جامعة حلب

كلية العلوم

قسم الرياضيات

ملخص توابع

متعددة المتغيرات

نظري دورة(٢٠١١-٢٠١٢)

مدرسة المقرر: د.غادة علي جوجة

الفضاءات المتجهية الشعاعية

تعريف: لتكن X مجموعة ما غير خالية ولنعرف على هذه المجموعة عمليتين الأولى داخلية ونرمز لها ب(+)بحيث أن:

$$(+: \quad X \times X \to X) : (x, y) \to x + y$$

والثانية خارجية ونرمز لها ب(·) ومجموعة مؤثراتها الحقل $\mathbb{R}$ وبحيث أن:

$$(\cdot : \mathbb{R} \times X \to X) : (a, x) \to a \cdot x$$

نقول عن X مزودة بهاتين العمليتين أنها تشكل فضاء متجهي إذا تحققت الشروط التالية:

1) $\forall x, y \in X \qquad x + y = y + x$

2) $\forall x, y, z \in X \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$

3) يوجد عنصر من X نرمز له ب θ من أجله يكون:

$$x + \theta = \theta + x = x$$

4) يوجد لكل عنصر $x \in X$ مقابل نرمز له ب$-x$ من أجله يكون:

$$x + (-x) = \theta$$

ويسمى بنظير العنصر x بالنسبة ل(+)أي أن $(X, +)$ تشكل زمرة تبديلية.

5) $\forall a \in \mathbb{R} \qquad a.(x + y) = a.x + a.y \qquad ; \forall x, y \in X$

6) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ , \forall x \in X \qquad (a + b).x = a.x + b.x \quad , \quad (a.b).x = a.(b.x)$

7) $\forall x \in X \qquad 1.x = x$

مثال(١): إن $\mathbb{R}^n$ مجموعة جميع الجمل المرتبة المؤلفة منn مركبة حقيقية والتي من الشكل:

$$\mathbb{R}^n = \{\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\ ;\ x_i \in \mathbb{R} \qquad \forall\, i = 1,2,3, \dots, n$$

تشكل فضاء متجهي وذلك إذا عرفنا عمليتي الجمع والضرب على النحو الأتي:

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) =$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad ; x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$a.x = a.(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a.x_1, a.x_2, \dots, a.x_n) \quad ; a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$$

حيث العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع يعرف أن:

$$\theta = (0,0,\dots,0) \qquad \text{مركبة } n$$

أما نظير العنصر x فهو يتعرف ب

$$-x = (-1).x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

مثال(٢): إن مجموعة جميع التوابع المعرفة والمستمرة على المجال $[a,b]$ تشكل فضاء متجهي وذلك إذا عرفنا عليها عمليتين الجمع والضرب على النحو الأتي:

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t) \quad ; \forall x, y \in X \quad , t \in [a,b]$$

$$(a.x)(t) = ax(t) \qquad ; a \in \mathbb{R} \quad , x \in X \quad , t \in [a,b]$$

أما نظير العنصر x فهو يتعرف بالمساواة

$$(-x)(t) = -x(t)$$

ونرمز لهذا الفضاء بالرمز: $c[a,b]$ وعندها يكون:

$$(c[a,b], +, \cdot) \qquad \text{فضاء متجهي}$$

تعريف:

الفضاء المنظم: ليكن X فضاء متجهي إن النظيم على X والذي نرمز له ب $\|\cdot\|$ هو تابع حقيقي معرف بالشكل:

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

$$x \in X \to a \quad ; a \in \mathbb{R}$$

حيث a عدد حقيقي غير سالب وهذا التابع يحقق الشروط التالية:

1) $\forall x \in X \quad \| x \| \geq 0 \quad , \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2) $\forall x \in X, a \in \mathbb{R} \quad \| a \cdot x \| = |a| \cdot x$

3) $\forall x, y \in X \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y$ متراجحة المثلث

وعندها نسمي الثنائية $(X, \|\cdot\|)$ فضاء منظم.

مثال(١): الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^n$ هو فضاء منظم يتعرف النظيم فيه بالمساواة:

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \right)^{1/2} \qquad ; x \in \mathbb{R}^n$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \| x \| = ({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)^{1/2}$$

ومنه:

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq 0}$$

$$\| x \| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\| a \cdot x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} a . {x_i}^2 \right)^{1/2} = |a| . \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \right)^{1/2} = a . x$$

$$\| x + y \| = (\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \right)^{1/2} = \| x \| + \| y \|$$

إذاً $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ فضاء منظم.

مثال(٢): ليكن $c[a,b]$ فضاء متجهي وهي مجموعة جميع التوابع المعرفة والمستمرة على $[a,b]$

إن هذ الفضاء يؤول إلى فضاء منظم إذا عرفنا فيه النظيم بالمساواة.

$$\| x \| = \max |x(t)| \qquad a \leq t \leq b$$

في الواقع $\| x \| \geq 0$

1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow \max|x(t)| = 0 \Leftrightarrow |x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$$a \leq t \leq b$$

2) $\| a \cdot x \| = \max|(a \cdot x)(t)| = \max|ax(t)| = |a| \cdot \max|x(t)| = |a| \cdot \| x \|$

$$a \leq t \leq b \qquad a \leq t \leq b \qquad a \leq t \leq b$$

$$3)\ |x(t)+y(t)| \leq |x(t)|+|y(t)| \leq$$

$$\leq \max|x(t)|+\max|y(t)| =$$

$$a \leq t \leq b$$

$$= \| x \| + \| y \| \Rightarrow$$

$$\max|x(t)+y(t)| \leq \| x \| + \| y \| \Rightarrow$$

$$a \leq t \leq b$$

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

المحاضرة الثانية ٢٠١٢/٢/٢٦

تعريف الجداء الداخلي:ليكن X فضاء متجهي حقيقي إن الجداء الداخلي على الفضاء X هو كل تابع معرف على $X \times X$ ويأخذ قيمه في$\mathbb{R}$ ونرمز له ب$<\cdot>$ أو $(\cdot)$ ويحقق الموضوعات التالية:

$$1)\forall x \in X \quad \Rightarrow < x , x > \geq 0$$

$$2)\forall x, y \in X \quad \Rightarrow < x , y > = < y , x >$$

$$3)\forall x, y, z \in X \ \Rightarrow < x+y , z \geq < x , z > + < y , z >$$

$$< x , y+z > = < x , y > + < x , z >$$

$$4)\forall a \in \mathbb{R} \ \wedge x \in X \wedge z \in X \Rightarrow < ax , z > = a < x , z > = < x , az >$$

نسمي الثنائية $(X, <\cdot>)$ فضاء جداء داخلي.

ملاحظة:إذا كان X فضاء متجهي عقدي فإن الشرط ٢ من تعريف الجداء الداخلي والشرط ٤ يؤولان إلى الشكل:

$$2')\ < x , y > = \overline{< y , x >} \qquad ; \forall x, y \in X$$

$$4')\ < ax , z \geq a < x , z >$$

$$< x , az > = \overline{a} < x , z > \quad ; a \in \mathbb{C}$$

مثال(١):لنعرف على الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^n$ التابع:

$$<\cdot>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

على النحو الأتي:

$$< x\,,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i * y_i$$

إن التابع $< \cdot >$ يعرف جداء داخلي على $\mathbb{R}^n$ وأن $\mathbb{R}^n$ مع التابع المعرف سابقاً هو فضاء جداء داخلي.

البرهان:

$$1)\ < x\,,x >= \sum_{i=1}^{n} x_i * x_i = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq 0$$

$$< x\,,x >= 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 0 \Rightarrow {x_i}^2 = 0 \Rightarrow x = \theta$$

$$2)\ < x\,,y \geq \sum_{i=1}^{n} x_i * y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i * x_i =< y\,,x >$$

$$3)\ < x + y\,,z \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) * z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i * z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i * z_i =$$

$$=< x\,,z > + < y\,,z >$$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$$< x\,,y + z \geq < x\,,y > + < x\,,z >$$

$$4)\ < ax\,,z \geq \sum_{i=1}^{n} ax_i * z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i * az_i =< \mathrm{x}\,,\mathrm{az} \geq \mathrm{a} < \mathrm{x}\,,\mathrm{z} >$$

مثال(٢): لنعرف على فضاء التوابع المعرفة والمستمرة على المجال$[a, b]$ التابع $< \cdot >$ من:

$$< \cdot >: \mathrm{c}[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times \mathrm{c}[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$$

على النحو الأتي:

$$< x\,,y >= \int_a^b x(t)y(t)dt$$

من الواضح أنه إستناداً إلى خواص تكامل ريمن أن التابع المعطى يعرف جداء داخلي(تحقق).

تعريف:ليكن X فضاء جداء داخلي ولنعرف التابع:

$$\|\ \|: X \to \mathbb{R}$$

بالشكل التالي:

$$\|x\| = \sqrt{< x\,, x >}$$

إن التابع|| || المعرف بالمساواة السابقة يسمى بالنظيم المولد بالجداء الداخلي وسوف نبين لاحقاً أن هذا التابع يحقق جميع شروط التابع النظيم.

مبرهنة: إن الجداء الداخلي والنظيم المولد به يحققان المتراجحة التالية:

$$|< x\,, y >| \leq \|x\|.\|y\| \quad ; \quad \forall x, y \in X$$

وتتحقق المساواة في الحالة التي يكون فيها y و x مرتبطان خطياً.

وتسمى هذه المبرهنة بمبرهنة(شوارتز).

<u>البرهان:</u>لدينا

$$0 \leq \|x - ay\|^2 =< x - ay\,, x - ay >=< x\,, x > +< -ay\,, x > + < x\,, -ay > +< -ay\,, -ay >=$$

$$< x\,, x > -a < y\,, x > -a < x\,, y > +a^2 < y\,, y >=< x\,, x > -a < y\,, x > -a[< x\,, y > -a < y\,, y >]$$

نختار a بحيث ينعدم مابين قوسين:

$$a = \frac{< x\,, y >}{< y,\ y >}$$

عندئذٍ نجد أن:

$$0 \leq \|x - ay\|^2 =< x\,, x > - \frac{< x\,, y >}{< y,\ y >}.< y\,, x >= \|x\|^2 - \frac{< x\,, y >^2}{\|y\|^2}$$

ومنه نجد:

$$\|x\|^2.\|y\|^2 \geq < x\,, y >^2 \Rightarrow |< x\,, y >| \leq \|x\|.\|y\|$$

- بفرض أن x, y مرتبطين خطياً وإذا أخذنا$x = ay$ عندئذٍ بالتعويض بالطرف الأيسر من متراجحة شوارتز يمكن أن نكتب:

$$S_1 = |< x\,, y >| = |< ay\,, y >| = |a < y\,, y >| = = |a|.|< y\,, y >| = |a|.\|y\|^2$$

$$S_2 = \|x\|.\|y\| = \|ay\|.\|y\| = |a|.\|y\|^2$$

ومنه نجد أن:

$$S_1 = S_2$$

وبالتالي:

$$| < x , y > | = \|x\|.\|y\|$$

وذلك عندما يكون $x = ay$ أي مرتبطين خطياً.

المحاضرة الثالثة ٢٠١٢/٢/٢٩

مبرهنة: إذا كان X فضاء جداء داخلي فإن التابع:

$$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$$

والمعرف بالعلاقة
$$\|x\| = \sqrt{< x , x >}$$

يحقق جميع موضوعات النظيم.

والمطلوب برهان ذلك.

البرهان: لدينا

$$< x, x > \geq 0 \Rightarrow \|x\| \geq 0 \qquad \forall x \in X \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{< x , x >} = 0 \Leftrightarrow$$
$$< x , x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|a.x\| = \sqrt{< ax , ax >} = \sqrt{a^2 < x , x >} = |a|\sqrt{< x , x >} = |a|.\|x\|$$

$$\|x + y\|^2 =< x + y , x + y \geq< x , x > +< y , x > +$$

$$+< x , y > +< y , y >=$$

$$= \|x\|^2 + 2 < x , y > +\|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2| < x , y > | + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 =$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ملاحظة هامة: إستناداً لما سبق يمكن القول أن كل جداء داخلي$< \cdot >$يُعرف نظيماً $\|\cdot\|$ يُعطى بالمساواة:

$$\|x\| = \sqrt{< x , x >}$$

أي أن كل فضاء جاء داخلي هو فضاء منظم.

متى يكون النظيم مولداً من جداء داخلي أي متى يكون العكس صحيح.

حتى يكون النظيم مولداً من جداء داخلي يجب أن تتحقق المساواة الأتية:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

وتسمى بمساواة(قاعدة متوازي الأضلاع).

مثال(١):لنعرف على $\mathbb{R}^2$ نظيماً بالعلاقة:

$$\|x\|=|x_1|+|x_2| \qquad ; x=(x_1,x_2)$$

برهن أن هذا النظيم لايولد من جداء داخلي.

