلفين الأول منهما باعتبارها العملية المعاكسة للتفاضل والثاني باعتبارها نهاية مجموع.

وهذا الشكل الثاني هو الأهم في الفيزياء والرياضيات والهندسة وهو ما يسمى «تعريف ريمان للتكامل» ونرمز لهذا التكامل بالرمز: $\int_a^b f(z) \cdot dz$

مبرهنة (1):

إذا كان: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ طريقاً و $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً عندئذ التابع f قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$.

/ /

مبرهنة (2):

إذا كان لدينا γ طريق أملس تقطيعياً ((قد-كون تجزئة للمجال)):

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

وكان لدينا التابع المستمر: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

عندئذٍ يكون:

$$\int_a^b f(t) \cdot d\gamma = \int_a^b f(t) \cdot \gamma' \cdot dt$$

تعريف:

إذا كان: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ طريقاً و $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعاً

وكانت $[a,b] \subseteq E \subseteq \mathbb{C}$ مجموعة متراصة.

عندئذٍ يكون $f \circ \gamma$ مستمراً على المجال $[a,b]$ وفي هذه الحالة

نسمي التكامل: $\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t)$ بالتكامل المحني على

الطريق γ ونكتب:

$$\int_\gamma f(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t) = \int_\gamma f(z) \cdot dz$$

مبرهنة (3):

لتكن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ولتكن γ طريقاً في G بدايته α ونهايته β، وليكن: $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً له تابع أصلي،

$f = F'$ حيث: $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ عندئذٍ:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

مبرهنة (4): ((هامة)):

لتكن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ولتكن γ طريقاً في G بدايته α ونهايته β.

وليكن: $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً فإذا كان γ طريقاً منحنياً

مغلقاً عندئذٍ:

$$\int_\gamma f = 0$$

أو بموضوع المبرهنة السابقة بكلمات أخرى: التكامل لتابع مستمر على طريق منحنٍ مغلق ~~بسيط~~ هو تكامل معدوم.

مبرهنة (5):

ان المنحني الممثل للطريق $(\bar{\gamma})$ لا يختلف عن المنحني الممثل للطريق (γ) سوى في الجهة. $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$ وذلك من أجل $-b \leq t \leq -a$

ويكون عندئذ:

$$\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f \quad \text{أو} \quad \int_{\gamma} f + \int_{-\gamma} f = 0$$

بعبارة أخرى إذا كاملنا على قطعة طريق ذهاباً وإياباً فإن قيمة التكامل الناتجة معدومة.

مبرهنة (6): «تقدير التكامل»

من أجل كل تابع مستمر f على طريق أملس جزئياً: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

عندئذ يكون: $\left| \int_{\gamma} f(z) \cdot dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| \cdot |d\gamma|$

حيث:

$$|d\gamma| = |\gamma'(t)| \cdot dt$$

مبرهنة (7):

إذا كان γ، γ' طريقان متتاليان: «نهاية الأول هي بداية الثاني». عندئذ يكون:

$$\int_{\gamma} f + \int_{\gamma'} f = \int_{\gamma+\gamma'} f$$

بعبارة أخرى:

«مجموع تكاملي تابع f على طريقين متتاليين أو قطعتين متتاليتين من طريق يساوي قيمة التكامل لهذا التابع على الطريق المكون من اتحاد هذين الطريقين»

Tough times don't last... Tough people do...

مبرهنة (8):

بفرض $\alpha = constant$ «ثابت» $\in \mathbb{C}$ عندئذ:

$$\int_\gamma \alpha . f = \alpha \int_\gamma f$$

ومن أجل f_1 , f_2 تابعين:

$$\int_\gamma (f_1 + f_2) = \int_\gamma f_1 + \int_\gamma f_2$$

مبرهنة (9):

إذا كان $f(z)$ تابعاً محدوداً حيث: $|f(z)| \leq M$ عندما تقع z

على الطريق γ . وكان طول الطريق γ يساوي L عندئذ:

$$\left|\int_\gamma f(z) . dz\right| \leq L . M$$

تمارين ومسائل:

مثال (1):

