جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

# تحليل عددي (2)

# Numerical analysis

إعداد الطالب:وسام عرابي

**البحث الأول:**

# تقريب المربعات الصغرى

هدفنا من هذا البحث هو تقريب مجموعة بيانات(نقاط) معطاة أودالة معطاة إلى دالة أ ُخرى.

## 1-1 تقريب البيانات المعطاة إلى دالة:

لتكن لدينا مجموعة من النقاط $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ وسنسعى إلى تقريب هذه النقاط إلى دالة $f$ تابعة للمتحول $x$ ونتيجة لهذا التقريب سينتج خطأ مقدارهُ $E$ وهذا الخطأ لهُ عدة صيغ:

$$E_1 = \max_{i=1,..,n} \{|y_i - f(x_i)|\} \quad , \quad E_2 = \sum_{i=1}^{i=n} |y_i - f(x_i)|$$

$$E_3 = \sum_{i=1}^{i=n} ( \; y_i - f(x_i) \; )^2$$

وسنحاول أن يكون هذا الخطأ أصغر مايمكن.

من أجل ذلك سوف ندرس التقريب باستخدام الصيغة الثالثة للخطأ والتي يُقصد بها مجموع مربعات الفروق بين قيم النقاط المعطاة وبين قيم الدالة المقربة $f(x)$.ولهذا السبب سُميت طريقة التقريب هذه بطريقة:

تقريب المربعات الصغرى

$$\boldsymbol{least\ squares\ approximation}$$

وهناك منافع عديدة لاستخدام هذه الصيغة للخطأ منها:

١- الفروق الموجبة لاتلغي الفروق السالبة.
٢- الفروق الصغيرة تصبح أصغر.

**مُلاحظة:**إن الدالة $f(x)$ يُمكن أن تأخذ عدة أشكال سنوردها فيما يلي.

### 1-1-1 تقريب البيانات إلى خط مستقيم:

من أجل تقريب البيانات$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ إلى خط مستقيم،فإننا نسعى إلى أن نجد دالة خطية $f(x) = ax + b$ بحيث يكون الخطأ $E$ أصغر مايمكن أي يجب أن نُحدد المعاملات $a, b$ التي تجعل الخطأ $E$ أصغر مايمكن.

سنوضح هذه العملية من أجل $n$ نقطة في المستوي.

إن دالة الخطأ $E$ تُعطى بالشكل:

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} (\ y_i - f(x_i)\ )^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (\ f(x_i) - y_i\ )^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (\ a.x_i + b - y_i\ )^2$$

إن الحد الأدنى لدالة بعدة متغيرات(إثنان في هذه الحالة $a, b$) يوجد عندما المشتق الجزئي للدالة بالنسبة لكل من متغيراتها مساوياً للصفر في هذه الحالة يكون:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{i=n} (\ a.x_i + b - y_i\ )^2\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial a} (\ a.x_i + b - y_i\ )^2$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} 2x_i(\ a.x_i + b - y_i\ )\ = 0 \Rightarrow a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 0$$

ومنهُ نحصل على المعادلة الأولى التالية:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad \ldots.(1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{i=n} (\ a.x_i + b - y_i\ )^2\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial b} (\ a.x_i + b - y_i\ )^2$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} 2(\ a.x_i + b - y_i\ )\ = 0 \Rightarrow a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

ومنهُ نحصل على المعادلة الثانية التالية:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \ldots.(2)$$

مع العلم أن $\sum_{i=1}^{n} 1 = \mathrm{n}$ .

من هذا كُله أصبح لدينا المعادلتين:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad \ldots.(1)$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \ldots.(2)$$

لنستخدم الرموز التالية:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad , \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad , \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

وبالتالي أصبح لدينا:

$$aS_{xx} + bS_x = S_{xy} \quad \ldots.(1)$$

$$aS_x + nb = S_y \quad \ldots.(2)$$

وبحل جُملة المعادلتين بطريقة كرامر نحصل على:

$$a = \frac{nS_{xy} - S_xS_y}{nS_{xx} - S_xS_x} \quad , \quad b = \frac{S_{xx}S_y - S_{xy}S_x}{nS_{xx} - S_xS_x}$$

**مثال$(\mathbf{1})$:**باستخدام التقريب إلى خط مستقيم قرب البيانات التالية:

$$(x_1, y_1) = (1,2.1) \;,\; (x_2, y_2) = (2,2.9) \;,\; (x_3, y_3) = (5,6.1) \;,\; (x_4, y_4) = (7,8.3)$$

ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب.

**الحل:** إن عدد البيانات هو $n = 4$ والآن لنحسب $S_x \;\; S_y \;\; S_{xy} \;\; S_{xx}$ .

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 79 \quad , \quad S_x = \sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{4} x_i\, y_i = x_1.\, y_1 + x_2.\, y_2 + x_3.\, y_3 + x_4.\, y_4 = 96.5$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{4} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 19.4$$

وبالتالي نجد أن:

$$a = \frac{4S_{xy} - S_x S_y}{4S_{xx} - S_x S_x} = \frac{4(96.5) - (15)(19.4)}{4(79) - (15)(15)} = \frac{95}{91} = 1.043956044$$

$$b = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{4S_{xx} - S_x S_x} = \frac{(79)(19.4) - (96.5)(15)}{4(79) - (15)(15)} = \frac{851}{910} = 0.9351648352$$

**مُلاحظة:من الآن فصاعداً وخصوصاً في بحث تقريبات المربعات الصُغرى سوف نقوم بتدوير الأرقام إلى خمسة أرقام عشرية فقط وسوف نتجاهل الخطأ الناتج عن التدوير.**

وبالتالي نجد أن الدالة الخطية التي تُقرب البيانات المعطاة بالفرض تُعطى بالشكل:

$$f(x) = 1.04396\,x + 0.93516$$

- إن الخطأ المُرتكب يُعطى بالشكل:

$$E = \sum_{i=1}^{4} (\ y_i - f(x_i)\ )^2 = \big(y_1 - f(x_1)\big) + \big(y_2 - f(x_2)\big) + \big(y_3 - f(x_3)\big) + \big(y_4 - f(x_4)\big)$$

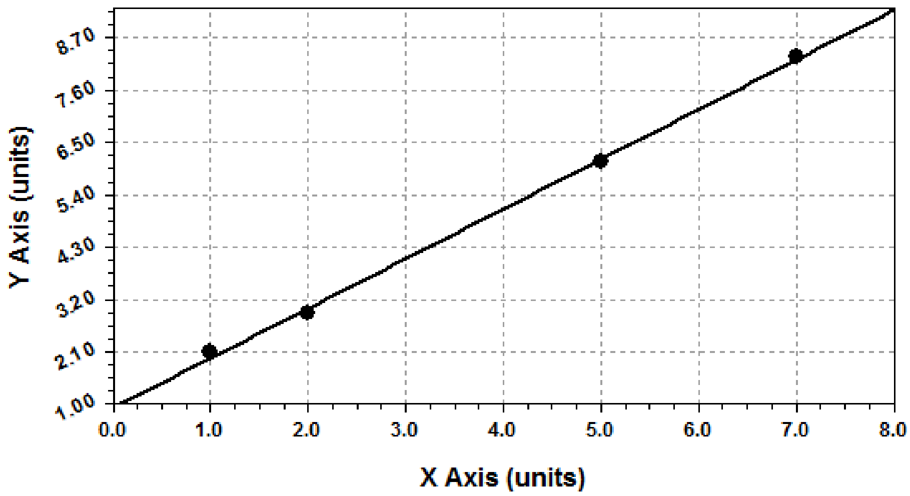
لننظم الجدول التالي لسهولة الحصول على الناتج.