الحل:

لإثبات النفي يكفي إيراد مثال:

لنأخذ $x=(1,-1) \quad , \quad y=(1,1) \in \mathbb{R}^2$

لدينا:

$$\|x+y\|=\|(1,-1)+(1,1)\|=\|(2,0)\|=|2|+|0|=2 \Rightarrow \|x+y\|^2 = 4$$

$$\|x-y\|=\|(1,-1)-(1,1)\|=\|(0,-2)\|=|0|+|-2|=2 \Rightarrow \|x-y\|^2=4$$

$$\|x\|=\|(1,-1)\|=|1|+|-1|=2 \Rightarrow \|x\|^2=4$$

$$\|y\|=\|(1,1)\|=|1|+|1|=2 \Rightarrow \|y\|^2=4$$

$$S_1=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=4+4=8$$

$$S_2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)=2(4+4)=16$$

ومنه نجد أن:

$$S_1 \neq S_2$$

أي أن النظيم لايولد بجداء داخلي وذلك لأنه لم يحقق قاعدة متوازي الأضلاع.

مثال(٢):برهن أن النظيم

$$\|x\|=\max|x(t)|$$

$$0 \leq t \leq 1$$

المعرف على الفضاء $c[1,0]$ لايولد من جاء داخلي

الحل: لدينا $x(t) = 1 , y(t) = t$

$$\|x+y\| = \max|x(t)+y(t)| = \max|1+t| = 2$$

$$0 \leq t \leq 1 \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = 4$$

$$\|x-y\| = \max|x(t)-y(t)| = \max|1-t| = 1$$

$$0 \leq t \leq 1 \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow \|x-y\|^2 = 1$$

$$\|x\| = \max|x(t)| = \max|1| = 1$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = 1$$

$$\|y\| = \max|y(t)| = \max|t| = 1$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow \|y\|^2 = 1$$

ومنه نجد أن:

$$S_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4+1 = 5$$

$$S_2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(1+1) = 4$$

ومنه نجد أن:

$$S_1 \neq S_2$$

أي أن النظيم لايولد بجداء داخلي وذلك لأنه لم يحقق قاعدة متوازي الأضلاع.

ملاحظة:سبق أن وجنا أن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء متجهي منظم إلا أنه ليس كم الضروري أن يكون كل فضاء منظم هو فضاء جداء داخلي.

الفضاء المتري

تعريف: لتكن $X \neq \emptyset$ لنعرف على X التابع:

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to d(x, y)$$

إذا حقق d الموضوعات الأتية:

$$1) d(x, y) \geq 0 \qquad , d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$2) d(x, y) = d(y, x)$$

$$3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

وذلك من أجل $\forall x, y, z \in X$ وعندئذٍ نسمي d مسافة على X أما X فتسمى بالمجموعة الرديفة(المساعدة).

كما نسمي (X, d) بالفضاء المتري.

- يمكن البرهان على أن كُل نظيم مُعرف على فضاء متجهي يُعرف مسافة على X تعطى بالمساواة:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

البرهان:

١) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

٢) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$

٣) $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\|$

$$\leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

$$= d(x, z) + d(z, y)$$

ملاحظة: سبق أن وجدنا أن كل فضاء خطي منظم هو فضاء متري والسؤال هنا هل كل مسافة تكون مولدة من نظيم(للرد على هذا التساؤل)نطرح مايلي:

التوطئة(لاتغير الإنسحاب).

- إذا كانت d مسافة مولدة من تظيم$\|\cdot\|$ على فضاء متجهي X فإن:

$$1)\ d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

$$2) d(ax, ay) = |a| d(x, y) \qquad ;\ \forall\ x, y, z \in X, a \in\in \mathbb{R}$$

البرهان:

$$1)d(x+z,y+z)=\|x+z-y-z\|=\|x-y\|=d(x,y)$$

$$2)d(ax,ay)=\|a(x-y)\|=|a|\|x-y\|=|a|d(x,y)$$

مثال:لتكن S مجموعة جميع المتتاليات الحقيقية أي:

$$x\in s$$

$$(x\in s; x=\{x_i\}_{i=1}{}^{\infty}\sqsubset\mathbb{R}$$

المحدودة أو غير المحدودة.

لنعرف على S عمليتي الجمع والضرب بالشكل:

$$x+y=\{x_i\}_{i\geq1}+\{y_i\}_{i\geq1}=\{x_i+y_i\}_{i\geq1}$$

$$ax=a\{x_i\}_{i\geq1}=\{ax_i\}_{i\geq1}\qquad ;a\in\mathbb{R}$$

$$(S,+,\cdot)$$

تشكل فضاءاً متجهياً (برهن ذلك)؟

- لنعرف الأن على S التابع
- $d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$

إن التابع d يُعرف مسافة على S إلا أن تلك المسافة غير مولدة من نظيم.

المحاضرة الرابعة **٢٠١٢/٣/٤**

الفضاء الإقليدي:$\mathbb{R}^n$:هو مجموعة جميع الجمل المرتبة المؤلفة من n مركبة أي:

$$\mathbb{R}^n=\{\,\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots.,x_n)\,;\;x_i\in\mathbb{R}\qquad\forall\,i=1,2,3,\ldots,n$$

مزودة بعمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي على النحو الأتي:

$$x+y=(x_1,x_2,\ldots.,x_n)+(y_1,y_2,\ldots.,y_n)=$$
$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots.,x_n+y_n)\quad;x,y\in\mathbb{R}^n$$

$$a.x=a.(x_1,x_2,\ldots.,x_n)=(a.x_1,a.x_2,\ldots.,a.x_n)\quad;a\in\mathbb{R}\,,x\in\mathbb{R}^n$$

وهو مزود بجداء داخلي يتعرف بالمساواة:

$$< x\, , y >= \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$$

وهذا الجداء الداخلي يولد نظيماً يعطى بالعلاقة:

$$\|x\| = \sqrt{< x\, , x >} = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

بناءاً على ذلك تتعرف المسافة في هذا الفضاء بالمساواة:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

سنستعرض فيما يأتي جملة من التعاريف الضرورية واللازمة في الفضاء $\mathbb{R}^n$.

تعاريف:

١- إذا كان X فضاء متري وكانت x_0 نقطة ما من X $X \ni x_0$ وكان r عدداص حقيقياً موجباً أي $r \in \mathbb{R}$ عندئذٍ نسمي مجموعة النقاط:

$$B(x_0, r) = \{x:\ d(x, x_0) = \|x - x_0\| \leq \mathrm{r}\}$$

بكرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r.

كما نسمي مجموعة النقاط:

$$N(x_0, r) = \{x:\ d(x, x_0) = \|x - x_0\| < \mathrm{r}\}$$

بكرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها r.

٢- ليكن لدينا U مجموعة جزئية من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ أي $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

نقول عن المجموعة U أنها مجموعة مفتوحة إذا وجد لكل نقطة $x \in U$ كرة مفتوحة مركزها x ومحتواة كلياً في U.

-نسمي كل كرة مفتوحة مركزها النقطة x_0 ونصف قطرها $(\varepsilon > 0)$ عدد موجب صغير بقدر كافي بجوار للنقطة x_0.

يمكن تعريف جوار النقطة x_0 على أنه كل مجموعة مفتوحة تحوي النقطة x_0.

٣- نقول عن النقطة $x \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة حدية للمجموعة S من $\mathbb{R}^n$ إذا تقاطع كل جوار للنقطة x مع S بنقطة واحدة على الأقل مغايرة لـx.

نسمي مجموعة النقاط الحدية باسم المجموعة المشتقة للمجموعة S ونرمز لها بالرمز:

S' أو ∂S

٤- نقول عن النقطة $x \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة محيطية للمجموعة S من $\mathbb{R}^n$ إذا تقاطع كل جوار للنقطة x مع S ومتممتها بنقطة واحدة على الأقل.

٥- نقول عن النقطة $x \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة تراكم للمجموعة S من $\mathbb{R}^n$ إذا تقاطع كل جوار للنقطة x مع S بعدد غير منتهي من النقاط أو(مجموعة غير منتهية من النقاط).

-يمكن البرهان على أن الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة حدية لمجموعة ما من $\mathbb{R}^n$ هو أن تكون x نقطة تراكم وذلك لأن $\mathbb{R}^n$ فضاء متري.

٦- - نقول عن النقطة $x \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة داخلية للمجموعة S من $\mathbb{R}^n$ إذا وجد جوار للنقطة محتوى بأكمله داخل(نسمي مجموعة النقاط الداخلية بداخلية المجموعة S)ونرمز لها بالرمز S° أو $inter(S)$.

٧- نقول عن المجموعة $S \in \mathbb{R}^n$ أنها مجموعة محدودة إذا وجدت كرة مفتوحة تحوي S أي

$$S \subseteq N(x_0, r)$$

المحاضرة الخامسة **٢٠١٢/٣/٧**

مبرهنة(هامة): إن هذه المبرهنة تكمن أهميتها في برهان تقارب متتالية من $\mathbb{R}^n$ إلى $x \in \mathbb{R}^n$.

وبالمختصر المفيد إن هذه المبرهنة(تحدد طبيعة العلاقة بين نظيم عنصر من $\mathbb{R}^n$ والقيمة المطلقة لمركباتها).

- برهن على متراجحة (شفارتز).

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max\{\ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_3|\ \}$$

بحيث أن n هو بعد الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$

$$\forall\ i = 1,2,3,\dots,n$$

البرهان: نعلم أن نظيم أي عنصر في الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^n$ هو:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$$

ومنه يكون

$${x_i}^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \sqrt{\quad} \Rightarrow |x_i| \leq \|x\| \dots .1)$$

$$\|x\|^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2$$

$$\le M^2 + M^2 + \cdots + M^2 = nM^2$$

وذلك رمزنا ل:

$$M = \max\{\ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_3|\ \}$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 \le nM^2 \ \Rightarrow \sqrt{\quad} \Rightarrow \|x\| \le \sqrt{n}\, M \Rightarrow$$

$$\|x\| \le \sqrt{n} \max\{\ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_3|\ \} \quad \dots .2)$$

من ١) و٢) أن:

$$|x_i| \le \|x\| \le \sqrt{n} \max\{\ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_3|\ \}$$

وهو المطلوب وتسمى هاتان المترجحتان بمتراجحتي شفارتز.

- **تقارب المتتاليات في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$:**

لتكن لدينا متتالية من $\mathbb{R}^n$ بحيث $\{x_m\}_{m\ge1}^{\infty}$ نقول عن المتتالية $\{x_m\}_{m\ge1}^{\infty}$ أنها متقاربة من $x \in \mathbb{R}^n$ إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0\,;\ \exists\, N_\varepsilon\,;\ \ d(x_m, x) = \|x_m - x\| < \varepsilon\ \ ;\forall m > N_\varepsilon$$

وعندها نكتب:

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x$$

أو

$$x_m \to x$$

$$m \to \infty$$

نتائج:

١) نهاية متتالية إن وجدت فهي وحيدة.
٢) الشرط اللازم والكافي لكي تتقارب متتالية $\{x_m\}_{m\ge1}^{\infty}$ من $\mathbb{R}^n$ إلى $x \in \mathbb{R}^n$ هو أن يكون أي جوار للنقطة x يحوي جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها.
٣) كل متتالية متقاربة من $\mathbb{R}^n$ هي مجموعة محدودة.
٤) الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعة مغلقة هو أن يكون لكل متتالية من عناصر S نهاية في S .

مبرهنة:برهن أن الشرط اللازن والكافي كي تتقارب المتتالية $\{x_m\}_{m\geq 1}^{\infty}$ حيث:

$$x_m = (x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}) \quad ; m = 1,2, \dots$$

إلى العنصر:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{في } \mathbb{R}^n$$

هو أن تتقارب المتتاليات الحقيقية التالية:

$$\begin{array}{ccc} \{x_{1m}\}, & \{x_{2m}\}, \dots, & \{x_{nm}\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_n \end{array}$$

على الترتيب.

البرهان:

لزوم الشرط:لنفرض أن المتتالية $\{x_m\}_{m\geq 1}^{\infty}$ متقاربة من $x \in \mathbb{R}^n$ وحسب تعريف تقارب المتتالية في $\mathbb{R}^n$.

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists\, N_\varepsilon \,;\;\; \|x_m - x\| < \varepsilon \;\; ; \forall m > N_\varepsilon$$

وحسب متراجحة شفارتز نجد:

$$|x_{im} - x_i| \leq \|x_m - x\| < \mathcal{E} \quad \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists\, N_\varepsilon \,;\;\; \|x_{im} - x_i\| < \varepsilon \;\; ; \forall m > N_\varepsilon$$

وهو تعريف نتقارب متتالية من R إذاً المتتالية $\{x_{im}\}_{m\geq 1}^{\infty}$ متقاربة من x_i في R

$$\forall\, i = 1,2, \dots n$$

$$\forall \mathrm{m} = 1,2, \dots ..$$

كفاية الشرط:لنفرض أن المتتالية $\{x_{im}\}_{m\geq 1}^{\infty}$ متقاربة من x_i في R

عندئذٍ إستناداً إلى تعريف التقارب فيR من أجل:

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists\, N_\varepsilon \,;\;\; \|x_{im} - x_i\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \;\; ; \forall m > N_\varepsilon$$

حسب تعريف النظيم في $\mathbb{R}^n$ نجد:

$$\|x_m - x\|^2 = (x_{1m} - x_1)^2 + (x_{2m} - x_2)^2 + \dots + (x_{nm} - x_2)^n =$$

$$= |x_{1m} - x_1|^2 + |x_{2m} - x_2|^2 + \dots + |x_{nm} - x_n|^n$$

$$< \frac{\mathcal{E}^2}{n} + \frac{\mathcal{E}^2}{n} + \dots + \frac{\mathcal{E}^2}{n} = \mathcal{E}^2$$

$$\Rightarrow \quad \|x_m - x\| < \varepsilon \quad ; \forall\, m > N_\varepsilon$$

وبالتالي المتتالية $\{x_m\}_{m\geq1}^{\infty}$ متقاربة من x.

