الفصل الرابع:

تماثل المجموعات المرتبة

4-1- تمهيد:

نعلم أنه إذا كان $f:(G_1,*_1)\rightarrow(G_2,*_2)$ تشاكل زمري و تقابل فإن تقابله العكسي تشاكل زمري أيضاً وفي هذه الحالة دعونا f تماثل زمري.

كما نعلم أنه في التحليل الرياضي إذا كان تابع ما $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ تقابل و من الصف C^1 فليس من الضروري أن يكون تقابله العكسي من الصف C^1 ، مثال ذلك التابع $f(x)=x^3$.

و السؤال البديهي الآن: إذا كان التابع $f:(A,\leq_1)\rightarrow(B,\leq_2)$ تقابل ومتزايد، فهل هذا سيقتضي أن تقابله العكسي متزايد أيضاً؟

الجواب: لا، ليس بالضرورة، و المثال التالي يبين ذلك

4-1-1. مثال:

لتكن المجموعتين المرتبتين $(A,\leq_1),(B,\leq_2)$ حيث

$$A=\{1,2,3\}\quad:\quad 1\leq_1 3\quad\wedge\quad 2\leq_1 3$$

$$B=\{a,b,c\}\quad:\quad a\leq_2 b\leq_2 c$$

وليكن التابع

$$f:(A,\leq_1)\rightarrow(B,\leq_2)\ ;\quad f(1)=a,\qquad f(2)=b,\qquad f(3)=c$$

عندئذٍ فإنه يمكن بسهولة للقارئ أن يتحقق أن f تقابل ومتزايد لكن f^{-1} غير متزايد.

4-2- التماثل بين مجموعتين مرتبتين:

4-2-1. تعريف:

لتكن $(A,\leq_1),(B,\leq_2)$ مجموعتين مرتبتين، سندعو تابع ما $f:(A,\leq_1)\rightarrow(B,\leq_2)$ تماثلاً (isomorphism) بين هاتين المجموعتين المرتبتين إذا كان f تقابل و كان التابعان

$$f:(A,\leq_1)\rightarrow(B,\leq_2)\ ,\quad f^{-1}:(B,\leq_2)\rightarrow(A,\leq_1)$$

متزايدان، و عندئذٍ سنقول إن المجموعتين المرتبتين $(A,\leq_1),(B,\leq_2)$ متماثلتين (isomorphic).

4-2-2. مبرهنة:

ليكن التابع $f:(A,\leq_1)\rightarrow(B,\leq_2)$ عندئذٍ فإن

$$(\ f\ \text{تماثل}\ ) \Leftrightarrow (\ f\ \text{تقابل و ذي باقي و}\ f^{+}=f^{-1}\ )$$

الإثبات:

من الواضح أن

$$(\ f\ \text{تماثل}\ ) \Leftarrow (\ f\ \text{تقابل و ذي باقي و}\ f^{+}=f^{-1}\ )$$

لنبرهن أن

$$(\ f\ \text{تماثل}\ ) \Rightarrow (\ f\ \text{تقابل و ذي باقي و}\ f^{+}=f^{-1}\ )$$

لنفرض أن f تماثل، لبرهان أن $f^{+}=f^{-1}$ يكفي إثبات أن

$$f\circ f^{-1}\leq id_B \quad \wedge \quad f^{-1}\circ f\geq id_A$$

وهذا محقق لأن

$$f\circ f^{-1}=id_A \quad \wedge \quad f^{-1}\circ f=id_B\ . \blacksquare$$

4-2-3. مبرهنة:

تكون المجموعتان المرتبتان $(A,\leq_1),(B,\leq_2)$ متماثلتان إذا و فقط إذا وجد تابع غامر

$$f:(A,\leq_1)\rightarrow(B,\leq_2)$$

يحقق

$$\forall x,y\in A\ :\ (\ x\leq_1 y \ \Leftrightarrow\ f(x)\leq_2 f(y)\ )$$

الإثبات:

لنفرض أن المجموعتان المرتبتان $(A,\leq_1),(B,\leq_2)$ متماثلتان، و ليكن ذاك التماثل

$$f:(A,\leq_1)\rightarrow(B,\leq_2)$$

عندئذٍ فإن f تقابل و التابعان

$$f:(A,\leq_1)\rightarrow(B,\leq_2)\ ,\ f^{-1}:(B,\leq_2)\rightarrow(A,\leq_1)$$

متزايدان، وبالتالي فإنه من أجل كل $x,y\in A$ فإن

$$\boxed{x\leq_1 y \xRightarrow{f\ \text{متزايد}} f(x)\leq_2 f(y)} \quad (1)$$

كما أن

$$f(x) \leq_2 f(y) \xrightarrow{f^{-1}\text{ متزايد}} f^{-1}f(x) \leq_1 f^{-1}f(y) \Rightarrow x \leq_1 y$$

أي أن

$$\boxed{f(x) \leq_2 f(y) \Rightarrow x \leq_1 y} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن

$$\forall\, x, y \in A \;:\; (\; x \leq_1 y \;\Leftrightarrow\; f(x) \leq_2 f(y) \;)$$

و الآن العكس، لنفرض أنه يوجد تابع غامر

$$f: (A, \leq_1) \to (B, \leq_2)$$

يحقق

$$\forall\, x, y \in A \;:\; (\; x \leq_1 y \;\Leftrightarrow\; f(x) \leq_2 f(y) \;)$$

لنتحقق من شرط التباين

$$\forall x, y \in A \;:\; (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \;&\Rightarrow\; f(x) \leq_2 f(y) \;\wedge\; f(y) \leq_2 f(x) \\ &\Rightarrow\; x \leq_1 y \;\wedge\; y \leq_1 x \\ &\Rightarrow\; x = y. \end{aligned}$$

إذاً f تقابل.

إن f متزايد لأنه

$$\forall\, x, y \in A \;:\; (\; x \leq_1 y \;\Rightarrow\; f(x) \leq_2 f(y) \;)$$

كما أن f^{-1} متزايد لأنه

$$\forall\, x, y \in A \;:\; (\; f(x) \leq_2 f(y) \;\Rightarrow\; x \leq_1 y \;)$$

مما يعني أن f تماثل مجموعات مرتبة، و المجموعتان المرتبتان $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ متماثلتان. ■

4-2-4. تمهيدية:

لتكن $(A,\leq_1),(B,\leq_2)$ مجموعتين مرتبتين منتهيتين، و ليكن $f:(A,\leq_1)\to(B,\leq_2)$ تابع تقابل، عندئذٍ فإن الشرطين التاليين متكافئين:

$$\forall\, x,y\in A\ :\ (\ x\leq_1 y\ \Leftrightarrow\ f(x)\leq_2 f(y)\ )\qquad (1)$$

$$\forall\, x,y\in A\ :\ (\ x\prec_1 y\ \Leftrightarrow\ f(x)\prec_2 f(y)\ )\qquad (2)$$

الإثبات:

$\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$

من أجل كل $x,y\in A$ فإن

$$x\prec_1 y\ \Leftrightarrow (\ x<_1 y\ )\wedge(\ \nexists\, z\in A:\ x<z<y)$$

$$\Leftrightarrow (\ f(x)\leq_2 f(y)\ )\ \wedge(\nexists\, z\in A:\ f(x)<f(z)<f(y)\ )$$

$$\Leftrightarrow (\ f(x)\leq_2 f(y)\ )\ \wedge\ (\nexists\, z'\in B:\ f(x)<z'<f(y)\ )$$

$$\Leftrightarrow\ \ f(x)\prec_2 f(y)$$

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$

بما أن المجموعة A منتهية فإنه من أجل كل $x,y\in A$ القضية

$$x\leq_1 y$$

تكافئ وجود عدد منتهي $a_1,\dots,a_n$ من عناصر A تحقق

$$x\prec_1 a_1\prec_1 a_2\prec_1\cdots\prec_1 a_n\prec_1 y$$

و هذا يكافئ

$$f(x)\prec_2 f(a_1)\prec_2 f(a_2)\prec_2\cdots\prec_2 f(a_n)\prec_2 f(y)$$

و هذا يكافئ

$$f(x)\leq_2 f(y)$$

إذاً

$$\blacksquare\ .\ \ \forall\, x,y\in A\ :\ (\ x\leq_1 y\ \Leftrightarrow\ f(x)\leq_2 f(y)\ )$$