| $i$ | $y_i$ | $f(x_i)$ | $\big(y_i - f(x_i)\big)^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2.1 | 1.97912 | 0.01461 |
| 2 | 2.9 | 3.02308 | 0.01515 |
| 3 | 6.1 | 6.15496 | 0.00302 |
| 4 | 8.3 | 8.24288 | 0.00326 |

ومنهُ نجد أن الخطأ المرتكب هو:

$$E = 0.01461 + 0.01515 + 0.00302 + 0.00326 = 0.03604$$

وسنوضح بالرسم البياني كلاً من البيانات المعطاة والدالة الخطية المقربة:



**مثال(2):**قرب البيانات التالية إلى دالة خطية مع تقدير الخطأ المرتكب:

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $10$ | $9$ | $7$ | $5$ | $4$ | $3$ | $0$ | $-1$ |

**الحل:** إن عدد البيانات هو $n = 8$ والآن لنقوم بحساب كُل من $S_x$ $S_y$ $S_{xx}$ $S_{xy}$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 92 \ , \ S_x = \sum_{i=1}^{8} x_i = 20 \ , \ S_y = \sum_{i=1}^{8} y_i = 37 \ , \ S_{xy} = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 25$$

وبذلك نجد:

$$a = \frac{8S_{xy} - S_x S_y}{8S_{xx} - S_x S_x} = \frac{8(25) - (20)(37)}{8(92) - (20)(20)} = -\frac{45}{28} = -1.60714$$

$$b = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{8S_{xx} - S_x S_x} = \frac{(92)(37) - (25)(20)}{8(92) - (20)(20)} = \frac{121}{14} = 8.64286$$

وبالتالي تكون الدالة الخطية هي:

$$f(x) = -1.60714\, x + 8.64286$$

ويكون الخطأ المرتكب هو:

$$E = \sum_{i=1}^{8} (\ y_i - f(x_i)\ )^2$$

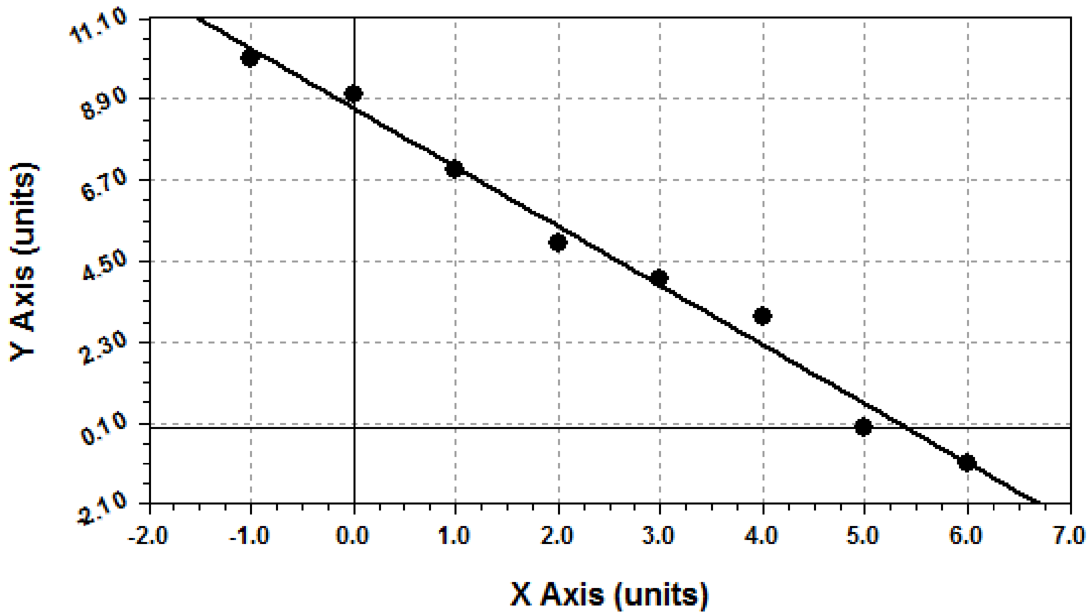
لننظم الجدول التالي لسهولة الحصول على الناتج.

| $i$ | $y_i$ | $f(x_i)$ | $\left(y_i - f(x_i)\right)^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 10.25 | 0.0625 |
| 2 | 9 | 8.64286 | 0.12755 |
| 3 | 7 | 7.03572 | 0.00128 |
| 4 | 5 | 5.42858 | 0.18368 |
| 5 | 4 | 3.82144 | 0.03188 |
| 6 | 3 | 2.2143 | 0.61732 |
| 7 | 0 | 0.60716 | 0.36864 |
| 8 | $-1$ | $-0.99998$ | $4 * 10^{-10}$ |

ومنهُ نجد أن الخطأ المرتكب هو:

$$E = 0.0625 + 0.12755 + 0.00128 + 0.18368 + 0.03188 + 0.61732 + 0.36864 + 4 * 10^{-10} = 1.39285$$

والرسم البياني الذي يوضح البيانات المعطاة والدالة المقربة:




### 2-1-1 تقريب البيانات إلى قطع مُكافئ:

لنقرب الآن البيانات$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ إلى دالة تربيعية من الشكل:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

سنسعى إلى تحديد المعاملات $a, b, c$ بحيث يكون الخطأ المرتكب أصغر مايمكن.

أي أن تبلغ الدالة:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

الحد الأدنى لها.

من أجل ذلك يجب أن تكون المشتقات الجزئية للدالة $E$ بالنسبة لكُل من متغيراتها $a, b, c$ مساوية للصفر أي:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial E}{\partial c} = 0$$

وبالقيام بنفس الخطوات التي قُمنا بها في التقريب إلى دالة خطية نجد:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + n\,c = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

وبحساب قيمة المجاميع وتعويضها نحصل على جُملة معادلات خطية بثلاثة مجاهيل $a, b, c$ نستطيع حساب قيمة كُل منهم بسهولة.