تعريف: متتالية كوشي في $\mathbb{R}^n$

نقول عن المتتالية $\{x_m\}_{m\geq1}^{\infty}$ أنها متتالية كوشي (أساسية) إذا وجد:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;;\; \exists\, N_\varepsilon \;;\; \|x_m - x_l\| < \varepsilon \;, \qquad \forall\, m, l > N_\varepsilon$$

- يمكن البرهان على أن كل متتالية متقاربة في $\mathbb{R}^n$ هي لكوشي.
- نسمي كل فضاء متري تكون فيه كل متتالية لكوشي متقاربة(**بالفضاء التام**).
- يمكن البرهان على أن كلاً من الفضائين:

$$[(\mathbb{R}, d), (\mathbb{R}^n, d)]$$

المحاضرة السادسة **٢٠١٢/٣/١١**

المجموعات المتراصة في الفضاء $\mathbb{R}^n$.

نقول عن أسرة المجموعات الجزئية u_i من $\mathbb{R}^n$ أنها تشكل تغطية للمجموعة الجزئية $S \subseteq \mathbb{R}^N$ إذا كان:

$$S \subseteq \bigcup_i \{u_i\}$$

- إذا كانت عناصر u_i مجموعات مفتوحة وكانت
- $S \subseteq \bigcup_i \{u_i\}$ فإننا نقول عن تلك الأسرة أنها تشكل تغطية مفتوحة ل S
- نقول عن المجموعة الجزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها مجموعة متراصة إذا حوت كل تغطية مفتوحة ل S على تغطية جزئية منتهية ل S .

مثال:لتكن:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{R}^n$ برهن على أن A مجموعة متراصة.

<u>**البرهان:**</u>

لتكن لدينا:

$$\{\, u_i \;\; ; \;\; i \epsilon I \,\}$$

تغطية مفتوحة إختيارية للمجموع A ولنأخذ من تلك الأسرة المجموعة:

$$u_1 , u_2, \dots , u_n$$

$$a_1 \in u_1 , \dots . , a_n \in u_n$$

من الواضح أن تلك الأسرة منتهية وأكثر من ذلك فإن:

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{n} \ \{u_i\}$$

وهذا يعني أننا استخلصنا من التغطية المفتوحة تغطية جزئية منتهية للمجموعة A أي أن A مجموعة متراصة.

- يمكن البرهان على أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة S متراصة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ هو أن تكون S مغلقة ومحدودة.

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \Leftrightarrow S$$

محدودة ومغلقة

وهذه المبرهنة تسمى بمبرهنة هاين بوريل.

(يمكن تعميم هذا المفهوم لجميع الفضاءات منتهية البعد).

مبرهنة(بولزانو-وايرشتراس):

لكل مجموعة جزئية محدودة وغير منتهية من $\mathbb{R}^n$ نقطة حدية واحدة على الأقل.

<u>البرهان:</u> لنفرض أن S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ محدودة وليس لها أية نقطة تراكم ولنبرهن على أن هذا الفرض يؤدي إلى أن S منتهية.

إذا لم يوجد للمجموعة S أية نقطة حدية فإن هذا الأمر يعني أن S مجموعة مغلقة وبالتالي إستناداً إلى مبرهنة هاين بوريل نجد أن S متراصة.

كما أنه من كون ليس ل S أية نقطة حدية ينتج أنه لكل نقطة من S يوجد جوار وليكن u_x لايحوي أية نقطة من S سوى x.

وبالتالي فإن أسرة الجوارات

$$u = \{u_x \ \ ; x \epsilon S \}$$

تشكل نغطية مفتوحة ل S كون S متراصة.

فإنه يمكن إيجاد تغطية جزئية منتهية من المجموعات المنتمية إلى u ولتكن تلك المجموعات هي:

$$\{ u_{x1} , u_{x2} , \dots , u_{xn}\}$$

بما أن هذه المجموعات تحوي فقط:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{u_{x_n}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

أي أن:

$$S \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

أي أن S منتهية والأمر الذي ينقض فرضنا أن S غير منتهية.

نهايات التوابع لعدة متغيرات

تعريف: ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة الجزئية S وبحيث أن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ولتكن x_0 نقطة حدية ل S وليكن l عدداً حقيقياً نقول أن:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد صحيح موجب وبحيث يكون

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

وذلك عندما:

$$\|x - x_0\| < \delta$$

أي أن:

$$\|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

-يمكن البرهان على أن نهاية تابع إن وجدت فهي وحيدة.

المحاضرة السابعة **٢٠١٢/٣/١٤**

تعريف: ليكن f, g تابعين حقيقين معرفين على المجموعتين الجزئيتين T, S على الترتيب من $\mathbb{R}^n$ عندئذٍ:

١- $f + g$ هو تابع حقيقي معرف على النحو الأتي:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in T \cap S$$

٢- $f.g$ هو تابع حقيقي معرف على النحو الأتي:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) \qquad \forall x \in T \cap S$$

٣- f/g هو تابع حقيقي معرف على النحو:

$$\left(f/g\right)(x) = f(x)/g(x) \qquad \forall\, x \in T \cap S\,\{x: g(x) = 0\}$$

- إعتماداً على التعاريف السابقة وعلى مفهوم النهاية:

إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = k$$

حيث l, k موجودة ومحدودة.

فإن:

$$1)\quad \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = l + k$$

$$2)\quad \lim_{x\to x_0} (f.g)(x) = l.k$$

$$3)\quad \lim_{x\to x_0} (f/g)(x) = \frac{l}{k} \quad ; \quad \mathrm{k} \neq 0$$

إستمرار التوابع لعدة متغيرات

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ نقول عن التابع f أنه مستمر في النقطة $x_0 \in S$ إذا وجدت إذا تحقق:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\quad \delta > 0\ \ ;\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- نقول عن f أنه مستمر في المجموعة S إذا كان f مستمراً في كل نقطة من نقاط S .
- **إستناداً إلى مفهوم النهاية يمكن البرهان على أنه:**

إذا كان f تابعاً حقيقياً معرف على مجموعة جزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون f مستمراً في النقطة x_0 الحدية هو أن يكون:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

المجموعة المترابطة في الفضاء الإقليدي:

تعريف: نقول عن مجموعة جزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها غير مترابطة إذا وجدت مجموعتان مفتوحتان $u, v \subseteq S$ وبحيث يكون إجتماعهما يساوي S وتقاطعهما خالٍ.
- إذا لم يتحقق ذلك فإننا نقول عن S أنها مترابطة.

كما ويمكن تعريف المجموعة غير المترابطة على النحو:

نقول عن المجموعة الجزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها غير مترابطة غذا وجدت مجموعتان مفتوحتان من $\mathbb{R}^n$ بحيث تكون المجموعتان $u \cap S , v \cap S$ منفصلتين وغير خاليتين وإجتماعهما يساوي S

- سبق وجدنا أن الشرط اللازم والكافي أن تكون المجموعة الجزئية $S \subseteq \mathbb{R}$ مترابطة هو أن تكون S مجالاً **(تبولوجيا (١)).**
ووجنا أن $\mathbb{R}^n$ هو فضاء مترابط .

مبرهنة بولزانو في القيمة المطلقة:
ليكن f تابعاً حقيقياً مستمراً على مجموعة جزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مترابطة.
إذا كان x, y نقطتين من S وكانت η بين $f(x) , f(y)$ فعندئذٍ يوجد على الأقل ζ بين x , y .
وبحيث يكون:

$$f(\zeta) = \eta$$

__**البرهان:**__ لما كانت S مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}^n$ وكان f تابعاً مستمراً فإن $f(S)$ مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}$ ولما كانت كل مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}$ تشكل مجالاً فإن $f(S)$ مجالاً.

بما أن x , y نقطتين من S فإن $f(x), f(y)$ ينتميان إلى $f(S)$ وبالتالي فإن

$$\eta \in f(S)$$

أي ثمة نقطة واحدة على الأقل ζ وبحيث يكون:

$$f(\zeta) = \eta$$

وهو المطلوب.

__***نتيجة:***__ إذا كان

$$f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

وكانت

$$f(a) < 0 < f(b)$$

فإنه يوجد عدد $a < \zeta$ وأصغر من b أي

$$a < \zeta < b$$

بحيث يكون

$$f(\zeta) = 0$$

تنويه: من المعلوم أن كل مجال في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مترابطة وبالتالي يمكن نقل نظرية بولزانو إلى هذه النتيجة.

ملاحظة: تم إستخدام رمزين جديدين في النظرية السابقة وهما ζ ويطلق عليه **(زيتا)** والرمز η والذي يطلق عليه **(إيتا)**.

المحاضرة الثامنة **٢٠١٢/٣/١٨**

التابع منتظم الإستمرار: نقول عن التابع f المعرف على مجموعة جزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ أنه منتظم الإستمرار على تلك المجموعة إذا وجد من أجل:

$$\forall\, x, y \in S$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\;,\;\; \exists\, \delta > 0 \;;\; \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- من الواضح أنه إذا كان f منتظم الإستمرار فهو مستمر أما العكس غير صحيح في الحالة العامة وسنأتي على مثال يبين ذلك :

ليكن لدينا :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$

أثبت أن f مستمر إلا أنه ليس منتظم الإستمرار.

الإثبات:

من أجل $\delta > 0$ لنأخذ $x = \frac{\varepsilon}{\delta}$ وبحيث أن $\forall\, \varepsilon > 0$

ولنأخذ $y = x + \frac{\delta}{2}$

من الواضح أن $x, y \in \mathbb{R}$ كما أن

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\|x - y\| = \left\|x - (x + \frac{\delta}{2})\right\| = \left\|-\frac{\delta}{2}\right\| = \sqrt{(-\frac{\delta}{2})^{\,2}} = \frac{\delta}{2} < \delta$$

إلا أن هذا لايؤدي أنه $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ ولنبرهن ذلك

$$|f(x)-f(y)| = \left|x^2-\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2\right| = \left|x^2-x^2-x.\delta-\frac{\delta^2}{4}\right| = \left|\varepsilon+\frac{\delta^2}{4}\right| =$$
$$=\varepsilon+\frac{\delta^2}{4}>\varepsilon$$

وتناقض التعريف وبالتالي التابع ليس منتظم الإستمرار .

ملاحظة: إذا كان f تابعاً حقيقياً معرفاً ومستمراً على مجموعة مغلقة ومحدودة من $\mathbb{R}^n$ فإن f يكون مستمراً بإنتظام.

وبعبارة ثانية يمكن القول أنه في الفضاءات المتراصة لافرق بين الإستمرار والإستمرار بإنتظام.

تذكرة: ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $S\subseteq\mathbb{R}^n$

$$f: S\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

نقول عن f أنه محدود من الأعلى إذا كانت مجموعة قيمه $f(S)$ محدودة من الأعلى ونقول أنه محدود من الأدنى إذا كانت مجموعة قيمه $f(S)$ محدودة من الأدنونقول أنه محدود **(إذا كانت مجموعة قيمه محدودة من الأدنى ومحدودة من الأعلى معاً).**

يمكن البرهان على أن الشرط اللازم والكافي كي يكون f محدوداً هو أن يتحقق الشرط:

$$f \text{ محدود } \Leftrightarrow |f(x)|\le M$$

$$\forall x\in S \quad , \quad M>0$$

المحاضرة التاسعة **٢٠١٢/٣/٢٥**

تعريف: ليكن $f(x)=f(x_1,x_2,\dots x_n)$

تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $S\subseteq\mathbb{R}^n$ ولتكن:

$$c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$$

نقطة داخلية في S إذا كانت

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(c_1+h_1,c_2,\dots,c_n)-f(c_1,c_2,\dots,c_n)}{h_1}$$

موجودة فإننا نقول أن للتابع f مشتق جزئي بالنسبة للمتغير الأول x_1 في النقطة c ونرمز لتلك النهاية ب:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) \qquad \text{أو} \qquad f_{x_1}(c)$$

ونكتب:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(c_1 + h_1, c_2, \dots, c_n) - f(c_1, c_2, \dots, c_n)}{h_1}$$

وبطريقة مماثلة تماماً يمكن تعريف المشتق الجزئي للتابع f بالنسبة للمتغير x_i حيث:

$$(i = 1,2, \dots, n)$$

وذلك في النقطة c ونكتب:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(c_1, c_2, \dots, c_i + h_i, \dots, c_n) - f(c_1, c_2, \dots, c_n)}{h_i}$$

وذلك في حال وجود النهاية.