بفرض أن: $f(z) = \frac{1}{z}$ وكان الطريق γ هو الدائرة،

$$z = z(t) = \cos t + i \sin t \qquad ; -\pi \leq t \leq +\pi$$

علماً أن الطريق يبدأ من $z=-1$ ويسير في الاتجاه الموجب ليعود إلى

النقطة نفسها . المطلوب: احسب $\int_a^b f . d\gamma$

الحل:

$$\int_a^b f . d\gamma = \int_a^b f(t) . \gamma'(t) . dt$$

$$\gamma : z = \cos t + i \sin t$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \; , \; f(t) = \frac{1}{\cos t + i \sin t}$$

$$f(t) = \frac{\cos t - i \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos t - i \sin t$$

$$\gamma'(t) = -\sin t + i \cos t$$

$$\int_a^b f . d\gamma = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) . \gamma'(t) . dt$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t) . dt$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} (-\sin t \cancel{\cos t} + i\cos^2 t + i\sin^2 t + \sin t \cancel{\cos t}) \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \cdot d\gamma = \int_{-\pi}^{+\pi} i \cdot dt = [it]_{-\pi}^{+\pi} = 2i\pi$$

مثال (2):

ليكن لدينا التابع: $f(z) = \Re e\, z$ ولتكن الطريق γ هي القطعة المستقيمة

من $z=0 \longrightarrow z = 1+i$

ونعبّر عنها على الشكل:

$$\gamma:\ z = z(t) = (1+i)t \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1$$

أحسب التكامل: $I = \int_\gamma f(z) \cdot dz$

الحل:

$$z = z(t) = (1+i)t = t + it$$

$$d(z) = (1+i) \cdot dt$$

$$f(z) = \Re e\, z = t$$

$$I = \int_\gamma f(z) \cdot dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) \cdot dt$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}(1+i)\, t^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}(1+i)$$

مثال (3):

احسب التكامل: $I = \int_\gamma (z^2 + z \cdot \bar{z}) \cdot dz$ حيث γ هي قوس

الدائرة: $|z| = 1$ وحيث $0 \leq \arg z \leq \pi$

الحل:

$$\gamma:\ |z| = 1 \Leftrightarrow z = e^{i\theta} \ ; \ 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$dz = i e^{i\theta} d\theta, \ \bar{z} = e^{-i\theta}, \ z^2 = e^{2i\theta}$$

$$I = \int_\gamma (z^2 + z \cdot \bar{z}) \cdot dz = \int_0^\pi (e^{2i\theta} + e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}) \cdot i e^{i\theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^\pi (e^{2i\theta} + 1)\, i \cdot e^{i\theta} \cdot d\theta = \int_0^\pi (e^{3i\theta} + i e^{i\theta}) \cdot d\theta$$

$$= \int_0^\pi i e^{3i\theta} \cdot d\theta + \int_0^\pi i e^{i\theta} \cdot d\theta$$

$$\Longrightarrow I = \left[\frac{1}{3i} e^{3i\theta}\right]_0^{\pi} + \left[e^{i\theta}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3i} e^{i(3\pi)} - \frac{1}{3i} e^{0} + e^{i\pi} - e^{0}$$

$$= \frac{1}{3i}\left[\cos 3\pi + i \sin 3\pi\right] - \frac{1}{3i} + \left[\cos\pi + i\sin\pi\right] - 1$$

$$= \frac{1}{3i}\left[-1\right] - \frac{1}{3i} + \left[-1\right] - 1 = -\frac{1}{3i} - \frac{1}{3i} - 2$$

$$\Longrightarrow I = -\frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{8}{3}$$

مثال (4):

احسب التكامل: $\int_{\gamma} \frac{\ln^3 z}{z} . dz$ حيث γ هي قوس الدائرة: $|z|=1$ الواصل بين نقطتين 1 ، i وكذلك $\ln z$ هو التعيين الرئيسي للتابع اللوغاريتمي والذي من أجله يكون $\ln 1 = 0$

الحل:

إن التابع مستكمل تحليلياً على الطريق γ حيث النقطة $z=0$ التي تعدم المقام لا تنتمي إلى قوس الدائرة المشكلة للطريق γ.