**مثال(3):** قرب البيانات التالية إلى دالة تربيعية ثم احسب قيمة الخطأ المرتكب

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
| $y_i$ | 0 | 0.19 | 0.26 | 0.29 | 0.31 |

**الحل:**

لدينا عدد البيانات $n = 5$ وسنسعى إلى إيجاد الدالة:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ووجدنا سابقاً أن:

$$a\sum_{i=1}^{5} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{5} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{5} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i + 5\,c = \sum_{i=1}^{5} y_i$$

لنحسب قيمة المجاميع السابقة:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 22.125 \;,\sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 12.5 \;,\; \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 7.5 \;,\; \sum_{i=1}^{5} x_i = 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i = 2.2 \;,\; \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1.41 \;,\; \sum_{i=1}^{5} y_i = 1.05$$

ومنه نجد أن:

$$22.125\,a + 12.5\,b + 7.5\,c = 2.2 \quad ...(1$$

$$12.5\,a + 7.5\,b + 5\,c = 1.41 \quad ...(2$$

$$7.5\,a + 5\,b + 5\,c = 1.05 \quad ...(3$$

وهي جُملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل بحلها نحصل على:

$$a = -0.10857 \quad , \quad b = 0.36114 \ , \quad c = 0.01171$$

ومنه تكون الدالة التربيعية المطلوبة هي:

$$f(x) = -0.10857\,x^2 + 0.36114\,x + 0.01171$$

- إن الخطأ المُرتكب يُعطى بالشكل:

$$E = \sum_{i=1}^{5} (\ y_i - f(x_i)\ )^2$$

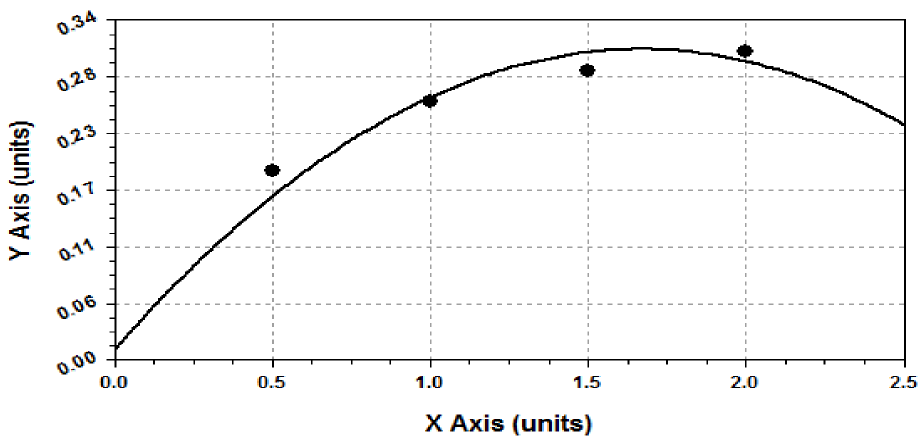
لننظم الجدول التالي:

| $i$ | $y_i$ | $f(x_i)$ | $\left(y_i - f(x_i)\right)^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.01171 | 0.00014 |
| 2 | 0.19 | 0.16514 | 0.00062 |
| 3 | 0.26 | 0.26428 | 0.00001 |
| 4 | 0.29 | 0.30914 | 0.00037 |
| 5 | 0.31 | 0.29971 | 0.00011 |

ومنهُ نجد أن الخطأ المرتكب هو:

$$E = 0.00014 + 0.00062 + 0.00001 + 0.00037 + 0.00011 = 0.00125$$

والرسم البياني التالي يوضح البيانات المعطاة والدالة المقربة:



### 3-1-1 تقريب البيانات إلى كثير حدود:

لتكن لدينا مجموعة من النقاط في المستوي عددها مثلاً $n$ نقطة بالشكل:

$\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)\}$ وسنسعى إلى تقريب البيانات السابقة إلى حدودية من الدرجة $m$ من الشكل:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j \quad ; \quad m\geq 1$$

وبحيث $a_0,a_1,\dots a_m$ ثوابت.

بنفس الأسلوب تكون دالة خطأ المربعات الصغرى هي:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\big(y_i-f(x_i)\big)^2=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j-y_i\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j\right)^2-2y_i\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j+y_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j\right)^2-2\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j+\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j\right]-2\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j+\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}a_ja_k\sum_{i=1}^{n}x_i^{j+k}-2\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\ \Rightarrow$$

$$E=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}a_ja_k\sum_{i=1}^{n}x_i^{j+k}-2\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j+\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

**مُلاحظة:في المتسلسلة $\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j\right]$ كُل مافي الأمر أننا بدلنا كُل $j=k$ في إحدى المتسلسلتين $\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j$ مابين قوسين.**

بالعودة وحتى تكون الدالة $E$ أصغرية يجب أن يكون:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j}=0 \quad \forall\ j=0,1,2,\dots,m$$

ومنهُ:

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left[\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_j a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k} - 2\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k} = 0 \quad ; \; j = 0,1,2,\dots,m$$

وبالتالي ينتُج لدينا:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^j \quad ; \; j = 0,1,2,\dots,m$$

وهي جُملة $m+1$ معادلة ب $m+1$ مجهول ويكون:

$$j = 0 \;\; \Rightarrow a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^0 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^1 + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^0$$

$$j = 1 \;\; \Rightarrow a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^1 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^1$$

وهكذا.....

$$j = m \;\; \Rightarrow a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^m$$

**مثال(4):**

قرب البيانات التالية إلى كثير حدود من الدرجة الثالثة ثم أوجد قيمة الخطأ المرتكب مع العلم أن:

| $x_i$ | $-1$ | $-0.8$ | $-0.6$ | $-0.4$ | $-0.2$ | $0$ | $0.2$ | $0.4$ | $0.6$ | $0.8$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $0.05$ | $0.08$ | $0.14$ | $0.23$ | $0.35$ | $0.50$ | $0.65$ | $0.77$ | $0.86$ | $0.92$ | $0.95$ |

**الحل:** نُلاحظ أن عدد النقاط هو $n = 11$ وسنسعى إلى إيجاد الحدودية من الدرجة الثالثة أي $m = 3$ من الشكل:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

وحسب الدراسة النظرية السابقة يكون لدينا أربع معادلات بأربع مجاهيل من الشكل:

$$a_0\sum_{i=1}^{11}x_i^0+a_1\sum_{i=1}^{11}x_i^1+a_2\sum_{i=1}^{11}x_i^2+a_3\sum_{i=1}^{11}x_i^3=\sum_{i=1}^{11}y_i \ \ldots(1$$

$$a_0\sum_{i=1}^{11}x_i^1+a_1\sum_{i=1}^{11}x_i^2+a_2\sum_{i=1}^{11}x_i^3+a_3\sum_{i=1}^{11}x_i^4=\sum_{i=1}^{11}y_ix_i \ \ldots(2$$

$$a_0\sum_{i=1}^{11}x_i^2+a_1\sum_{i=1}^{11}x_i^3+a_2\sum_{i=1}^{11}x_i^4+a_3\sum_{i=1}^{11}x_i^5=\sum_{i=1}^{11}y_ix_i^2 \ \ldots(3$$

$$a_0\sum_{i=1}^{11}x_i^3+a_1\sum_{i=1}^{11}x_i^4+a_2\sum_{i=1}^{11}x_i^5+a_3\sum_{i=1}^{11}x_i^6=\sum_{i=1}^{11}y_ix_i^3 \ \ldots(4$$

لنوجد أولاً قيمة كُل من المجاميع السابقة.

$$\sum_{i=1}^{11}x_i^0=11\,,\sum_{i=1}^{11}x_i^1=0\,,\sum_{i=1}^{11}x_i^2=\frac{22}{5}=4.4\,,\sum_{i=1}^{11}x_i^3=0$$

$$\sum_{i=1}^{11}x_i^4=\frac{1958}{625}=3.1328\ ,\sum_{i=1}^{11}x_i^5=0\ ,\sum_{i=1}^{11}x_i^6=2.62592$$

$$\sum_{i=1}^{11}y_i=\frac{11}{2}=5.5\ ,\ \sum_{i=1}^{11}y_ix_i=\frac{57}{25}=2.28\ ,\ \sum_{i=1}^{11}y_ix_i^2=\frac{11}{5}=2.2\ ,\sum_{i=1}^{11}y_ix_i^3=1.52256$$