مثال:ليكن لدينا $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

معرف بالشكل:

$$f(x, y) = x^2 + xsiny - x^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + siny - yx^{y-1}$$

نتعامل مع y على أنه ثابت.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xcosy - lnx. x^y$$

نتعامل مع x على أنه ثابت.

تعريف:لنفرض أن المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع f موجودة وأن كل منها هي تابع حقيقي معرف على مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ إذا كان للتابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ بحيث أن $i = 1,2, \dots, n$

مشتقاً جزئياً بالنسبة ل x_i فإننا نرمز له ب $\frac{\partial 2f}{\partial {x_i}^2}$ ويسمى بالمشتق الجزئي من المرتبة الثانية بالنسبة للمتغير x_i .

- إذا كان للتابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ مشتقاً جزئياً بالنسبة للمتغير x_j فإننا نرمز له ب:

$$\frac{\partial 2f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \text{أو} \qquad f_{x_i x_j}$$

ونسميه بالمشتق المختلط ونكتب:

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial 2f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

بإسلوب مماثل يمكن تعريف المشتقات والمشتقات المختلطة حتى المرتبة m .

مثال:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ; \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & ; \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

والمطلوب أوجد مايلي:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial 2f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial 2f}{\partial y \partial x}$$

وذلك عند النقطة $(0,0)$

الحل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$
$$= \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{[y(x^2 - y^2) + 2x^2 y].[(x^2 + y^2)] - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & ; (x,y) \neq 0 \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{[-y^3+3x^2y].[(x^2+y^2)]-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y)\neq 0\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-y^5-x^2y^3+3x^2y^3+3x^4y-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y)\neq 0\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-y^5+4x^2y^3+x^4y}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y)\neq 0\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{y(x^4-y^4)+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y)\neq 0\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial 2f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(0-h^4)-0}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{h^5}{h}$$
$$=-1$$

وبأسلوب مماثل نجد أن:

$$\frac{\partial 2f}{\partial x\partial y}(0,0)=f_{xy}(0,0)=1$$

من الواضح أن $f_{xy}(x,y)$ عند النقطة $(0,0)$ لايساوي $f_{yx}(x,y)$ والسؤال هنا متى يتساوى المشتقان المختلطان في نقطة مثل (a,b) من ساحة تعريف التابع f .

وللرد على هذا التساؤل نستعرض المبرهنة التالية.

مبرهنة: ليكن f تابع حقيقي معرف على المجموعة المفتوحة:

$$f: D\subseteq \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

ولنفرض تحقق الشرطين التاليين:

١- المشتقات f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} موجودة في كل نقطة من D .

٢- المشتقان المختلطان f_{xy}, f_{yx} مستمران في النقطة (a,b) من D عندئذٍ يكون:

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

المشتق المتجهي: ليكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

ولتكن c نقطة داخلية ل D ولتكن $u \in \mathbb{R}^n$ يحقق الشرط:

$$\|u\| = 1$$

إذا كانت:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h}$$

موجودة فإننا نرمز لها ب:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h}$$

ملاحظة: من الواضح أن المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير x_i ما هو إلا عبارة عن المشتق المتجهي وفق الإتجاه:

$$u_i = (0,0,0,\dots,1,\dots,0)$$

$$\downarrow$$

$$i$$

مثال:ليكن f تابعاً معرفاً بالمساواة:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad (x,y) = 0 \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq 0 \end{cases}$$

والمطلوب أوجد المشتق المتجهي للتابع f في النقطة $c = (0,0)$ بإتجاه $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل:لدينا $\|u\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$

$$c + uh = (0,0) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h = (0,0) + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$$

$$f(c+uh) = f\left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) = \frac{h^3}{2\sqrt{2}\,h^2} = \frac{h}{2\sqrt{2}}$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2\sqrt{2}} - 0}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

المحاضرة العاشرة **٢٠١٢/٣/٢٨**

تفاضلات التوابع لعدة متغيرات

تعريف: ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ولتكن (a,b) نقطة داخلية لـD عندئذٍ توجد كرة مفتوحة مركزها (a,b) ونصف قطرها $\delta > 0$ حيث δ عدد موجب صغير وهي محتواة بأكملها داخل D

لنفرض أن (h,k) نقطة من $\mathbb{R}^2$ تحقق الشرط:

$$\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} < \delta$$

عندئذٍ إذا وجد عددان حقيقيان A, B بحيث يتحقق الشرط:

$$f(a+h\,,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\;\;\eta(h,k)$$

بحيث أن:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$$

عندئذٍ نقول عن التابع f أنه قابل للمفاضلة في النقطة (a,b) .

- من الواضح أنه إذا كان f قابلاً للمفاضلة وكان $k = 0$ فإن:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h\,,b) - f(a,b)}{h} = A = f_x(a,b)$$

وكما أنه من أجل $h = 0$ فإن:

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(a\,,b+k) - f(a,b)}{k} = B = f_y(a,b)$$

أي أنه يمكن القول أنه إذا كان f قابلاً للمفاضلة في النقطة (a,b) فإن المشتقان الجزئيان f_x, f_y موجودان .

وهكذا نجد أنه إذا كان f قابلاً للمفاضلة عند النقطة (a,b) فإن علاقة التعريف تصبح:

$$f(a+h\,,b+k) - f(a,b) = f_x\,h + f_y\,k + \sqrt{h^2+k^2}\;\;\eta(h,k)$$

تعريف: ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ولتكن (a,b) نقطة داخلية فيD عندئذٍ نسمي:

$$f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k$$

بتفاضل فريشة للتابع f عند النقطة (a,b) ونرمز لذلك ب:

$$(\partial_{(a,b)}f)_{(h,k)} = f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k$$

مثال: أثبت أن التابع:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

المعرف بالعلاقة:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy$$

قابل للمفاضلة في النقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$.

- لدينا

$$\begin{aligned} f(a+h\,,b+k) - f(a,b) \\ &= (a+h)^2 + 2(a+h)(b+k) - a^2 - 2ab = \\ &= h(2a+2b) + k(2a) + h^2 + 2kh \end{aligned}$$

بالمقارنة مع تعريف قابلية المفاضلة نجد :

$$A = 2a + 2b \quad , \quad B = 2a$$

$$\sqrt{h^2+k^2}\ \eta(h,k) = h^2 + 2kh \ \Rightarrow \eta(h,k) = \frac{h^2+2kh}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

وواضح أنه:

$$\frac{h^2+2kh}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$$

وذلك عندما:

$$(h,k) \longrightarrow (0,0)$$

بما أن $\eta(\mathrm{h},\mathrm{k}) \to 0$ فإن f قابل للمفاضلة عند النقطة (a,b) .

ملاحظة:

$$\lim_{\substack{h=k \\ h\to 0}} \eta(\mathrm{h},\mathrm{k}) = l$$

$$\lim_{\substack{k=h\\k\to 0}} \eta(\mathrm{h},\mathrm{k}) = l$$

$$\lim_{\substack{h=\alpha k\\h\to 0}} \eta(\mathrm{h},\mathrm{k}) = l$$

$$\lim_{\substack{k=\alpha h\\k\to 0}} \eta(\mathrm{h},\mathrm{k}) = l$$

إذا كانت النهايات السابقة موجودة وتساوي l فالنهاية الأصلية هي l .

مثال: ليكن f تابعاً معرفاً بالمساواة:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad (x,y) = 0 \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq 0 \end{cases}$$

غير قابل للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

حسب تعريف تفاضل التابع

$$f(h,k) - f(0,0) = f_x(0,0)\, h + f_y(0,0)\, k + \sqrt{h^2+k^2}\ \eta(h,k) \Rightarrow$$

$$\frac{hk}{h^2+k^2} = \sqrt{h^2+k^2}\ \eta(h,k) \Rightarrow \eta(h,k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}\ (h^2+k^2)}$$

وواضح أنه:

$$\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^2)} \neq 0$$

وذلك عندما:

$$(h,k) \longrightarrow (0,0)$$

أي أن النهاية غير موجودة وبالتالي f غير قابل للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

ملاحظة:يمكن تعميم مفهوم قابلية المفاضلة لتابع حقيقي معرف على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^n$ على النحو الأتي:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ولتكن

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

نقطة داخلية لـD عندئذٍ توجد كرة مفتوحة مركزها

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

ونصف قطرها $\delta > 0$ حيث δ عدد موجب صغير وهي محتواة بأكملها داخل D

لنفرض أن

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

نقطة من $\mathbb{R}^n$ تحقق الشرط:

$$\|h\| < \delta$$

عندئذٍ إذا وجدت النقطة

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

بحيث يتحقق الشرط:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, A_i + \|h\|\;\; \eta(h,k) =< h, A > + \|h\|\, \eta(\mathrm{h})$$

بحيث أن:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h,k) = 0$$

عندئذٍ نقول عن التابع f أنه قابل للمفاضلة في النقطة (a,b) .

عندذئذٍ نقول أن التابع f قابل للمفاضلة عند النقطة c .

إذا كان f قابلاً للمفاضلة عند النقطة فعندئذٍ نسمي المجموع (c) $\sum_{i=1}^{n} h_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ بتفاضل فريشة عند النقطة c للتابع f ونرمز لذلك ب:

- $$(\boldsymbol{\partial_c f})_{\boldsymbol{h}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{h_i} \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x_i}}(\boldsymbol{c})$$

مبرهنة: ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

ولتكن c نقطة داخلية ل D إذا كان f قابلاً للمفاضلة عند النقطة c فعندئذٍ يوجد عددان موجبان k, δ بحيث أنه:

$$\|x - c\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < k$$

وعندئذٍ يكون f مستمراً في النقطة c .

<u>**البرهان:**</u> بما أن f قابلاً للمفاضلة عند النقطة c فعندئذٍ يوجد عدد موجب δ_1 وبحيث أنه إذا كانت :

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

نقطة من $\mathbb{R}^n$ تحقق الشرط:

$$\|h\| < \delta_1$$

فعندئذٍ توجد نقطة

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

من $\mathbb{R}^n$ من أجلها يكون:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, A_i + \|h\|\ \eta(h,k)$$

حيث η هو تابع ل h يحقق الشرط:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h,k) = 0$$

من هنا نجد:

$$|f(c+h) - f(c)| \le \left|\sum_{i=1}^{n} h_i\, A_i\right| + \|h\|\ \eta(h,k)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |h_i|.|A_i| + \|h\| \ \eta(h,k)$$

إستناداً إلى المبرهنة التي تحدد العلاقة بين نظيم عنصر من $\mathbb{R}^n$ والقيمة المطلقة لإحدى مركباته نجد:

$$(|h_i| \leq \|h\|)$$

وبالتالي فإن

$$* \ldots\ |f(c+h) - f(c)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|h\| . |A_i| + \|h\| . | \eta(h,k)|$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i| + | \eta(h,k)| \right) \|h\|$$

إستناداً إلى تعريف نهاية تابع ولما كان :

$$\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h) = 0$$

فإنه أياً كان العدد $\forall \varepsilon = 1 > 0$ يوجد $\delta_2 > 0$ وبحيث:

$$\forall\ \varepsilon = 1 > 0\ \exists\ \delta_2 > 0\ \ ;\ \|h\| < \delta_2 \Rightarrow |\eta(h)| < 1$$

وبالتالي يكون لدينا بفرض أن:

$$c + h = x$$

وأن $\delta = \min\{\delta_1 , \delta_2\}$ نجد:

$$\|x - c\| = \|h\| < \delta$$

بالعودة إلى * نجد:

$$|f(x) - f(c)| < \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1 \right) \|h\|$$

أي أن:

$$|f(x) - f(c)| < l. \|x - c\|\ \ ;\ \ l = \sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1$$

وبوضع $\|x-c\| = \frac{\varepsilon}{l}$ نجد:

$$|f(x)-f(c)| < l.\frac{\varepsilon}{l} \quad \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon$$

وذلك عندما $\|x-c\| < \delta$ أي أن f مستمر عند النقطة c وهو المطلوب برهانه.

المحاضرة الثانية عشر **٢٠١٢/٤/٤**

مثال: ليكن لدينا $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعاً معرفاً على النحو:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad y = 0 \\ \dfrac{x}{y} & ; \quad y \neq 0 \end{cases}$$

أثبت أن f غير قابل للإشتقاق في النقطة $(0,0)$.

- لإثبات أن f غير قابل للإشتقاق في النقطة $(0,0)$ يكفي إستناداً للمبرهنة السابقة إثبات أن f غير مستمر في تلك النقطة .
- لو كان f مستمراً في النقطة $(0,0)$ فإنه:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad ; \|x-x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ لنأخذ النقطة:

$$x = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$$

من الواضح أن:

$$\|x-x_0\| = \left\|\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) - (0,0)\right\| = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$$

إلا أن هذا لايؤدي أن :

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

وذلك لأن:

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} - 0\right| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

أي أن f غير مستمر في النقطة $(0,0)$.