$$|z| = 1 \Longleftrightarrow z = e^{i\theta}$$

$$dz = i e^{i\theta} . d\theta$$

الطريق واصل بين
$$z_1 = 1 \Leftarrow z_1 = \cos 0 + i \sin 0$$
$$z_2 = i \Leftarrow z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_{\gamma} \frac{\ln^3 z}{z} . dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{i\theta}} . \ln^3 e^{i\theta} . i e^{i\theta} . d\theta$$

$$\ln z = \ln e^{i\theta} = \ln|e^{i\theta}| + i(\theta + 2\pi K)$$

وبما أن الفرض أن $\ln z$ هو التعيين الرئيسي إذاً $K=0$.

$$\Longrightarrow \ln z = \ln e^{i\theta} = i\theta \Longleftrightarrow \ln^3 z = (i\theta)^3$$

نعوض في التكامل:

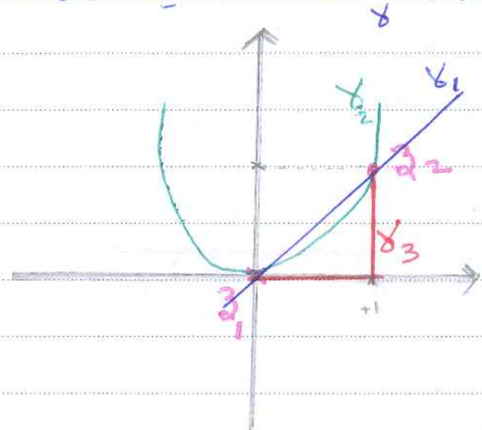
$$\Longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cancel{e^{-i\theta}} . (i\theta)^3 . i \cancel{e^{i\theta}} . d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-i\theta)^3 (i) \cdot d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^3 \cdot d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{4}\theta^4\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - 0 = \frac{\pi^4}{64}$$

مثال (5):

أحسب التكامل: $\int_{\gamma} (1+i-2z) \cdot dz$ على طول المنحنيات الواصلة بين النقطتين $z_1 = 0$ ، $z_2 = 1+i$



الحل:

لاحظ أن هناك 3 أنواع من الطرق التي قد تمر من النقطتين z_1 ، z_2

المنحنى الأول:

γ_1: المستقيم الواصل بين z_1 ، z_2

إن هذا المستقيم ميله:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

وهو مار من المبدأ إذاً:

$$\gamma_1: \quad y = x$$

$$z = x + iy = x + ix = x(1+i)$$

$$dz = (1+i) \cdot dx$$

$$\int_{\gamma_1} (1+i-2z) \cdot dz = \int_0^1 (1+i-2x(1+i)) \cdot (1+i) \cdot dx$$

$$= \int_0^1 (1+i-2x-2ix)(1+i) \cdot dx$$

$$= \int_0^1 \cancel{1}+i+i\cancel{-1}-\cancel{2x}-2ix-2ix+\cancel{2x} \cdot dx$$

$$= \int_0^1 2i - 4ix \cdot dx = \left[2ix - 2ix^2\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma_1} = 2i}$$

المنحنى الثاني:

γ_2: القطع المكافئ الذي ذروته $z_1(0,0)$ ويمر من $z_2(1,1)$ ومعادلته:

$$y = x^2$$

$$z = x + iy = x + ix^2$$

$$dz = (1 + 2ix)\cdot dx \ , \quad \bar{z} = x - ix^2$$

$$\int_{\gamma_2} (1 + i - 2\bar{z})\cdot dz = \int_0^1 (1 + i - 2x + 2ix^2)(1 + 2ix)\cdot dx$$

$$= \int_0^1 (1 + 2ix + i - 2x - 2x - 4ix^2 + 2ix^2 + 4x^3)\cdot dx$$

$$= \int_0^1 (1 + i + 2ix - 4x - 2ix^2 + 4x^3)\cdot dx$$

$$= \left[x + ix + ix^2 - 2x^2 - \frac{2}{3}ix^3 + x^4\right]_0^1$$

$$= 1 + \cancel{i} + \cancel{i} - 2 - \frac{2}{3}i + 1 = 2i - \frac{2}{3}i - 2 = \frac{4}{3}i - 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma_2} = \frac{4}{3}i - 2}$$

المنحنى الثالث :

γ_3: الخط المنكسر $z_1 z_3 z_2$ حيث $z_3(1,0)$

والتكامل على γ_3 هو تكامل على قطعتين مستقيمتين عن طريق ..