بتعويض ماحصلنا عليه في جُملة المعادلات السابقة نجد:

$11\,a_0+4.4\,a_2=5.5 \quad \ldots(1$

$4.4\,a_1+3.1328\,a_3=2.28 \ \ldots(2$

$4.4\,a_0+\ 3.1328\,a_2=2.2 \ \ldots(3$

$3.1328\,a_1+2.62592\,a_3=1.52256 \ \ldots(4$

بحل1) مع 3) حل مُشترك نجد:

$$a_0=\frac{1}{2}=0.5\ \ ,\ \ a_2=0$$

وبحل 2) مع 4) حل مُشترك نجد آيضاً:

$$a_1 = 0.69971 \;,\;\; a_3 = -\frac{875}{3432} = -0.25491$$

وبالتالي تكون الحدودية المطلوبة من الدرجة الثالثة هي:

$$f(x) = -0.25491\, x^3 + 0.69971\, x + 0.5$$

ويكون الخطأ المُرتكب هو:

$$E = \sum_{i=1}^{11} \left(y_i - f(x_i)\right)^2$$

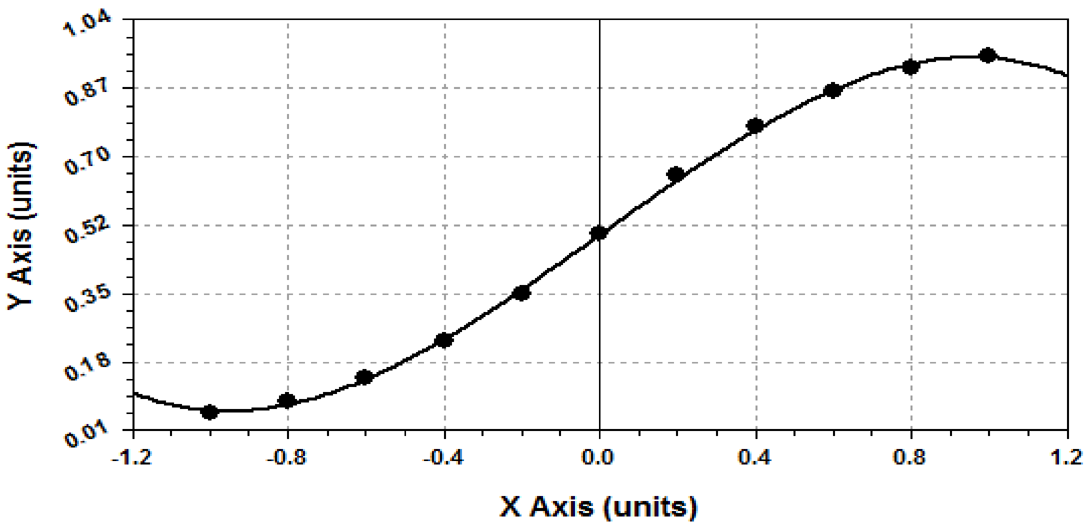
ولنُنظم الجدول التالي:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $f(x_i)$ | $(y_i - f(x_i))^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 0.05 | 0.0552 | 0.00003 |
| 2 | $-0.8$ | 0.08 | 0.07075 | 0.00009 |
| 3 | $-0.6$ | 0.14 | 0.13524 | 0.00002 |
| 4 | $-0.4$ | 0.23 | 0.23643 | 0.00004 |
| 5 | $-0.2$ | 0.35 | 0.36201 | 0.00014 |
| 6 | 0 | 0.50 | 0.5 | 0 |
| 7 | 0.2 | 0.65 | 0.63790 | 0.00015 |
| 8 | 0.4 | 0.77 | 0.76356 | 0.00004 |
| 9 | 0.6 | 0.86 | 0.86476 | 0.00002 |
| 10 | 0.8 | 0.92 | 0.92925 | 0.00009 |
| 11 | 1 | 0.95 | 0.9448 | 0.00003 |

وبالتالي يكون الخطأ المُرتكب هو:

$$E = 0.00002 + 0.00008 + 0.00002 + 0.00004 + 0.00014 + 0.00015 + 0.00004 + 0.00002 + 0.00009 + 0.00003 = 0.00065$$

والرسم البياني الذي يوضح البيانات المعطاة والدالة المقربة هو:



### 4-1-1 تقريب البيانات إلى دوال أُسية:

#### 1-4-1-1 تقريب البيانات إلى دالة أُسية من الشكل $f(x) = be^{ax}$

لتكن لدينا مجموعة النقاط $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ ونُريد تقريبب هذه البيانات بدالة أسية من الشكل $f(x) = be^{ax}$ بحيث يكون الخطأ أصغر مايمكن.

إن دالة الخطأ $E$ تُعطى بالشكل:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b.e^{ax_i})^2$$

وحتى يكون الخطأ أصغر مايُمكن(الخطأ أصغري) يجب أن يتحقق:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

أي:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - b.e^{ax_i})^2\right] = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a} (y_i - b.e^{ax_i})^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-2b \sum_{i=1}^{n} x_i e^{ax_i} (y_i - b.e^{ax_i}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i e^{ax_i} = b \sum_{i=1}^{n} x_i e^{2ax_i}$$

وبالتالي نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i e^{ax_i} = b \sum_{i=1}^{n} x_i e^{2ax_i} \quad \dots (1$$

وبنفس الطريقة وبوضع $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$ نجد أن:

$$-\sum_{i=1}^{n} e^{ax_i} (y_i - b.e^{ax_i}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i e^{ax_i} = b \sum_{i=1}^{n} e^{2ax_i}$$

وبالتالي نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i e^{ax_i} = b \sum_{i=1}^{n} e^{2ax_i} \quad \dots (2$$

إن المعادلات 1) و 2) هي معادلات غير خطية وحساب $a, b$ من هذه المعادلات أمر صعب لذلك سوف نلجأ للطريقة التالية.

$$y = be^{ax} \Rightarrow \ln(y) = \ln(b) + ax$$

وباستخدام الرموز التالية :

$$Y = \ln(y)\ ,\ \ B = \ln(b)\ ,\ \ A = a\ ,\ \ X = x$$

نحصل على المعادلة التالية:

$$Y = AX + B$$

والأخيرة هي عبارة عن دالة خطية نحسب فيها الثوابت بالطريقة المعتادة المذكورة سابقاً.

**مُلاحظة$(1)$:** إن الدالة الأسية التي نسعى لتقريب البيانات إليها هي دالة موجبة تماماً كمانعلم وبالتالي لايُمكن أن يكون قيمة $y_i$ قيمة سالبة وذلك آياً كانت $i = 1,2, \dots n$.

**مُلاحظة $(2)$:** بنفس الأسلوب نتعامل من أجل التقريب إلى دالة لوغارتمية أو كسرية أو مثلثية بمعنى آخر إذا أردنا تقريب مجموعة نقاط معطاة إلى دالة لوغارتمية أو مثلثية أو كسرية فإننا بإجراء تغيير في المتحولات بإمكاننا تحويل شكل الدالة المُراد تقريب البيانات إليها إلى دالة خطية(كثير حدود من الدرجة الأولى).