مبرهنة: ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

c نقطة داخلية لـD

إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall\, i = 1,2,\dots,n$$

موجودة ومستمرة في جوار ما للنقطة c فعندئذٍ يكون f قابلاً للإشتقاق في c

- يمكن نقل تلك المبرهنة على جميع نقاط D

نتيجة: ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة الجزئية المفتوحة $D \subseteq \mathbb{R}^n$

إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع f موجودة ومستمرة في D فإننا نقول f قابلاً للإشتقاق في D وبحكم العلاقة بين قابلية المفاضلة والإستمرار نجد أنه إذا كان f قابلاً للإشتقاق في المجموعة المفتوحة D فإنه يكون مستكراً عليها .

خواص التوابع القابلة للمفاضلة:

ليكن f, g تابعين حقيقين معرفين على المجموعة الجزئية $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

ولتكن c نقطة داخلية لـD وليكن f, g قابلين للمفاضلة فيc عندئذٍ:

$$1)\ d_c(f+g) = d_c\, f + d_c\, g$$

$$2)\ d_c(\alpha f) = \alpha d_c\, f \qquad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$3) d_c(f.g) = (d_c\, f\,).g_{(c)} + f_{(c)}.(\,d_c\, g)$$

أما بالنسبة للخاصة الرابعة تتعلق بقابلية مفاضلة تابع التابع(**قابلية مفاضلة تركيب تابعين قابلين للمفاضلة).**

- ليكن $u(x,y), v(x,y)$ تابعين حقيقين معرفين على المجموعة المفتوحة $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ولنفرض أن لهذين التابعين مشتقات جزئية من المرتبة الأولى مستمرة وليمن $f(u,v)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة D' من $\mathbb{R}^2$ ولنفرض أن للتابع f مشتقات جزئية من المرتبة الأولى مستمرة في D' ولنضع:
- $g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big) = f(u,v)$

عندئذٍ يوجد للتابع g مشتقان من المرتبة الأولى مستمران في D' والأكثر من ذلك:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال: ليكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معرفاً بالمساواة:

$$f(y,z) = y^2 - z^2$$

وليكن y, z تابعين معرفين بالشكل:

$$y, z: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$y(x) = ax^2 \qquad z(x) = 2ax$$

والمطلوب أوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = (2y)(2ax) +$$
$$+(-2z)(2a) =$$

$$= 4a^2x^3 - 8a^2x$$

تطبيقات التوابع لعدة متغيرات

مبرهنة:(مبرهنة القيمة الوسطى)

$$\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$$

تابع حقيقي فإنه يوجد $\quad 0 < \theta < 1$

بحيث يكون $\quad \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$

- ليكن $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة المفتوحة $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ولنفرض أن D تحوي النقطتين $c, c+h$ وتحوي القطعة المستقيمة الواصلة بهما إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع f موجودة فإن:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(c + \theta h)$$

$$0 < \theta < 1$$

البرهان:

لنضع بالتعريف التابع

$$\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$$

المعرف بالمساواة:

$$\varphi(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{c} + \mathrm{th}) = \mathrm{f}(c_1 + th_1, c_2 + th_2 + \cdots + c_n + th_n) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} . \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

إستناداً إلى مبرهنة مشتق تابع التابع نجد أن:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c + th). \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

والتي يمكن أن تكتب إستناداً إلى مبرهنة مشتق تابع التابع

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c + th). h_i$$

مع العلم أن:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(c_i + th_i) = h_i$$

وإستناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى بالنسبة لمتغير حقيقي نجد:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

ومنه نجد أن:

$$f(c + h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}(c + \theta h)$$

وهو المطلوب برهانه.

نتيجة: إذا كان:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة المفتوحة والمترابطة $D \subseteq \mathbb{R}^n$ وكان f يملك مشتقات جزئية من المرتبة الأولى مستمرة في D وكان

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad \forall\, i = 1,2,..,n$$

فإن $f = const$

المحاضرة الثالثة عشر ٢٠١٢/٤/١١

مبرهنة تايلور لمتغيرين:

ليكن $f(x,y)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية مفتوحة(وحتى نضمن أن جميع نقاطها داخلية) $D \subseteq \mathbb{R}^2$

ولنفرض أن هذا التابع يملك جميع المشتقات الجزئية حتى المرتبة $m + 1$ وأن تلك المشتقات مستمرة ولنفرض أن النقطتين $(a,b), (a+h, b+k)$ والقطعة المستقيمة الواصلة بينهما تقع بأكملها داخل D عندئذٍ يعطى دستور تايلور بالعلاقة:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!}\left(h\,\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^i \ (a,b)$$

وأن :

$$R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}\left(h\,\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{m+1} \ (x + \theta h\,, y + \theta k)$$

ويكون $R_{m+1} \to 0$

وذلك عندما $m \to \infty$

وعندئذٍ يؤول دستور تايلور إلى الشكل:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h\,\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^i \ (a,b)$$

نسمي $f(a+h,b+k)-f(a,b)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(h\,\frac{\partial f}{\partial x}+k\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{i}\ (a,b)$

بتغير التابع عند النقطة (a,b) ونرمز له ب:

$$\Delta\, f_{(a,b)}$$

لنستبدل الأن بدستور تايلور كل:

$$x=a+h\quad,\quad y=b+k$$

عندئذٍ يأخذ دستور تايلور الشكل:

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left((x-a)\,\frac{\partial f}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{i}\ (a,b)$$

وهو مايسمى بنشر تايلور للتابع $f(x,y)$ في جوار النقطة (a,b) .

لنكتب ثلاثة حدود من منشور تايلور:

$$f(x,y)=f(a,b)+\left((x-a)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$$
$$+\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial 2f}{\partial x^2}+2(x-a)(y-b)\frac{\partial 2f}{\partial x\partial y}+(y-b)^2\frac{\partial 2f}{\partial y^2}\right)(a,b)$$
$$+\frac{1}{3!}\Big(\ (x-a)^3\frac{\partial 3f}{\partial x^3}+$$
$$3(x-a)^2(y-b)\frac{\partial 2f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+3(y-b)^2(x-a)\frac{\partial 2f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+(y-b)^3\frac{\partial 3f}{\partial y^3}\Big)(a,b)\ \Big)+\cdots$$

مثال: ليكن لدينا:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

والمعرف بالشكل:

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy$$

أوجد منشور f في جوار $(0,0)$

الحل:

$$i=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(ax^2+2bxy+cy)=2ax+2by \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(ax^2+2bxy+cy)=2bx+c \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=c \end{cases}$$

$$i=2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial 2f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(2ax+2by)=2a \Rightarrow \dfrac{\partial 2f}{\partial x^2}(0,0)=2a \\ \dfrac{\partial 2f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(2bx+c)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial 2f}{\partial y^2}(0,0)=0 \\ \dfrac{\partial 2f}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(2bx+c)=2b \Rightarrow \dfrac{\partial 2f}{\partial x \partial y}(0,0)=2b \end{cases}$$

وعندما $i=3$ نجد أن جميع المشتقات معدومة ومنه يكون منشور تايلور هو:

مع العلم أنا:

$$f(0,0)=0$$

$$f(x,y)=cy+\frac{1}{2}(2ax^2+4bxy)$$

مثال: ليكن لدينا:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

والمعرف بالشكل:

$$f(x,y)=x^2+3xy-2y^3$$

والمطلوب أوجد تزايد f عندما يتغير (x,y) من $(1,2)$ إلى $(1+h,2+k)$.

الحل:

$$\Delta\, f_{(1,2)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(h\,\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{i}\ (1,2)$$

$i = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy - 2y^3) = 2x + 3y \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 8 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy - 2y^3) = 3x - 6y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -21 \end{cases}$$

$i = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial 2f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2x + 3y) = 2 \Rightarrow \dfrac{\partial 2f}{\partial x^2}(1,2) = 2 \\ \dfrac{\partial 2f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(3x - 6y^2) = -12y \Rightarrow \dfrac{\partial 2f}{\partial y^2}(1,2) = -24 \\ \dfrac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x - 6y^2) = 3 \Rightarrow \dfrac{\partial 2f}{\partial x \partial y}(1,2) = 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{i} = 3 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial 3f}{\partial y^3}(0,0) = -12$$

وجميع المشتقات الأخرى أصفاراً وبالتالي يكون لدينا:

$$\Delta\, f_{(1,2)} = \frac{1}{1!}(8\mathrm{h} - 21\mathrm{k}) + \frac{1}{2!}(2h^2 - 24k^2 + 6hk) + \frac{1}{3!}(-12k^3)$$

وهو المطلوب.

------------------------------- --------

القيم العظمى والقيم الصغرى

تعريف: ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^n$

١) نقول عن النقطة c أنها قيمة عظمى نسبية إذا وجد جوار u للنقطة c محتواة في D بحيث يكون:

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{u} \quad \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{f(c)}$$

٢) نقول عن النقطة c أنها قيمة صغرى نسبية إذا وجد جوار u للنقطة c محتواة في D بحيث يكون:

$$\forall\, x \in u \quad f(x) \geq f(c)$$

من الملاحظ أنه: إذا كانت c قيمة عظمى أو صغرى نسبية للتابع f فإن c هي نقطة داخلية لـD .

- إذا كانت C قيمة عظمى نسبية أو صغرى نسبية للتابع f فإننا نقول أن c هي قيمة قصوى لـ f
إذا طلب منا أوجد القيم القصوى لـ f فإنه يوجد لدينا قيم صغرى نسبية وقيم كبرى نسبية.

٣) نسمي كل حل c لجملة المعادلات $\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$ نقطة حرجة للتابع f .

مبرهنة: القيم العظمى والصغرى النسبية للتابع

- ليكن $f(x,y)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^2$ وبحيث:

$$f(x,y): D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ولنفرض أن للتابع مشتقات جزئية حتى المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial 2f}{\partial x^2}, \frac{\partial 2f}{\partial y^2}, \frac{\partial 2f}{\partial x \partial y}$$

ومستمرة ولتكن (a,b) نقطة حرجة للتابع f ولنرمز ب:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

عندئذٍ:

١) إذا كان $0 < \Delta$ وكان $f_{xx}(a,b) > 0$ عندئذٍ (a,b) صغرى نسبية.
٢) إذا كان $0 < \Delta$ وكان $f_{xx}(a,b) < 0$ عندئذٍ (a,b) عظمى نسبية.
٣) إذا كان $0 > \Delta$ عندئذٍ (a,b) ليست قيمى قصوى لـ f.
٤) إذا كان $0 = \Delta$ عندئذٍ (a,b) قد تكون أو لا تكون قيمة قصوى عندئذٍ نلجأ إلى التعريف وذلك لبيان طبيعتها.

ملاحظة:من الواضح أن كل قيمة قصوى نسبية للتابع f هي نقطة حرجة إلا أن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

مثال(١):أوجد النقاط الحرجة للتابع $f(x,y)$ وبين طبيعتها والمعرف ب:

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

الحل:

إن النقاط الحرجة للتابع f السابق نحصل عليها من حل المعادلتين التاليتين:

$$1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$$

$$2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

من المعادلة الأولى ينتج أن:

$$1') \qquad x^2 + y^2 = 5$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$2') \qquad xy = 2$$

من $2'$ نجد:

$y = \frac{2}{x}$ بالتعويض في $1'$ نجد أن:

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

وبحل الأخيرة نجد أن:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

ومنه نجد:

$$(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

ومنه من أجل $x = 1$ وبالتعويض في $2'$ نجد $y = 2$ ومنه $P_1(1,2)$ نقطة حرجة .

من أجل $x = -1$ وبالتعويض في $2'$ نجد $y = -2$ ومنه $P_2(-1,-2)$ نقطة حرجة .

من أجل $x = 2$ وبالتعويض في $2'$ نجد $y = 1$ ومنه $P_3(2,1)$ نقطة حرجة .

من أجل $x = -2$ وبالتعويض في $2'$ نجد $y = -1$ ومنه $P_4(-2,-1)$ نقطة حرجة .

وبالتالي لدينا أربعة نقاط حرجة وهي:

$$P_1(1,2)\,, P_2(-1,-2)\,, P_3(2,1)\,, P_4(-2,-1)$$

من أجل $P_1(1,2)$ لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$f_{xx}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3y^2 - 15) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(1,2) = 6$$

$$f_{yy}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 12) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial y^2}(1,2) = 6$$

$$f_{xy}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 12) = 6y \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(1,2) = 12$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0$$

وبالتالي حسب المبرهنة $P_1(1,2)$ ليست قيمة قصوى للتابع f .

من أجل $P_2(-1,-2)$ لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$f_{xx}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3y^2 - 15) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(-1,-2) = -6$$

$$f_{yy}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 12) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial y^2}(-1,-2) = -6$$

$$f_{xy}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 12) = 6y \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(-1,-2) = -12$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0$$

وبالتالي حسب المبرهنة $P_2(-1,-2)$ ليست قيمة قصوى للتابع f .