القطعة الأولى : $z_1 z_3$ وهي المستقيم الذي معادلته $y = 0$

حيث $y_1 = y_3 = 0$

$$\Rightarrow z = x = \bar{z}$$

$$dz = dx$$

والقطعة الثانية : $z_3 z_2$ وهي المستقيم الذي معادلته $x = 1$

حيث $x_3 = x_2 = 1$

$$z = 1 + iy \Rightarrow dz = i\cdot dy$$

$$\bar{z} = 1 - iy$$

وبهذا يكون :

$$\int_{\gamma_3} = \int_0^1 z_1 z_3 \cdot dz + \int_0^1 z_3 z_2 \cdot dz$$

$$= \int_0^1 (1 + i - 2x)\cdot dx + \int_0^1 (1 + i - 2 + 2iy)\cdot i \cdot dy$$

$$= \int_0^1 (1 + i - 2x)\cdot dx + \int_0^1 (-i - 1 - 2y)\cdot dy$$

$$= \left[x + ix - x^2\right]_0^1 + \left[-iy - y - y^2\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} = \cancel{1} + i - \cancel{1} + [-i-1-1]$$
$$= i - i - 2$$
$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma_3} = -2}$$

تمارين وظيفة :

[1] أحسب التكامل، $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ حيث γ هو قوس الدائرة : $|z|=1$ الواقع في نصف المستوي العلوي و $\sqrt{z}$ هو الفرع الذي من أجله يكون $\sqrt{1} = -1$.

الحل :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

إن γ هو قوس الدائرة $|z|=1$ أي معادلة الطريق هي ،

$$\gamma : z = z(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ولنوجد الآن θ التي تحقق الفرع الذي من أجله : $\sqrt{1} = -1$

$$(1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = \sqrt{\cos 0 + i\sin 0}$$

$$z_k = (r)^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right]$$

حيث $n=2$ ، $k=0,1$ ، $r=1$ ، $\theta = 0$

مرفوض $K_0 = (1)^{\frac{1}{2}}[\cos 0 + i\sin 0] = 1$

مقبول $K_1 = (1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2}\right] = -1$

إذا : $0 \leq \theta \leq \pi$

$$z = [\cos\theta + i\sin\theta] = e^{i\theta}$$

$$dz = i e^{i\theta} \cdot d\theta$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{e^{i\theta}}$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{i \cdot e^{i\theta}}{\sqrt{e^{i\theta}}} \cdot d\theta = 2\int_0^{\pi} \frac{i e^{i\theta}}{2\sqrt{e^{i\theta}}} \cdot d\theta$$

$$= 2\left[\sqrt{e^{i\theta}}\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\left[(e^{i\theta})^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} = 2\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}$$

/ /

وحسب قانون دو مرفان لدينا :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} = 2\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] - 2\left[\cos 0 + i\sin 0\right]$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} = 2i - 2$$

$\boxed{2}$ أحسب التكامل :

$\int_0^{1+i} z^2 \cdot dz$ في الحالتين التاليتين :

(أ) المستقيم الواصل بين النقطتين : $M_0(0,0)$ ، $M_1(1,1)$

(ب) المستقيم الواصل بين النقطتين $M_0(0,0)$ ، $M_2(1,0)$

(ج) والمستقيم المحدود بالنقطتين $M_2(1,0)$ ، $M_1(1,1)$

الحل :

(أ) $\int_0^{1+i} z^2 \cdot dz$

نلاحظ أن المستقيم الواصل بين : $M_0(0,0)$ ، $M_1(1,1)$

هو المستقيم الذي معادلته : $y = x$

$$z = x + iy = x + ix = (1+i)x$$

$$dz = (1+i) \cdot dx$$

$$z^2 = 2ix^2$$

حدود التكامل من $x = 0 \longrightarrow x = 1$

$$\int_0^{1+i} z^2 \cdot dz = \int_0^1 (2ix^2) \cdot (1+i) \cdot dx$$

$$= \int_0^1 (2ix^2 - 2x^2) \cdot dx = \left[\frac{2i}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2i}{3}(1) - \frac{2}{3}(1) - 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{1+i} z^2 \cdot dz = \frac{2i}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{1+i} z^2 \cdot dz$$