**مثال$(5)$:**

لتكن لدينا مجموعة النقاط في المستوي موضحة بالجدول التالي:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 1.25 | 1.50 | 1.75 | 2 |
| $y_i$ | 5.10 | 5.79 | 6.53 | 7.45 | 8.46 |

والمطلوب:

١- قرب البيانات السابقة إلى دالة أُسية ثم أحسب قيمة الخطأ المُرتكب.
٢- قرب البيانات السابقة إلى كثير حدود من الدرجة الثالثة.

**الحل:**

١- نُلاحظ أن عدد البيانات هو $n = 5$ وسنسعى إلى إيجاد الدالة $y = b.e^{ax}$ التي تُقرب البيانات السابقة بحيث يكون الخطأ المرتكب أصغر مايمكن ومن أجل ذلك نُجري التحويلات التالية:

$$Y = \ln(y)\ , B = \ln(b)\ , A = a\ , X = x$$

فنحصل على الدالة الخطية $Y = AX + B$

ويكون $Y_i = \ln(y_i)$ و $X_i = x_i$ وبحيث $i = 1,2,3,4,5$ وبالتالي نُنظم الجدول الخاص بالنقاط $(X_i, Y_i)$ بالشكل التالي:

| $X_i = x_i$ | 1 | 1.25 | 1.50 | 1.75 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i = \ln(y_i)$ | 1.62924 | 1.75613 | 1.87641 | 2.00821 | 2.13535 |

ويكون:

$$A = \frac{5S_{XY} - S_X S_Y}{5S_{XX} - S_X S_X} \ , \ B = \frac{S_{XX} S_Y - S_{XY} S_X}{5S_{XX} - S_X S_X}$$

$$S_X = \sum_{i=1}^{5} X_i = \sum_{i=1}^{5} x_i = 7.5 \ , \ S_{XX} = \sum_{i=1}^{5} X_i^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 11.875$$

$$S_Y = \sum_{i=1}^{5} Y_i = 9.40534 \ , \ S_{XY} = \sum_{i=1}^{5} X_i Y_i = \sum_{i=1}^{5} x_i Y_i = 14.42408$$

وبالتالي:

$$A = \frac{5(14.42408) - (7.5)(9.40534)}{5(11.875) - (7.5)(7.5)} = 0.50571$$

$$B = \frac{(11.875)(9.40534) - (14.42408)(7.5)}{5(11.875) - (7.5)(7.5)} = \frac{449}{400} = 1.1225$$

ومنهُ:

$$a = A = 0.50571 \ , \ B = \ln(b) \Rightarrow b = e^B = e^{1.1225} = 3.07253$$

والدالة الأُسية المطلوبة التي تُقرب البيانات المعطاة بالفرض هي:

$$f(x) = 3.07253.e^{0.50571\,x}$$

والخطأ المُرتكب هو:

$$E = \sum_{i=1}^{5} \left(y_i - f(x_i)\right)^2$$

ولنُنظم الجدول التالي:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $f(x_i)$ | $(y_i - f(x_i))^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5.10 | 5.09475 | 0.00003 |
| 2 | 1.25 | 5.79 | 5.78136 | 0.00008 |
| 3 | 1.50 | 6.53 | 6.56041 | 0.00092 |
| 4 | 1.75 | 7.45 | 7.44464 | 0.00003 |
| 5 | 2 | 8.46 | 8.44793 | 0.00015 |

ومنه يكون الخطأ المُرتكب هو:

$$E = 0.00003 + 0.00008 + 0.00092 + 0.00003 + 0.00015 = 0.00121$$

٢- سنسعى إلى إيجاد الحدودية من الدرجة الثالثة من الشكل:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

وبالتالي يكون لدينا أربع معادلات بأربع مجاهيل من الشكل:

$$a_0\sum_{i=1}^{5} x_i^0 + a_1\sum_{i=1}^{5} x_i^1 + a_2\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + a_3\sum_{i=1}^{5} x_i^3 = \sum_{i=1}^{5} y_i \quad \dots (1$$

$$a_0\sum_{i=1}^{5} x_i^1 + a_1\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{5} x_i^3 + a_3\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i \quad \dots (2$$

$$a_0\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{5} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{5} x_i^4 + a_3\sum_{i=1}^{5} x_i^5 = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2 \quad \dots (3$$

$$a_0\sum_{i=1}^{5} x_i^3 + a_1\sum_{i=1}^{5} x_i^4 + a_2\sum_{i=1}^{5} x_i^5 + a_3\sum_{i=1}^{5} x_i^6 = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^3 \quad \dots (4$$

لنوجد أولاً قيمة كُل من المجاميع السابقة.

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^0 = 5 , \sum_{i=1}^{5} x_i^1 = 7.5 , \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \frac{95}{8} = 11.875 , \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = \frac{315}{16} = 19.6875$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = \frac{4337}{128} = 33.88281 \ , \sum_{i=1}^{5} x_i^5 = \frac{15375}{256} = 60.05859 \ , \sum_{i=1}^{5} x_i^6 = 108.92822$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{3333}{100} = 33.33 \ , \ \sum_{i=1}^{5} y_i x_i = \frac{5209}{100} = 52.09 \ , \ \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2 = \frac{1799}{200} = 85.495 \ , \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^3 = \frac{18695}{128} = 146.05469$$

بتعويض ماحصلنا عليه في جُملة المعادلات السابقة نجد:

$$5\,a_0 + 7.5\,a_1 + 11.875\,a_2 + 19.6875\,a_3 = 33.33 \quad \dots (1$$

$$7.5\,a_0 + 11.875\,a_1 + 19.6875\,a_2 + 33.88281\,a_3 = 52.09 \quad \dots (2$$

$$11.875\,a_0 + 19.6875\,a_1 + 33.88281\,a_2 + 60.05859\,a_3 = 85.495 \quad \dots (3$$

$$19.6875\,a_0 + 33.88281\,a_1 + 60.05859\,a_2 + 108.92822\,a_3 = 146.05469 \quad \dots (4$$

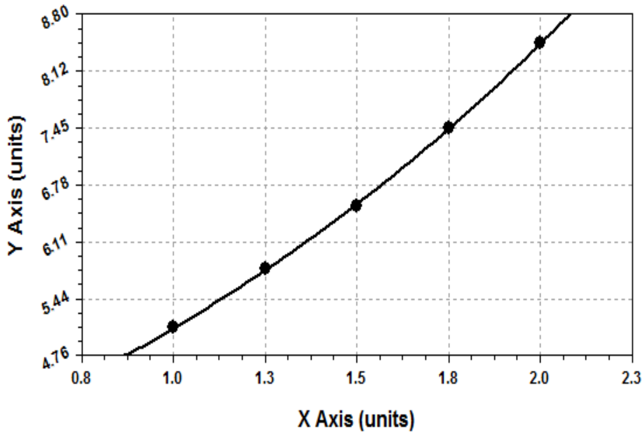
بحل المعادلات السابقة نجد أن:

$$a_0 = 2.97743\ ,\ \ a_1 = 1.93524\ ,\ \ a_2 = 1.93524\ ,\ \ a_3 = 0.21333$$

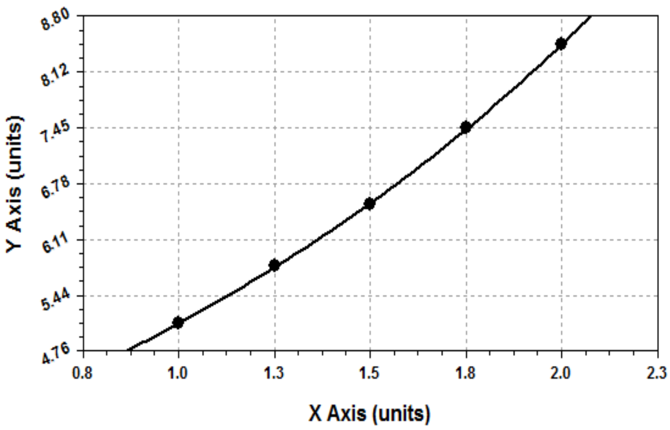
وبالتالي تكون الحدودية المطلوبة من الدرجة الثالثة هي:

$$f(x) = 0.21333\,x^3 - 0.02286\,x^2 + 1.93524\,x + 2.97743$$

ولنوضح بالرسم البياني البيانات المعطاة والدالة الأسية المقربة لهذه البيانات ومن ثم الحدودية من الدرجة الثالثة التي تُقرب البيانات آيضاً:




الدالة الأسية المقربة للبيانات




الحدودية من الدرجة الثالثة التي تقرب البيانات

### 2-4-1-1 تقريب البيانات إلى دالة أ ُسية من الشكل $f(x) = b.x^a$.

لتكن لدينا مجموعة النقاط $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ ونُريد تقريب هذه البيانات بدالة أسية من الشكل $f(x) = b.x^a$ بحيث يكون الخطأ أصغر مايمكن.

إن دالة الخطأ $E$ تُعطى بالشكل:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f(x_i)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-b.x_i^a)^2$$

وحتى يكون الخطأ أصغر مايُمكن(أصغري) يجب أن يتحقق:

$$\frac{\partial E}{\partial a}=\frac{\partial E}{\partial b}=0$$

أي:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-b.x_i^a)^2\right]=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a}(y_i-b.x_i^a)^2=0\ \Rightarrow$$

$$-2b\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)x_i^a(y_i-b.x_i^a)\ =0\ \Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)y_ix_i^a=b\sum_{i=1}^{n}\ \ln(x_i)x_i^{2a}$$

وبالتالي نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)y_ix_i^a=b\sum_{i=1}^{n}\ \ln(x_i)x_i^{2a}\quad ...(1$$

وبنفس الطريقة وبوضع $\frac{\partial E}{\partial b}=0$ نجد أن:

$$-\sum_{i=1}^{n}x_i^a(y_i-b.x_i^a)\ =0\ \Rightarrow\sum_{i=1}^{n}y_ix_i^a=b\sum_{i=1}^{n}\ x_i^{2a}$$

وبالتالي نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n}y_ix_i^a=b\sum_{i=1}^{n}\ x_i^{2a}\ \ ...(2$$

إن المعادلات 1) و 2) هي معادلات غير خطية وحساب $a,b$ من هذه المعادلات أمر صعب لذلك سوف نلجأ للطريقة التالية.

$$y=bx^a\ \Rightarrow\ln(y)=\ln(b)+aln(x)$$

وباستخدام الرموز التالية :

$$Y=\ln(y)\ ,\ \ B=\ln(b)\ ,\ \ A=a\ ,\ \ X=\ln(x)$$

نحصل على المعادلة التالية:

$$Y = AX + B$$

والأخيرة هي عبارة عن دالة خطية نحسب فيها الثوابت بالطريقة المعتادة المذكورة سابقاً.

**حالة خاصة:**

إذا كانت قيمة $a$ معلومة فإنهُ حتى يكون الخطأ أصغر مايُمكن يجب أن يكون:

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

وبالإشتقاق والإصلاح نجد أن:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^a}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2a}}$$

**مثال(6):**

قرب البيانات التالية إلى الدالة:

مع العلم أن: $f(x) = b.x^{\frac{3}{2}}$

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 58 | 88 |
| 2 | 108 | 225 |
| 3 | 150 | 365 |
| 4 | 228 | 687 |

**الحل:**

إن عدد البيانات هو $n = 4$ ووجدنا أن:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^a}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2a}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_i x_i^{\frac{3}{2}}}{\sum_{i=1}^{4} x_i^3}$$

ولكن:

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i^{\frac{3}{2}} = (88)(58)^{\frac{3}{2}} + (225)(108)^{\frac{3}{2}} + (365)(150)^{\frac{3}{2}} + (687)(228)^{\frac{3}{2}} = 3327103.464$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 = (58)^3 + (108)^3 + (150)^3 + (228)^3 = 16682176$$

وبالتالي نجد:

$$b = \frac{3327103.464}{16682176} = 0.19944$$

والدالة التي تُقرب البيانات هي:

$$f(x) = 0.19944. x^{\frac{3}{2}}$$

**مثال(7):**

قرب البيانات التالية إلى الدالة

$$f(x) = \frac{1}{2} b. x^2$$

حيث:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.2 | 0.1960 |
| 2 | 0.4 | 0.7850 |
| 3 | 0.6 | 1.7665 |
| 4 | 0.8 | 3.1405 |
| 5 | 1.0 | 4.9075 |

**الحل:**

إن عدد البيانات هو $n = 5$ وجدنا أن:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^a}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2a}} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{5} x_i^4}$$

ولكن:

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i^2 = (0.1960)(0.2)^2 + (0.7850)(0.4)^2 + (1.7665)(0.6)^2 + (3.1405)(0.8)^2 + (4.9075)(1.0)^2 = 7.6868$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = (0.2)^4 + (0.4)^4 + (0.6)^4 + (0.8)^4 + (1.0)^4 = 1.5664$$

وبالتالي نجد:

$$\frac{1}{2} b = \frac{7.6868}{1.5664} = \frac{1747}{356} = 4.90730 \quad \Rightarrow b = 9.8146$$

والدالة التي تُقرب البيانات هي:

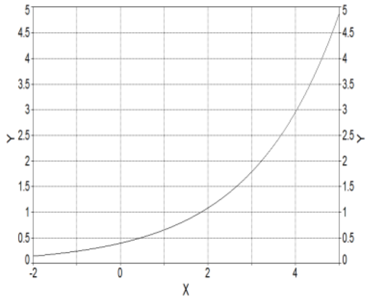
$$f(x) = 4.90730. x^2$$

## 5-1-1 تقريب البيانات إلى أشكال دوال أُخرى:

أياً كان شكل الدالة التي نسعى إلى تقريب البيانات إليها فإنهُ يُمكننا تحويل هذه الدالة الغير خطية إلى دالة خطية من الشكل $Y = AX + B$.