من أجل $P_3(2,1)$ لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$f_{xx}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3y^2 - 15) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(2,1) = 12$$

$$f_{yy}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 12) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial y^2}(2,1) = 12$$

$$f_{xy}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 12) = 6y \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(2,1) = 6$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108 < 0$$

وبما أن $f_{xx}(a,b) > 0$

وبالتالي حسب المبرهنة $P_3(1,2)$ قيمة صغرى نسبية للتابع f .

من أجل $P_4(-2,-1)$ لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$f_{xx}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3y^2 - 15) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(-2,-1) = -12$$

$$f_{yy}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 12) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial y^2}(-2,-1) = -12$$

$$f_{xy}(a,b) = \frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 12) = 6y \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(-2,-1) = -6$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108 < 0$$

وبما أن $f_{xx}(a,b) < 0$

وبالتالي حسب المبرهنة $P_3(1,2)$ قيمة عظمى نسبية للتابع f .

مثال(٢): ادرس القيم القصوى للتابع

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

الحل: لدراسة القيم القصوى لابد أن نوجد النقاط الحرجة للتابع f .

إن النقاط الحرجة للتابع f السابق نحصل عليها من حل المعادلتين التاليتين:

$$1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - \frac{1}{2}(x-y) = 0$$

$$2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + \frac{1}{2}(x-y) = 0$$

من المعادلة الأولى ينتج أن:

$$1') \qquad x^3 = \frac{1}{8}(x-y)$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$2') \qquad y^3 = -\frac{1}{8}(x-y)$$

وبجمع $1'$ مع $2'$ نجد:

$$x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x^3 = -y^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\ } \Rightarrow x = -y \quad *$$

وبتعويض الأخيرة في $1'$ نجد:

$$x^3 = \frac{1}{8}(x+x) \Rightarrow x^3 = \frac{1}{4}x \Rightarrow$$

إما $x = 0$ وبالتعويض في * نجد $P_1(0,0)$ وهي نقطة حرجة للتابع f

أو $x^2 = \frac{1}{4}$ ومنه نجد أن $x = \pm\frac{1}{2}$ وبالتعويض في * نجد النقطتين الحرجتين التاليتين:

$$P_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad , \quad P_3\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

وبالتالي لدينا ثلاثة نقاط حرجة وهي:

$$P_1(0,0)\,, P_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\,, P_3\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

من أجل $P_1(0,0)$ لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$f_{xx} = \frac{\partial 2f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3 - \frac{1}{2}(x-y)\right) = 12x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{-1}{2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial 2f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4y^3 + \frac{1}{2}(x-y)\right) = 12y^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{-1}{2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4y^3 + \frac{1}{2}(x-y)\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{1}{2}$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 108 > 0$$

وبالتالي حسب المبرهنة $P_1(1,2)$ قد تكون أولا تكون قيمة قصوى وبالتالي نلجأ إلى التعريف لتبيان طبيعتها.

لندرس طبيعة النقطة $(0,0)$ وذلك بدراسة التابع f في جوار تلك النقطة ومن أجل ذلك نحسب:

$$f(0+h\,,0+k), f(0+h,0), f(0,0+k)$$

ولنقارن تلك النتائج مع $f(0,0)$

في الواقع لدينا:

$$f(0,0) = 0$$

$$f(h,0) = h^4 - \frac{1}{4}h^2 < 0$$

$$f(0,k) = k^4 - \frac{1}{4}k^2 < 0$$

لم يغير إشارته لنحسب:

$$f(h,k)=h^4+k^4-\frac{1}{4}(h-k)^2$$

وبحالة خاصة إذا أخذنا $h=k$ نجد:

$$f(h,k)=2h^4>0$$

وبالتالي النقطة السابقة ليست قيمة قصوى للتابع

من أجل $P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$f_{xx}=\frac{\partial 2f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3-\frac{1}{2}(x-y)\right)=12x^2-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\partial 2f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial 2f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(4y^3+\frac{1}{2}(x-y)\right)=12y^2-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\partial 2f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

$$f_{xy}=\frac{\partial 2f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(4y^3+\frac{1}{2}(x-y)\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\partial 2f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{4}-\frac{25}{4}=\frac{-24}{4}=-6<0$$

وبما أن $f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{2}>0$

وبالتالي حسب المبرهنة $P_2\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$ هي قيمة صغرى نسبية للتابع f .

من أجل $P_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$f_{xx}=\frac{\partial 2f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3-\frac{1}{2}(x-y)\right)=12x^2-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\partial 2f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial 2f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(4y^3+\frac{1}{2}(x-y)\right)=12y^2-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\partial 2f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

$$f_{xy}=\frac{\partial 2f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(4y^3+\frac{1}{2}(x-y)\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\partial 2f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}-\frac{25}{4}=\frac{-24}{4}=-6<0$$

وبما أن $f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{2}>0$

وبالتالي حسب المبرهنة $P_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ هي قيمة صغرى نسبية للتابع f .

المحاضرة الرابعة عشر **٢٠١٢/٤/٢٢**

تمرين: أوجد أصغر مسافة بين النقطة $M(2,2,-3)$ والمستوي الذي معادلته

$$2x+y-2z=4$$

الحل: إن دستور البعد بين نقطتين هو:

$$l=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2}\ \Rightarrow$$

$$l^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2$$

ولكن من معادلة المستوي نجد أن:

$$z=x+\frac{1}{2}y-2$$

لنفرض أن:

$$l^2 = F(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x + \frac{1}{2}y + 1)^2$$

ولنوجد القيم القصوى الصغرى ل $F(x,y)$

ولابد من إيجاد النقاط الحرجة أولاً للتابع $F(x,y)$

إن النقاط الحرجة للتابع F السابق نحصل عليها من حل المعادلتين التاليتين:

$$1) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-2) + 2(x + \frac{1}{2}y + 1) = 0$$

$$2) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-1) + (x + \frac{1}{2}y + 1) = 0$$

من المعادلة الأولى ينتج أن:

$$1') \quad 4x + y - 2 = 0$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$2') \qquad \frac{5}{2}y + x - 1 = 0$$

من $2'$ نجد:

$x = 1 - \frac{5}{2}y$ بالتعويض في $1'$ نجد أن:

$$4\left(1 - \frac{5}{2}y\right) + y - 2 = 0$$

وبحل الأخيرة نجد أن:

$$-9y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{9}$$

وبالتعويض في $2'$ نجد:

$$\frac{5}{9} + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

وبالتالي نجد النقطة الحرجة:

$$P\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

ولندرس طبيعتها

لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xy}(a,b) & F_{xx}(a,b) \\ F_{yy}(a,b) & F_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$F_{xx} = \frac{\partial 2F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2(x-2) + 2(x + \frac{1}{2}y + 1)\right) = 4 \Rightarrow \frac{\partial 2F}{\partial x^2}\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) = 4$$

$$F_{yy} = \frac{\partial 2F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2(y-1) + (x + \frac{1}{2}y + 1)\right) = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{\partial 2F}{\partial y^2}\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) = \frac{5}{2}$$

$$F_{xy}(a,b) = \frac{\partial 2F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2(y-1) + (x + \frac{1}{2}y + 1)\right) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{\partial 2F}{\partial y \partial x}\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) = 1$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 = -9 < 0$$

وبما أن $f_{xx}\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) = 4 > 0$

وبالتالي حسب المبرهنة $P\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$ قيمة صغرى نسبية للتابع f .

لنوجد قيمة z المحققة ل $z = x + \frac{y}{2} - 2$

$$z = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 2 \Rightarrow z = \frac{-13}{9}$$

وبالتالي تكون لدينا النقطة من المستوي وهي $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{-13}{9}\right)$

وتكون المسافة بين النقطة المعطاة ونقطة من المستوي مساويةً

ل $l = \frac{7}{3}$ وهي أصغر مسافة بين النقطة المعطاة والمستوي المعطى في السؤال وهو المطلوب.

تمرين: إحسب أصغر مسافة بين النقطة $(1,-1,1)$ والسطح:

$$\{\,(x,y,z)\,;z=x.y\}$$

الحل: إن دستور البعد بين نقطتين هو:

$$l=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}\;\Rightarrow$$

$$l^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2$$

ولكن من معادلة السطح نجد أن:

$$z=x.y$$

لنفرض أن:

$$l^2=F(x,y)=(x-1)^2+(y+1)^2+(x.y-1)^2$$

ولنوجد القيم القصوى الصغرى ل $F(x,y)$

ولابد من إيجاد النقاط الحرجة أولاً للتابع $F(x,y)$

إن النقاط الحرجة للتابع F السابق نحصل عليها من حل المعادلتين التاليتين:

$$1)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}=2(x-1)+2y(xy-1)=0$$

$$2)\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=2(y+1)+2x(xy-1)=0$$

من المعادلة الأولى ينتج أن:

$$1')\quad x-1+xy^2-y=0$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$2')\qquad y+1+yx^2-x=0$$

من $2'$ نجد:

$$y(x^2+1)=x-1\Rightarrow y=\frac{x-1}{(x^2+1)}$$

بالتعويض في $1'$ نجد أن:

$$x-1+x\left(\frac{x-1}{(x^2+1)}\right)^2-\frac{x-1}{(x^2+1)}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x^2+1)^2+x(x-1)^2-(x-1)(x^2+1)}{x^2+1}=0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2+1)^2+x(x-1)^2-(x-1)(x^2+1)=0$$

ومنه نجد أن:

$$(x-1)(x^4+2x^2+1)+x(x^2-2x+1)-(x^3+x-x^2-1)=0$$

ومنه

$$x^5+2x^3+x-x^4-2x^2-1+x^3-2x^2+x-x^3-x+x^2+1=0$$

ومنه

$$x^5-x^4+2x^3-x^2+x=0 \Rightarrow x(x^4-x^3+2x^2-x+1)=0$$

ومنه نجد $x=0$ حل للمعادلة الأخيرة وبالتعويض في المعادلة $1'$ نجد $y=-1$ ومنه لدينا النقطة $P(0,-1)$ نقطة حرجة للتابع F

ولندرس طبيعتها

لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta=\begin{vmatrix} F_{xy}(a,b) & F_{xx}(a,b) \\ F_{yy}(a,b) & F_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$F_{xx}=\frac{\partial 2F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2(x-1)+2y(xy-1))=2+2y^2$$
$$\Rightarrow \frac{\partial 2F}{\partial x^2}(0,-1)=4$$

$$F_{yy}=\frac{\partial 2F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(2(y+1)+2x(xy-1))=2+2x^2$$
$$\Rightarrow \frac{\partial 2F}{\partial y^2}(0,-1)=2$$

$$F_{xy}(a,b) = \frac{\partial 2F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2(y+1) + 2x(xy-1))$$

$$= 2(xy-1) + 2xy \Rightarrow \frac{\partial 2F}{\partial y \partial x}(0,-1) = -2$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 8 = -4 < 0$$

وبما أن $f_{xx}(0,-1) = 4 > 0$

وبالتالي حسب المبرهنة $P(0,-1)$ قيمة صغرى نسبية للتابع F .

لنوجد قيمة z المحققة ل $z = xy$

$$z = 0$$

وبالتالي تكون لدينا النقطة من المستوي وهي $(0,-1,0)$

وتكون المسافة بين النقطة المعطاة ونقطة من السطح مساويةً

ل $l = \sqrt{2}$ وهي أصغر مسافة بين النقطة المعطاة والسطح المعطى وهو المطلوب.

مثال: مثل العدد المجب $a > 0$ على شكل جداء ثلاثة أعداد موجبة بحيث يكون مجموع هذه الأعداد أصغر مايمكن.

الحل:

لنفرض أن تلك الأعداد هي x, y, z وبالتالي:

$$x.y.z = a$$

لنبحث عن القيم القصوى للتابع

$$F(x,y) = x + y + \frac{a}{x.y}$$

ولابد من إيجاد النقاط الحرجة أولاً للتابع $F(x,y)$

إن النقاط الحرجة للتابع F السابق نحصل عليها من حل المعادلتين التاليتين:

$$1) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{a}{x^2 y} = 0$$

$$2) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{a}{xy^2} = 0$$

إن الحل المشترك للمعادلتين السابقتين هو:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}\right)$$

وهي نقطة حرجة انرى فيما إذا كانت قيمة صغرى:

لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xy}(a,b) & F_{xx}(a,b) \\ F_{yy}(a,b) & F_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$F_{xx} = \frac{\partial 2F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{a}{x^2 y}\right) = \frac{2a}{x^3 y} \Rightarrow \frac{\partial 2F}{\partial x^2}\left(a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}\right) = 2a^{\frac{-1}{3}}$$

$$F_{yy} = \frac{\partial 2F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{a}{xy^2}\right) = \frac{2a}{y^3 x} \Rightarrow \frac{\partial 2F}{\partial y^2}\left(a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}\right) = 2a^{\frac{-1}{3}}$$

$$F_{xy}(a,b) = \frac{\partial 2F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{a}{xy^2}\right) = \frac{a}{x^2 y^2} \Rightarrow \frac{\partial 2F}{\partial y \partial x}\left(a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}\right) = a^{\frac{-1}{3}}$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^{\frac{-1}{3}} & 2a^{\frac{-1}{3}} \\ 2a^{\frac{-1}{3}} & a^{\frac{-1}{3}} \end{vmatrix} = \mathrm{a}^{\frac{-2}{3}} - 4a^{\frac{-2}{3}} = -3a^{\frac{-2}{3}} < 0$$

وبما أن $f_{xx}\left(a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}\right) = 2a^{\frac{-1}{3}} > 0$

وبالتالي حسب المبرهنة $P\left(a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}\right)$ قيمة صغرى نسبية للتابع F .