(ب) حيث لا هي الخط المنكسر من $M_0(0,0) \longrightarrow M_2(1,0) \longrightarrow M_1(1,1)$

$$\Longrightarrow \int_\gamma = \int M_0M_2 + \int M_2M_1$$

(أ) إن المستقيم الواصل بين النقطتين M_0 ، M_2 هو المستقيم الذي معادلته $y=0$

$$z = x \Longleftrightarrow z^2 = x^2$$

$$dz = dx$$

وحدود التكامل من $x=0 \longrightarrow x=1$

(ب) المستقيم الواصل بين النقطتين M_2 ، M_1 هو المستقيم الذي معادلته $x=1$

$$z = 1+iy \Rightarrow dz = i \cdot dy$$

$$z^2 = 1 - y^2 + 2iy$$

وحدود التكامل من $y=0 \longrightarrow y=1$

إذاً:

$$\int_0^{1+i} z^2 \cdot dz = \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_0^1 (1-y^2+2iy)(i \cdot dy)$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_0^1 (i - iy^2 - 2y) \cdot dy$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[iy - \frac{i}{3}y^3 - y^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}(1) - 0 + i - \frac{i}{3} - 1 - 0 = \frac{1}{3} + \frac{2i}{3} - 1$$

$$\Longrightarrow \int_0^{1+i} z^2 \cdot dz = \frac{2i}{3} - \frac{2}{3}$$

ملاحظة:

نلاحظ أن ناتج التكامل (أ) الذي حسبناه مباشرة من معادلة المستقيم $y=x$ يساوي ناتج التكامل (ب) الذي حسبناه بالتجزئة.

/ /

$\boxed{3}$ أحسب التكامل: $\int_{\gamma} \bar{z} \cdot dz$

في الحالات التالية:

(أ) γ_1 هو المستقيم $y = \frac{x}{3}$ من النقطة $z=0 \longrightarrow z=3+i$

(ب) γ_2 هو المستقيم الواصل بين $z=0 \longrightarrow z=3$

(ج) γ_3 هو المستقيم الواصل بين $z=3 \longrightarrow z=3+i$

الحل:

(أ)

$$\int_{\gamma_1} \bar{z} \cdot dz$$

$$\gamma_1 : y = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$$

$$z = x + iy = x + \frac{1}{3}ix = x\left(1 + \frac{1}{3}i\right)$$

$$dz = \left(1 + \frac{1}{3}i\right) \cdot dx$$

$$\bar{z} = x - iy = x - \frac{1}{3}ix$$

وحدود التكامل من $x=0 \longrightarrow x=3$

$$\int_{\gamma_1} \bar{z} \cdot dz = \int_0^3 \left(x - \frac{1}{3}ix\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}i\right) \cdot dx$$

$$= \int_0^3 \left(x + \cancel{\frac{1}{3}ix} - \cancel{\frac{1}{3}ix} + \frac{1}{9}x\right) \cdot dx$$

$$= \int_0^3 \frac{10}{9}x \cdot dx = \left[\frac{5}{9}x^2\right]_0^3$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma} \bar{z} \cdot dz = \frac{5}{9}(9) - 0 = 5$$

(ب)

$$\int_{\gamma_2} \bar{z} \cdot dz$$

γ_2 هو المستقيم الواصل بين $z=0 \longrightarrow z=3$ وهو المستقيم الذي معادلته: $y=0$

$$z = x \Longleftrightarrow dz = dx$$

$$\bar{z} = x$$

$$\int_{\gamma_2} \bar{z} \cdot dz = \int_0^3 x \cdot dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_2} \bar{z} \cdot dz = \frac{1}{2}(9) = \frac{9}{2}$$

/ /

(ح) $\int_{\gamma_3} \bar{z} \cdot dz$

γ_3 هو المستقيم الواصل بين $z = 3 \longrightarrow z = 3 + i$

وهو المستقيم الذي معادلته: $x = 3$

$$z = 3 + iy$$
$$\bar{z} = 3 - iy$$
$$dz = i \cdot dy$$

وحدود التكامل من $y = 0 \longrightarrow y = 1$

$$\int_{\gamma_3} \bar{z} \cdot dz = \int_0^1 (3 - iy)(i) \cdot dy = \int_0^1 (3i + y) \cdot dy$$
$$= \left[3iy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = 3i + \frac{1}{2}$$

2012/2/2 الإثنين — المحاضرة الرابعة عشرة

تمارين:

$\boxed{1}$ أحسب التكامل $\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$ حيث γ هو قوس الدائرة $|z| = 1$