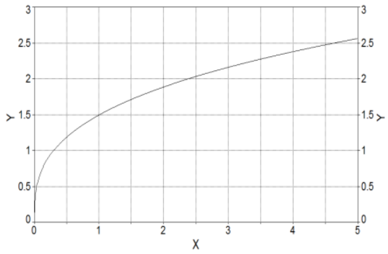
| الدالة الغير خطية | طريقة التحويل | الترميز |
|---|---|---|
| $y = be^{ax}$ | $\ln(y) = \ln(b) + ax$ | $Y = \ln(y)\ ,B = \ln(b)\,,A = a\,,X = x$ |
| $y = bx^{a}$ | $\ln(y) = \ln(b) + aln(x)$ | $Y = \ln(y)\ ,B = \ln(b)\ ,A = a\,,X = \ln(x)$ |
| $y = b + \frac{a}{x}$ | $y = b + a\left(\frac{1}{x}\right)$ | $Y = y\,,B = b\,,A = a\,,X = \frac{1}{x}$ |
| $y = \frac{b}{x + a}$ | $\frac{1}{y} = x\left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)$ | $Y = \frac{1}{y}\ ,B = \frac{a}{b}\,,A = \frac{1}{b}\,,X = x$ |
| $y = \frac{1}{ax + b}$ | $\frac{1}{y} = ax + b$ | $Y = \frac{1}{y}\ ,B = b\,,A = a\,,X = x$ |
| $y = aln(x) + b$ | ------------------------------- | $Y = y\ ,B = b\ ,A = a\,,X = \ln(x)$ |
| $y = \frac{1}{(ax + b)^{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{y}} = ax + b$ | $Y = \frac{1}{\sqrt{y}}\,,B = b\,,A = a\,,X = x$ |
| $y = bxe^{-ax}$ | $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(b) - ax$ | $Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right)\,,B = \ln(b)\ ,A = -a\,,X = x$ |
| $y = \frac{L}{1 + be^{ax}}$ <br> $L$ ثابت معلوم | $\ln\left(\frac{L}{y} - 1\right) = \ln(b) + ax$ | $Y = \ln\left(\frac{L}{y} - 1\right)\,,B = \ln(b)\ ,A = a\,,X = x$ |
| $y = a\ cosx + b$ | ------------------------------- | $Y = y\,,B = b\,,A = a\,,X = cosx$ |
| $y = a\ sinx + b$ | ------------------------------- | $Y = y\,,B = b\,,A = a\,,X = sinx$ |

ويكون الرسم البياني لبعض الدوال من الدوال السابقة موضح كمايلي وذلك من أجل قيم معلومة لكُل من $a, b$:



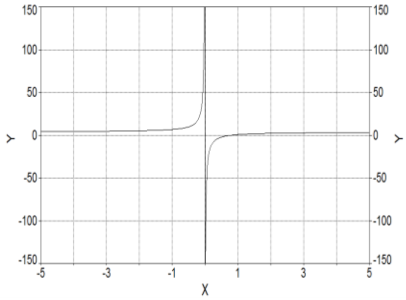
$$y = be^{ax} \; ; a = \frac{1}{2} \, , b = \frac{2}{5}$$

$$I = [-2{,}5]$$



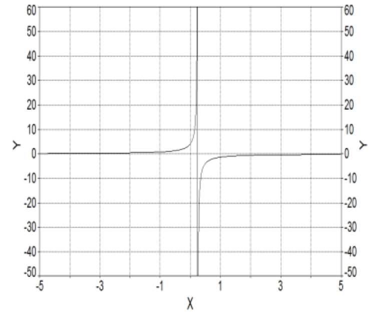
$$y = bx^{a} \; ; a = \frac{1}{3} \, , b = \frac{3}{2}$$

$$I = [0{,}5]$$



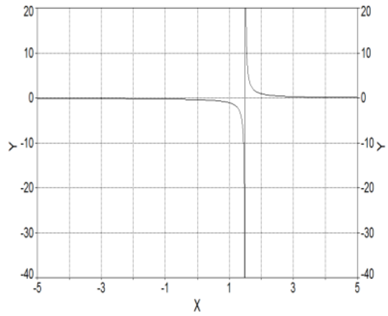
$$y = b + \frac{a}{x} \; ; a = -3 \, , b = 4$$

$$I = [-5{,}5]$$



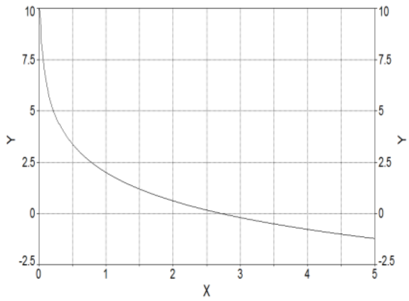
$$y = \frac{b}{x + a} \; ; a = -\frac{1}{4} \, , b = -1$$

$$I = [-5{,}5]$$



$$y = \frac{1}{ax + b} \; ; a = 2 \, , b = -3$$

$$I = [-5{,}5]$$



$$y = aln(x) + b \; ; a = -2 \, , b = 2$$

$$I = [0{,}5]$$

## 2-1 <u>تقريب دالة إلى حدوديات على مجال ما:</u>

### 1-2-1 <u>تقريب دالة إلى حدودية من الدرجة $n$:</u>

**نظرية وايرشتراس في التقريب:**

ليكن $f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $I = [a, b]$ عندئذٍ من أجل عدد مُعطى $\varepsilon > 0$ يوجد حدودية $P(x)$ بحيث:

$$\forall \, x \in [a, b] : |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

لنفرض أننا نعلم القيمة الحقيقية لدالة $f(x)$ من أجل كُل النقاط في مجال ما أي من أجل كُل $x \in [a. b]$ ، عندئذٍ سنسعى إلى إيجاد الدالة $P_n(x)$ والتي تُسمى حدودية التقريب الأمثل الخطي أو التربيعي أو من أي درجة أُخرى.

ونتيجة لهذا التقريب سينتج خطأ مقدارهُ $E$ وهذا الخطأ لهُ عدة صيغ:

1) في الفضاء $L_1$ :

$$E_1 = \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx$$

2) في فضاء التوابع المستمرة على المجال $[a,b]$:

$$E_2 = \max_{a\le x\le b} |f(x) - P_n(x)|$$

3) في الفضاء $L_2$:

$$E_3 = \sqrt{\int_a^b \left(f(x) - P_n(x)\right)^2 dx}$$

وسنستخدم الصيغة الثالثة والتي تُدعى خطأ المربعات الصُغرى.

إن الدالة $E_3$ هي دالة بعدة مُتغيرات وتبلغ الحد الأدنى لها عندما تبلُغ الدالة $E$ الحد الأدنى لها وبحيث:

$$E = E_3^2 = \int_a^b \left(f(x) - P_n(x)\right)^2 dx$$

لنفرض أن الحدودية من الدرجة $n$ لها الشكل التالي:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

عندئذٍ:

$$E = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 dx$$

والمهمة الرئيسية الآن هي تحديد المعاملات $a_0, a_1, \dots a_n$ بحيث تُصبح الدالة $E$ أصغر مايُمكن ومن أجل ذلك يجب أن يكون:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad ; j = 0,1,\dots,n$$

وبما أن

$$E = \int_a^b \left(\left(f(x)\right)^2 - 2f(x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2\right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b \left(x^k f(x)\right) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 dx$$

فنجد

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\int_a^b x^j f(x)dx + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx$$

وبوضع المشتقات الجزئية للدالة $E$ بالنسبة لكل متغيراتها تساوي الصفر ينتج لدينا $(n+1)$ معادلة خطية ب $(n+1)$ مجهول هي:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x)dx \quad ; j = 0,1,2,\dots,n$$

***حالة خاصة:*** لنوجد حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع $f(x)$ على المجال $[-1.1]$ وبالتالي نسعى إلى إيجاد الحدودية:

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

بحيث يكون الخطأ المرتكب أصغر مايُمكن.