4-2-5. مبرهنة:

لتكن A, B مجموعتين منتهيتين، عندئذٍ يكون التابع $f: (A, \leq_1) \to (B, \leq_2)$ تماثل مجموعات مرتبة إذا و فقط إذا كان التابع f تقابل ويحقق

$$\forall\, x, y \in A \;:\quad x \prec_1 y \;\Leftrightarrow f(x) \prec_2 f(y)$$

الإثبات:

ينتج مباشرةً من المبرهنة 4-2-3 و التمهيدية 4-2-4 . ■

4-2-6. نتيجة:

تكون المجموعتان المرتبتان و المنتهيتان $(B, \leq_2)$, $(A, \leq_1)$ متماثلتان إذا و فقط إذا كان لهما نفس مخطط هاس.

4-2-7. مثال:

أي مجموعتين منتهيتين مرتبتين كلياً و لهما نفس عدد العناصر ستكونان متماثلتان.

4-3- تمارين:

4-3-1. تمرين:

لتكن المجموعتان المرتبتان $(\mathbb{N}, |), (sub(\mathbb{Z}), \supset)$ حيث $sub(\mathbb{Z})$ هي مجموعة كل الزمر الجزئية من الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$، أي أن

$$sub(\mathbb{Z}) = \{n\mathbb{Z} \;: n \in \mathbb{N}\}$$

أثبت أن

$$\psi :\; (\mathbb{N}, | \quad) \to \;(sub(\mathbb{Z}), \supset)\;\; ;\;\; n \mapsto \psi(\mathrm{n}) = \mathrm{n}\mathbb{Z}$$

هو تماثل مجموعات مرتبة.

4-3-2. تمرين:

أثبت أنه من أجل كل مجموعة غير خالية A فإن التابع التالي تماثل مجموعات مرتبة

$$f \;: (P(A), \subset) \to (P(A), \subset)\;\; ;\;\; B \mapsto f(B) = B^c = A \setminus B$$

4-3-3. تمرين:

لتكن $(A_1, \leq_1), (A_2, \leq_2)$ مجموعتين مرتبتين و لنزود المجموعة $A_1 \times A_2$ بعلاقة ترتيب الجداء الديكارتي $\leq_1 \times \leq_2$ المعرفة سابقاً كما يلي

$$\forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A_1 \times A_2 \;:$$

$$(x_1, y_1) \leq_1 \times \leq_2 (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq_1 y_1 \ \wedge \ \ x_2 \ \leq_2 \ y_2$$

أثبت أن المجموعتين المرتبتين $(A_1 \times A_2, \leq_1 \times \leq_2)$ ، $(A_2 \times A_1, \leq_2 \times \leq_1)$ متماثلتين.

4-3-4. تمرين:

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$، و لنرمز $F([n], \{0,1\})$ لمجموعة كل التوابع من $[n]$ إلى $\{0,1\}$ ، من اجل كل $B \subset [n]$ لنرمز χ_B للدالة المميزة للمجموعة B، أثبت أن التطبيق التالي

$$\chi : (P([n]), \subset) \to (F([n], \{0,1\}), \leq) \ ; \ \ B \mapsto \chi_B$$

تماثل مجموعات مرتبة.

توجيه:

أثبت أن χ غامر و من أجل كل $B \subset [n]$ يحقق

$$B_1 \subset B_2 \ \Leftrightarrow \ \chi_{B_1} \leq \chi_{B_2}$$