و $\sqrt{z}$ هو الفرع الذي من أجله يكون $\sqrt{1} = -1$

الحل:

"طريقة ثانية والطريقة المحلولة سابقاً صحيحة أيضاً"

$$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right]$$

$$K = 0 \Rightarrow \sqrt{z} = (1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right] = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$$

$$K = 1 \Rightarrow \sqrt{z} = (1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$$
$$= -\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}$$

~~$(1)^{\frac{1}{2}}[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}]$~~

وبما أن المطلوب هو $\sqrt{z} = -1$ إذاً حدود التكامل من $1 \longrightarrow -1$

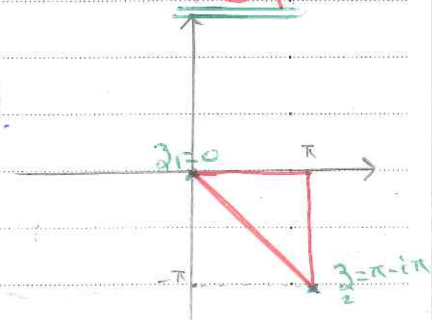
بعكس اتجاه عقارب الساعة

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{2\sqrt{z}} = 2\left[\sqrt{z}\right]_{+1}^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\left[\sqrt{-1} - \sqrt{1}\right]$$

$\boxed{2}$ احسب التكامل: $\int_\gamma e^{\bar{z}} . dz$ حيث γ هو المستقيم $y=-x$ الواصل بين $z_1=0$ ، $z_2=\pi-i\pi$

الحل:



$$\int_\gamma e^{\bar{z}} . dz$$

نجري التكامل أولاً على المستقيم γ_1 الواصل بين

$$z_1=0 \ ، \ z_3=\pi$$

ثم نجري تكاملاً ثانياً على المستقيم γ_2 الواصل بين

$z_3=\pi$ ، $z_2=\pi-i\pi$ ويكون:

$$\int_\gamma e^{\bar{z}} . dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

$\gamma_1 :$ $y=0$

$$z=x \ , \ \bar{z}=x$$

$$dz=dx$$

وحدود التكامل من $x=0 \longleftarrow x=\pi$

$$\int_{\gamma_1} e^{\bar{z}} . dz = \int_0^\pi e^x . dx = \left[e^x\right]_0^\pi = e^\pi - 1$$

$\gamma_2 :$ $x=\pi$

$$z=\pi+iy$$

$$\bar{z}=\pi-iy$$

$$dz=i.dy$$

وحدود التكامل من $y=0 \longleftarrow y=-\pi$

$$\int_{\gamma_2} e^{\bar{z}} . dz = \int_0^{-\pi} e^{\pi-iy} . i . dy = -\int_0^{-\pi} -i . e^{\pi-iy} . dy$$

$$= -\left[e^{\pi-iy}\right]_0^{-\pi} = -e^{\pi+i\pi} + e^{\pi}$$

$$= e^\pi\left[1 - e^{i\pi}\right] = e^\pi\left[1 - \cos\pi - i\sin\pi\right]$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_2} = e^{\pi}\left[1-(-1)-0\right] = e^{\pi}\left[1+1\right]$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_2} = 2e^{\pi}$$

وبهذا يكون التكامل المطلوب:

$$\int_{\gamma} e^{z}.dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = e^{\pi} - 1 + 2e^{\pi} = 3e^{\pi} - 1$$

$\boxed{3}$ أوجد التكامل: $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z).dz$

الحل:

γ: هي الطريق الواصل بين النقطتين $z_1 = 1-i \longleftarrow z_2 = 2+i$

$z_1(1,-1)$ ، $z_2(2,1)$

المستقيم الواصل بين z_1 ، z_2 ميله:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-1)}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

ومعادلته: $y = mx + p$

$$y = 2x + p$$

$$-1 = 2(1) + p \Longleftrightarrow \boxed{p = -3}$$

إذاً معادلة γ هي:

$$\gamma : \boxed{y = 2x - 3}$$

$$z = x + iy$$

$$\boxed{z = x + i(2x-3)}$$

$$z^2 = x^2 - (2x-3)^2 + 2ix(2x-3)$$

$$z^2 = x^2 - 4x^2 + 12x - 9 + 4ix^2 - 6ix$$

$$\Longrightarrow \boxed{z^2 = -3x^2 + 4ix^2 + 12x - 6ix - 9}$$

$$z = x + 2ix - 3i$$

$$dz = (1+2i).dx$$

وحدود التكامل من $x = 1 \longleftarrow x = 2$

$$\Longleftrightarrow \int_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z).dz = \int_1^2 (-9x^2 + 12ix^2 + 36x - 18ix - 27i$$