ويكون لدينا:

$$z = a^{\frac{1}{3}}$$

ومنه يكون لدينا:

$$a = a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}$$

$$a = a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}$$

المحاضرة الخامسة عشر **٢٠١٢/٤/٢٥**

التوابع الضمنية

تمهيد: ليكن $F(x,y)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة الجزئية المفتوحة $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ولندرس تلك النقاط الواقعة في D والتي من أجلها يكون $F(x,y) = 0$

إذا قابل كل قيمة لـx من I قيمة واحدة فقط للمتغير y **(أي إذا كان $y = f(x)$)** بحيث تؤول المعادلة السابقة إلى مطابقة فإننا نقول عندئذٍ عن المعادلة $F(x,y) = 0$ المحلولة بالنسبة لـy أنها تعرف تابعاً ظاهراً **(استطعنا التعبير عن y مباشرةً بدلالة x).**

أما إذا كانت المعادلة $F(x,y) = 0$ غير محلولة بالنسبة ل y فعندئذٍ نقول عن التابع $y = f(x)$ أنه يشكل تابعاً ضمنياً (**$F(x,y)$ تعرف تابعاً ضمنياً**) وعلى سبيل المثال إذا أخذنا المعادلة:

$$4x^2 + y^2 = 1$$

من الواضح أن:

$$y_1 = \sqrt{1 - 4x^2} \quad , \quad y_2 = -\sqrt{1 - 4x^2}$$

وهما تابعان معرفان في المجال $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ وإذا عوضنا كل منهما في المعادلة فإنها تؤول إلى مطابقة إلا أن الأمر ليس بهذه البساطة فمثلاً إذا أخذنا:

$$x^4y^{13} + 7x^2y^7 - 6 = 0$$

فإننا نلاحظ أن التعبير عن y بدلالة x غير ممكن في حال وجوده.

إن مايهمنا هو موضوع وجود التابع الضمني المعطى بالمعادلة $F(x,y) = 0$ بغض النظر عن إمكانية التعبير عنه بشكل تحليلي .

تعريف: ليكن $F(x,y)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة مفتوحة $D \subseteq \mathbb{R}^2$ نقول عن المعادلة $F(x,y) = 0$ أنها تحدد تابعاً ضمنياً **(يعبر عنه بالتابع الظاهر $y = f(x)$)** في المستطيل:

$$R = \{\, |x - x_0| < \delta \ \ , |y - y_0| < \delta \,\}$$

إذا قابل كل $x \in \ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ جذراً واحداً $y = f(x)$ في المجال

$F(x,y)=0 \quad , \; y=f(x)$ وفي هذه الحالة يكون التابعان $]y_0-\delta, y_0+\delta[$
متكافئين في المستطيل R .

سنستعرض فيما يلي المبرهنة التي تعطي الشروط التي يجب أن يخضع لها التابع لكي يعبر عنه بتابع ظاهر.

مبرهنة: ليكن $F(x,y)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة مفتوحة $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ويحقق الشروط الآتية:

١- يوجد للتابع $F(x,y)$ مشتقان جزئيان $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ في جوار النقطة (x_0,y_0) وهذان المشتقان مستمران في تلك النقطة.

٢- $F(x_0,y_0)=0$

٣- $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

وعندئذٍ يتحقق مايلي:

أ) يوجد مستطيل R يحقق المتراجحتين:

$$|x-x_0|<\delta \quad \text{و} \quad |y-y_0|<\delta$$

وبحيث يقابل كل نقطة $x \in \;]x_0-\delta, x_0+\delta[$ حل وحيد $y=f(x)$

ب) قيمة التابع f في النقطة x_0 هي y_0 أي $y_0=f(x_0)$

ج) f مستمر في المجال $]x_0-\delta, x_0+\delta\,[$

د) $f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}$

مثال: $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$F(x,y)=x-y^3$$

والمطلوب هل يمكن حل المعادلة $F(x,y)=0$ بشكل وحيد بالنسبة ل$(1,1)$

الحل:حسب المبرهنة لنتأكد من الشروط:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1 \quad , \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-3y^2$$

من الواضح أن المشتقان الجزئيان من المرتبة الأولى موجودان في جوار النقطة $(1,2)$ ومستمران عندها.

$$F(1,1)=0$$

$$F_y(1,1) = -3 \neq 0$$

وعندئذٍ x, y يحقق المتراجحتين:

$$|x-1| < \delta \quad \text{و} \quad |y-1| < \delta$$

وبحيث يقابل كل نقطة $]1-\delta, 1+\delta[\ \ni x$ حل وحيد $y = f(x)$

$$f(1) = 1$$

f مستمر في المجال $]1-\delta, 1+\delta\,[$

$$f'(x) = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \neq 0$$

ملاحظة:إن المبرهنة السابقة تحدد شروطاً كافية لو تحققت لتأكد وجود التابع الضمني المطلوب.

إلا أن هذه الشروط ليست لازمة إذ أنه قد يختل أحد الشروط ومع ذلك يكون التابع ضمنياً على سبيل المثال نلاحظ أنه في المثال السابق

$$F_y(0,0) = \mathbf{0}$$

ومع ذلك فإن التابع المعطى يعبر عنه بالشكل $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x^3}}$ إلا أننا نلاحظ أن:

$$\boldsymbol{f(0)} =^{?}= \text{غير موجودة}$$

الأمر الذي يبين ماسبق.

- لننتقل الأن إلى الحالة الأعم: ليكن F تابعاً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^5$ مفتوحة ولنبحث في مسألة وجود حل:

$$u = f(x,y,z) \quad , \quad v = g(x,y,z)$$

للمعادلتين:

$$F(x,y,z,u,v) = 0 \quad , \quad G(x,y,z,u,v) = 0$$

وبغية ذلك لنعرف المعين اليعقوبي .

- يعرف المعين اليعقوبي بالنسبة ل u, v على النحو:

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

مبرهنة: ليكن

$$F(x,y,z,u,v)=0 \quad , \quad G(x,y,z,u,v)$$

تابعين حقيقين معرفين على مجموعة مفتوحة $D \subseteq \mathbb{R}^5$ يحققان الشروط التالية:

١- للتابعين F,G مشتقات جزئية من المرتبة الأولى بالنسبة لجميع متغيراته في جوار النقطة (x_0,y_0,z_0,u_0,v_0) وهذه المشتقات مستمرة في تلك النقطة.

٢-

$$F(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)=0 \quad , \quad G(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)=0$$

٣- المعين اليعقوبي غير معدوم

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$$

$$J(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0) \neq 0$$

عندئذٍ

أ) يوجد مستطيل R يحقق المتراجحات:

$$|x-x_0|<\delta \quad \text{و} \quad |y-y_0|<\delta$$

$$|z-z_0|<\delta$$

$$|u-u_0|<\delta_1 \quad \text{و} \quad |v-v_0|<\delta_1$$

بحيث يقابل كل نقطة حل وحيد:

$$u=f(x,y,z)$$

$$v=g(x,y,z)$$

ب)

$$u_0=f(x_0,y_0,z_0)$$

$$v_0=g(x_0,y_0,z_0)$$

ج) f,g مستمران في جوار (x_0,y_0,z_0)

د) يوجد للتابعين مشتقات جزئية من المرتبة الأولى مستمرة وتعطى ب:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)}$$

مثال: هل يمكن حل جملة المعادلتين:

$$F: u + v - x^2 + y = 0$$

$$G: u^2 + v^2 - x^2 - y = 0$$

بشكل وحيد بالنسبة لu, v وذلك بجوار النقطة $(2,1,1,2)$

الحل:

من الواضح أن كل من F, G يملك مشتقات جزئية في جوار تلك النقطة وهي مستمرة عندها

$$F(2,1,1,2) = 0$$

$$G(2,1,1,2) = 0$$

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

أي أنه يوجد مستطيل يحقق المتراجحات:

$$|x-2| < \delta \quad \text{و} \quad |y-1| < \delta$$

$$|u-1| < \delta_1 \quad \text{و} \quad |v-2| < \delta_1$$

بحيث يقابل كل نقطة حل وحيد:

$$u = f(x, y)$$

$$v = g(x, y)$$

المحاضرة السادسة عشر والأخيرة ٢٠١٢/٤/٢٩

مبادئ نظرية التوابع الشعاعية(المتجهية) لعدة متغيرات

تناولنا فيما سبق مفاهيم النهاية والإستمرار والإشتقاق وقابلية المفاضلة لتوابع حقيقية لعدة متغيرات سنحاول فيما يأتي تعميم تلك المفاهيم على التوابع الشعاعية لعدة متغيرات أي تلك التوابع المعرفة على مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}^m$ وسنقوم بذلك بإيجاز.

تعريف:ليكن

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

تابعاً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$ عندئذٍ نقول عن f أنه تابع شعاعي(متجهي) لـn متغير أي:

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n) \to f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots f_m(x)\big)$$

نسمي $f_i \;\; ; i = 1,2, \dots m$ مركبات التابع f

مثال:

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

وبحيث أن:

$$D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 1 \,\}$$

$$f(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 + y^2}\right)$$

من الواضح أن مجموعة قيم f هي عبارة عن **(الجزء العلوم من الكرة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2 = 1$).**

مثال أخر: ليكن لدينا التابع:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

وبحيث أن:

$$t \to (cost, sint, t)$$

إن مجموعة قيم f هي عبارة عن **(لولب داخل إسطوانة)**

ومعادلته هو:

$$\{\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 \quad ; \ \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 \le \mathbf{1} \,\}$$

- يمكن نقل العمليات الجبرية من جمع وطرح وضرب وقسمة من التوابع الحقيقية لعدة متغيرات إلى التوابع المتجهية لعدة متغيرات.

التابع الخطي: نقول عن التابع:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

أنه تابع خطي إذا حقق الشرطين التاليين:

$$1)\ \ f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad ; \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$2)\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \ \ ; \alpha \in \mathbb{R}\,, x \in \mathbb{R}^n$$

وبعبارة أخرى نقول عن f أنه خطي إذا حقق الخاصة الجمعية وحقق خاصية التجانس.

كما ويمكن دمج الشرطين السابقين بشرط مكافئ وهو:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \ ; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ , \ \ x, y \in \mathbb{R}^n$$

نرمز لأي عنصر $x \in \mathbb{R}^n$ بمصفوفة عمودية والتي هي:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

كما نرمز للتابع :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

والذي مركباته: $(f_1, f_2, \dots, f_m)$

بمصفوفة العمود:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

خطياً هو أن يكون:

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{(n-1)1}x_1 + a_{(n-1)2}x_2 + \cdots + a_{(n-1)m}x_n \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n \end{pmatrix}$$

وبحيث أن:

$a_{i\ j}$ أعداد حقيقية

البرهان:

بما أن f خطي فإن:

$$f(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = a_1f(x_1) + \cdots + a_2f(x_2)\ ;\ a_i\ , x_i \in \mathbb{R}$$

إن كل عنصر $x \in \mathbb{R}^n$ يمكن أن يكتب على الشكل:

$$x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

حيث $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$

$$x_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, i = 1,2, \dots, n$$

$\{e_i\}$ هي القاعدة القانونية(الأساس القانوني) من $\mathbb{R}^n$ وبحكم خطية f نجد:

$$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n)$$

وبفرض أن:

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$f(x) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{(n-1)1}x_1 + a_{(n-1)2}x_2 + \cdots + a_{(n-1)m}x_n \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n \end{pmatrix}$$

والتي يمكن أن تكتب بالشكل:

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

وهو المطلوب برهانه.

دورة $(2012 - 2011)$ مع الحل.

السؤال الأول(30):

١- عرف مايأتي: النقطة الحدية-المجموعة المتراصة-تفاضل فريشه لتابع $f(x,y)$ – التطبيق الخطي .

النقطة الحدية: نقول عن النقطة $x \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة حدية للمجموعة S من $\mathbb{R}^n$ إذا تقاطع كل جوار للنقطة x مع S بنقطة واحدة على الأقل مغايرة لـx.