/ /

$$\Rightarrow \int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\cdot dz = \int_1^2(-9x^2+36x-27+12ix^2-18ix+2x+4ix-6i)\cdot d(x+2i)\cdot dx$$

$$= \int_1^2(-33x^2-6ix^2+62ix+66x-15-60i)\cdot dx$$

$$= \left[-11x^3-2ix^3+31ix^2+33x^2-15x-60ix\right]_1^2$$

$$= -12i+14+31i-7$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\cdot dz = 19i+7}$$

4 أوجد التكامل على γ حيث: $f(z)=e^{iz}$

$$\int_\gamma f(z)\cdot dz$$

والطريق γ هو الخطين المستقيمين من: $z_1=0$ ← $z_2=2+\pi i$

ومن $z_2=2+\pi i$ ← $z_3=2$

الحل:

$$\int_\gamma f(z)\cdot dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

حيث:

γ_1: المستقيم الواصل بين $z_1=0$ و $z_2=2+\pi i$

حيث ميله: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\pi}{2}$

ومعادلته: γ_2: $\boxed{y=\frac{\pi}{2}x}$

وحدود التكامل هي من $x=0$ ← $x=2$

$$z=x+iy = x+i\frac{\pi}{2}x = x\left(1+i\frac{\pi}{2}\right)$$

$$dz=\left(1+i\frac{\pi}{2}\right)\cdot dx$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\cdot dz = \int_0^2 e^{(1+i\frac{\pi}{2})x}\cdot\left(1+i\frac{\pi}{2}\right)\cdot dx = \left[e^{(1+i\frac{\pi}{2})x}\right]_0^1$$

γ_2: المستقيم الواصل بين: $z_2=2+\pi i$ ، $z_3=2$

وهو مستقيم معادلته: $x=2$

$$z=2+iy \Rightarrow dz=i\cdot dy$$

وحدود التكامل هنا: $y=\pi$ ← $y=0$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\cdot dz = \int_{\pi}^{0} e^{2+iy} \cdot i \cdot dy = \left[e^{2+iy} \right]_{\pi}^{0}$$

وبهذا يكون:

$$\int_{\gamma} f(z)\cdot dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$
$$= \left[e^{(1+i\frac{\pi}{2})x} \right]_0^2 + \left[e^{2+iy} \right]_{\pi}^{0}$$
$$= e^{1+i\frac{\pi}{2}} - e^{0} + e^{2} - e^{2+i\pi}$$
$$= e\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] - 1 + e^{2} - e^{2}\left[\cos\pi + i\sin\pi\right]$$
$$= e(0+i) - 1 + e^{2} - e^{2}[-1+0]$$
$$\Rightarrow \int_{\gamma} = ie - 1 + e^{2} + e^{2} = 2e^{2} + ie - 1$$

$\boxed{5}$ أحسب التكامل $\int_C f(z)\cdot dz$ حيث: $f(z)=z$ و $C: |z|=1$ هي دائرة الوحدة.

الحل:

نلاحظ أن $f(z)=z$ هو تابع مستمر والطريق، $C: |z|=1$

هو طريق مغلق إذاً حسب المبرهنة يكون تكامل التابع المستمر على هذا الطريق معدوماً أي:

$$\int_C f(z)\cdot dz = 0$$

ويمكن إثبات هذه المبرهنة بحساب التكامل خطوة خطوة كما يلي:

$$C: |z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$$

$$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta \Leftarrow z = \cos\theta + i\sin\theta \;;\; 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\int_C f(z)\cdot dz = \int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta)(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin\theta\cos\theta + i\cos^2\theta - i\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (i[\cos^2\theta - \sin^2\theta] - 2\sin\theta\cos\theta)\cdot d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (i\cos 2\theta - \sin 2\theta)\cdot d\theta$$
$$= \left[\frac{i}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right]_0^{2\pi} = 0$$