نسمي مجموعة النقاط الحدية باسم المجموعة المشتقة للمجموعة S ونرمز لها بالرمز:

$$S' \quad \text{أو} \quad \partial S$$

المجموعة المتراصة: نقول عن أسرة المجموعات الجزئية u_i من $\mathbb{R}^n$ أنها تشكل تغطية للمجموعة الجزئية $S \subseteq \mathbb{R}^N$ إذا كان:

$$S \subseteq \bigcup_i \{u_i\}$$

- إذا كانت عناصر u_i مجموعات مفتوحة وكانت
- $S \subseteq \bigcup_i \{u_i\}$ فإننا نقول عن تلك الأسرة أنها تشكل تغطية مفتوحة لـ S
- نقول عن المجموعة الجزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها مجموعة متراصة إذا حوت كل تغطية مفتوحة لـ S على تغطية جزئية منتهية لـ S .

تفاضل فريشه لتابع $f(x,y)$: ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ولتكن (a,b) نقطة داخلية فيD عندئذٍ نسمي:

$$f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k$$

بتفاضل فريشة للتابع f عند النقطة (a,b) ونرمز لذلك ب:

$$(\partial_{(a,b)}f)_{(h,k)} = f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k$$

التطبيق الخطي: نقول عن التابع:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

أنه تابع خطي إذا حقق الشرطين التاليين:

$$1)\ f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad ;\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$$

$$2)\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad ;\alpha \in \mathbb{R}\,, x \in \mathbb{R}^n$$

وبعبارة أخرى نقول عن f أنه خطي إذا حقق الخاصة الجمعية وحقق خاصية التجانس.

كما ويمكن دمج الشرطين السابقين بشرط مكافئ وهو:

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)\ ;\ \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \ ,\ \ x,y\in\mathbb{R}^n$$

٢- أثبت أنه إذا كان X فضاء جداء داخلي فإن العلاقة: $\|x\|=\sqrt{<x\,,x>}$ تعرف نظيماً على X ثم أثبت أن النظيم المعرف في الفضاء $\mathbb{R}^3$ بالمساواة: $\|x\|=|x_1|+|x_2|+|x_3|$

غير مولد من جداء داخلي.

إثبات أن $\|x\|=\sqrt{<x\,,x>}$ تعرف نظيماً على X

لدينا

$$<x,x>\geq 0\Rightarrow\|x\|\geq 0\qquad\forall x\in X\|x\|=0\Leftrightarrow\sqrt{<x\,,x>}=0\Leftrightarrow$$
$$<x\,,x>=0\Leftrightarrow x=0$$

$$\|a.x\|=\sqrt{<ax\,,ax>}=\sqrt{a^2<x\,,x>}=|a|\sqrt{<x\,,x>}=|a|.\|x\|$$

$$\|x+y\|^2=<x+y\,,x+y\geq<x\,,x>+<y\,,x>+$$

$$+<x\,,y>+<y\,,y>=$$

$$=\|x\|^2+2<x\,,y>+\|y\|^2\leq\|x\|^2+2|<x\,,y>|+\|y\|^2$$

$$\leq\|x\|^2+2\|x\|.\|y\|+\|y\|^2=$$

$$=(\|x\|+\|y\|)^2\Rightarrow\|x+y\|^2\leq(\|x\|+\|y\|)^2\Rightarrow$$

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

- إثبات أن النظيم المعرف في الفضاء $\mathbb{R}^3$ بالمساواة: $\|x\|=|x_1|+|x_2|+|x_3|$

غير مولد من جداء داخلي.

لإثبات النفي يكفي إيراد مثال:

لنأخذ $x=(1,-1,0)\quad,\quad y=(1,1,0)\ \in\mathbb{R}^3$

لدينا:

$$\|x+y\|=\|(1,-1,0)+(1,1,0)\|=\|(2,0,0)\|=|2|+|0|+|0|=2$$
$$\Rightarrow\|x+y\|^2==4$$

$$\|x-y\|=\|(1,-1,0)-(1,1,0)\|=\|(0,-2,0)\|=|0|+|-2|+|0|$$
$$=2\Rightarrow\|x-y\|^2=4$$

$$\|x\| = \|(1,-1,0)\| = |1| + |-1| + |0| = 2 \Rightarrow \|x\|^2 = 4$$

$$\|y\| = \|(1,1,0)\| = |1| + |1| + |0| = 2 \Rightarrow \|y\|^2 = 4$$

$$S_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 4 = 8$$

$$S_2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(4+4) = 16$$

ومنه نجد أن:

$$S_1 \neq S_2$$

أي أن النظيم لايولد بجداء داخلي وذلك لأنه لم يحقق قاعدة متوازي الأضلاع.

السؤال الثاني(25):

١- أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتتالية $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ العنصر

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n)$$

في $\mathbb{R}^n$ حيث $x_m = ({x_1}^{(m)}, {x_2}^{(m)}, \dots {x_n}^{(m)})$ هو أن تتقارب المتتاليات $\{{x_1}^{(m)}\}, \{{x_2}^{(m)}\}, \dots, \{{x_n}^{(m)}\}$ من الأعداد $x_1, x_2, \dots x_n$ على الترتيب.

الإثبات:

لزوم الشرط: لنفرض أن المتتالية $\{x_m\}_{m\geq1}^{\infty}$ متقاربة من $x \in \mathbb{R}^n$ وحسب تعريف تقارب المتتالية في $\mathbb{R}^n$.

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists\, N_\varepsilon \,;\, \|x_m - x\| < \varepsilon \,;\forall m > N_\varepsilon$$

وحسب متراجحة شفارتز نجد:

$$\left|{x_i}^{(m)} - x_i\right| \leq \|x_m - x\| < \mathcal{E} \quad \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists\, N_\varepsilon \,;\, \|x_{im} - x_i\| < \varepsilon \,;\forall m > N_\varepsilon$$

وهو تعريف نتقارب متتالية من R إذاً المتتالية $\{{x_i}^{(m)}\}_{m\geq1}^{\infty}$ متقاربة من x_i في R

$$\forall\, i = 1,2, \dots n$$

$$\forall m = 1,2, \dots ..$$

كفاية الشرط: لنفرض أن المتتالية $\{{x_i}^{(m)}\}_{m\geq1}^{\infty}$ متقاربة من x_i في R

عندئذٍ إستناداً إلى تعريف التقارب في R من أجل:

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists \, N_\varepsilon \; ; \; \left\| x_i{}^{(m)} - x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad ; \forall m > N_\varepsilon$$

حسب تعريف النظيم في $\mathbb{R}^n$ نجد:

$$\|x_m - x\|^2 = (x_1{}^{(m)} - x_1)^2 + (x_2{}^{(m)} - x_2)^2 + \cdots + \left(x_n{}^{(m)} - x_2\right)^n =$$

$$= |x_1{}^{(m)} - x_1|^2 + |x_2{}^{(m)} - x_2|^2 + \cdots + |x_n{}^{(m)} - x_n|^n$$

$$< \frac{\varepsilon^2}{n} + \frac{\varepsilon^2}{n} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \quad \|x_m - x\| < \varepsilon \quad ; \forall \, m > N_\varepsilon$$

وبالتالي المتتالية $\{x_m\}_{m\geq 1}^{\infty}$ متقاربة من x.

٢- أثبت أنه:إذا كان $f(x)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة D من $\mathbb{R}^n$ وكانت D تحوي النقطتين $c, c+h$ والقطعة المستقيمة الواصلة بينهما وكانت جميع المشتقات الأولى للتابع f موجودة ومستمرة فإن:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c + \theta h) \; ; 0 < \theta < 1$$

الإثبات:

لنضع بالتعريف التابع

$$\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$$

المعرف بالمساواة:

$$\varphi(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{c} + \mathrm{th}) = \mathrm{f}(c_1 + th_1, c_2 + th_2 + \cdots + c_n + th_n) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} . \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

إستناداً إلى مبرهنة مشتق تابع التابع نجد أن:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c + th) . \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

والتي يمكن أن تكتب إستناداً إلى مبرهنة مشتق تابع التابع

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(c+th).\,h_i$$

مع العلم أن:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(c_i+th_i)=h_i$$

وإستناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى بالنسبة لمتغير حقيقي نجد:

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)\quad ;\ 0<\theta<1$$

ومنه نجد أن:

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n}h_i\,.\frac{\partial f}{\partial x_i}(c+\theta h)$$

وهو المطلوب برهانه.

السؤال الثالث(45):

١- أوجد النقاط الحرجة للتابع $f(x,y)=x^3+12xy+y^3$ وبين طبيعة كل منها.

الحل: إن النقاط الحرجة للتابع f السابق نحصل عليها من حل المعادلتين التاليتين:

$$1)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+12y=0$$

$$2)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2+12x=0$$

من المعادلة الأولى ينتج أن:

$$1')\qquad x^2+4y=0$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$2')\qquad y^2+4x=0$$

من $2'$ نجد:

* $x=-\frac{y^2}{4}$ بالتعويض في $1'$ نجد أن:

$$\left(-\frac{y^2}{4}\right)^2 + 4y = 0 \Rightarrow \frac{y^4}{16} + 4y = 0 \Rightarrow y^4 + 64y = 0$$

وبحل الأخيرة نجد أن:

$$y^4 + 36y = 0 \Rightarrow y(y^3 + 64) = 0$$

ومنه نجد:

$$y = 0$$

أو:

$$y^3 + 64 = 0 \Rightarrow y^3 = -64 \Rightarrow y = -4$$

ومنه من أجل $y = 0$ وبالتعويض في $*$ نجد $y = 0$ ومنه $P_1(0,0)$ نقطة حرجة .

من أجل $y = -4$ وبالتعويض *نجد $y = -4$ ومنه $P_2(-4,-4)$ نقطة حرجة .

وبالتالي لدينا نقطتين حرجتين وهما:

$$P_1(0,0)\,, P_2(-4,-4)$$

من أجل $P_1(0,0)$ لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$f_{xx}0 = \frac{\partial 2f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 12y) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

$$f_{yy} = \frac{\partial 2f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 + 12x) = 6y \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$$f_{xy} = \frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 + 12x) = 12 \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(0,0) = 12$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144 > 0$$

وبالتالي حسب المبرهنة $P_1(0,0)$ ليست قيمة قصوى للتابع f .

من أجل $P_2(-4,-4)$ لنحسب Δ حسب المبرهنة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b \end{vmatrix}$$

ولكن:

$$f_{xx} = \frac{\partial 2f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2+12y) = 6x \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(-4,-4) = -24$$

$$f_{yy} = \frac{\partial 2f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2+12x) = 6y \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial y^2}(-4,-4) = -24$$

$$f_{xy} = \frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2+12x) = 12 \Rightarrow \frac{\partial 2f}{\partial x^2}(-4,-4) = 12$$

بالتعويض في المحدد نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -24 \\ -24 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = -432 < 0$$

بما أن $f_{xx}(-4,-4) = -24 < 0$

وبالتالي حسب المبرهنة $P_2(-4,-4)$ هي قيمة كبرى نسبية للتابع f .

٢- احسب مشتق التابع $f(x,y) = \sqrt{1+xy}$ في النقطة $(1,0)$ بإتجاه $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

الحل: لدينا $\|u\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2} = 1$

$$c + uh = (1,0) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)h = (1,0) + \left(\frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}\right) = \left(1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$f(c+uh) = f\left(1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right).\left(\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}h^2}$$

$$f(1,0) = \sqrt{1 + (1)(0)} = 1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(1,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}h^2}-1}{h}=\frac{0}{0}$$

وهي حالة عدم تعيين لإزالتها نضرب البسط والمقام بمرافق البسط فنجد:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}h^2}-1\right).\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}h^2}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}h^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}h^2-1}{h\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}h^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}h\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}h^2}+1\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(1,0)=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

٣- أثبت أن التابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-3)^4-y^4}{(x-3)^4+y^4} & ; \quad (x,y)\neq(3,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(3,0)\end{cases}$ **غير قابل للمفاضلة في النقطة$(3,0)$ وذلك بطريقتين.**

الحل:

الطريقة الأولى:

حسب تعريف قابلية المفاضلة للتابع $f(x,y)$ يجب أن تكون المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة ل x,y ولكن:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h+3,0)-f(3,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4-0}{h^4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} = +\infty$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0}\frac{f(3,k)-f(3,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0-k^4}{0+k^4}}{k} = \lim_{k\to 0}-\frac{1}{k} = -\infty$$

إذاً المشتقات موجودة ولكن غير محدودة وبالتالي التابع $f(x,y)$ غير قابل للمفاضلة في النقطة $(3,0)$.

الطريقة الثانية:

لنأخذ المتتالية:

$$x_n = \left(3+\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$$

من الملاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (3,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{f}(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(3+\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^4}-\frac{16}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{16}{n^4}} = \frac{-15}{17} \neq f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$
$$= f(3,0) = 0$$

وبالتالي التابع f غير مستمر في النقطة $(3,0)$ وبالتالي غير قابل للمفاضلة في النقطة السابقة.

تم بعونه تعالى إعداد ملخص توابع متعددة المتغيرات

والحمد لله رب العالمين

أتمنى في حال وجود أي خطأ في الملخص تنبيهنا عليه

مع تمنياتي بالتوفيق لجميع الطلاب بإذن الله

إعداد الطالب:وسام عرابي

0991108462

0936517691