بملاحظة أن $n = 2$ ينتج لدينا ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل وهي:

$$j = 0 \ \Rightarrow a_0 \int_{-1}^{+1} 1\, dx + a_1 \int_{-1}^{+1} x\, dx + a_2 \int_{-1}^{+1} x^2\, dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx$$

$$j = 1 \ \Rightarrow a_0 \int_{-1}^{+1} x\, dx + a_2 \int_{-1}^{+1} x^2\, dx + a_2 \int_{-1}^{+1} x^3\, dx = \int_{-1}^{+1} x.f(x)\, dx$$

$$j = 2 \ \Rightarrow a_0 \int_{-1}^{+1} x^2\, dx + a_1 \int_{-1}^{+1} x^3\, dx + a_2 \int_{-1}^{+1} x^4\, dx = \int_{-1}^{+1} x^2.f(x)\, dx$$

إن التكاملات في الطرف الأيسر من المعادلات السابقة يُمكن حسابها بالشكل:

$$\int_{-1}^{+1} 1\, dx = [x]_{-1}^{+1} = 2 \quad , \quad \int_{-1}^{+1} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{+1} = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{3} \quad , \quad \int_{-1}^{+1} x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = 0 \quad , \quad \int_{-1}^{+1} x^4\, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{5}$$

بالتعويض بجملة المعادلات الخطية السابقة نجد مايلي:

$$2\, a_0 + (0)a_1 + \frac{2}{3}a_2 = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx$$

$$(0)a_0 + \frac{2}{3}a_1 + (0)a_2 = \int_{-1}^{+1} x.f(x)\, dx$$

$$\frac{2}{3}a_0 + (0)a_1 + \frac{2}{5}a_2 = \int_{-1}^{+1} x^2.f(x)\, dx$$

وبحل الجملة السابقة نحصل على قيمة المتغيرات $a_0, a_1, a_2$.

**مثال$(1)$:**أوجد حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للدالة

$f(x) = \sin \pi x$ وذلك على المجال $[0,1]$

**تذكرة:**قبل البدء في حل التمرين السابق نُذكر أن جميع الأرقام مقربة إلى خمسة أرقام عشرية فقط وأننا سوف نتجاهل الخطأ الناتج عن التدوير.

**الحل:**

بملاحظة أن $n = 2$ و $a = 0$ و $b = 1$ يكون لدينا جملة المعادلات التالية:

$$a_0 \int_0^{+1} 1\, dx + a_1 \int_0^{+1} x\, dx + a_2 \int_0^{+1} x^2\, dx = \int_0^{+1} \sin \pi x\;\, dx$$

$$a_0 \int_0^{+1} x\, dx + a_2 \int_0^{+1} x^2\, dx + a_2 \int_0^{+1} x^3\, dx = \int_0^{+1} x.\sin \pi x\;\, dx$$

$$a_0 \int_0^{+1} x^2\, dx + a_1 \int_0^{+1} x^3\, dx + a_2 \int_0^{+1} x^4\, dx = \int_0^{+1} x^2.\sin \pi x\, dx$$

لدينا 8 تكاملات لابُد من حسابها بالشكل التالي:

$$\int_0^{+1} 1\,dx = [x]_0^{+1} = 1 \;,\; \int_0^{+1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{+1} = \frac{1}{2} \;,\; \int_0^{+1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{+1} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{+1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{+1} = \frac{1}{4} \;,\; \int_0^{+1} x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{+1} = \frac{1}{5}$$

$$\int_0^{+1} \sin \pi x\;\, dx = \frac{1}{\pi}[-\cos \pi x]_0^{+1} = \frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^{+1} x.\sin \pi x\;\, dx = -\frac{1}{\pi}[x \cos \pi x]_0^{+1} - \int_0^1 (1)\left(-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}[x \cos \pi x]_0^{+1} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos \pi x\, dx = -\frac{1}{\pi}[x \cos \pi x]_0^{+1} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin \pi x\right]_0^{+1}$$

$$= -\frac{1}{\pi}(-1-0) + \frac{1}{\pi}(0-0) = \frac{1}{\pi} \;\Rightarrow \int_0^{+1} x.\sin \pi x\;\, dx = \frac{1}{\pi}$$

$$\int_0^{+1} x^2.\sin \pi x\, dx = \frac{-1}{\pi}[x^2 cos\, \pi x]_0^{+1} - \int_0^1 (2x)\left(-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right) dx$$

$$= \frac{-1}{\pi}[x^2 cos\, \pi x]_0^{+1} + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x \cos \pi x\, dx = \frac{-1}{\pi}[x^2 cos\, \pi x]_0^{+1} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}[\sin \pi x]_0^{+1} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 sin\, \pi x\, dx\right) =$$

$$= \frac{-1}{\pi}[x^2 cos\, \pi x]_0^{+1} + \frac{2}{\pi^2}[\sin \pi x]_0^{+1} + \frac{2}{\pi^3}[cos\, \pi x]_0^{+1} =$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

بتعويض ماحصلنا عليه في جملة المعادلات السابقة نجد أن:

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

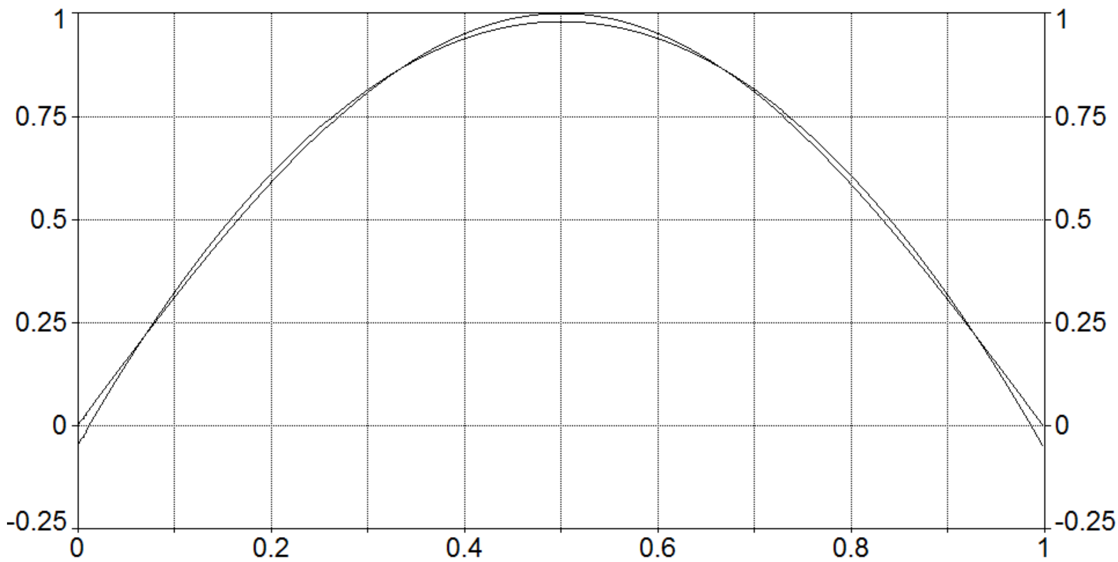
وبحل هذه الجُملة نجد أن:

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} = -0.05046 \ , \ a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} = 4.12251$$

وبالتالي حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للدالة $f(x) = \sin \pi x$ هي:

$$P_2(x) = -4.12251\, x^2 + 4.12251\, x - 0.05046$$

ويكون الرسم البياني للدالة المعطاة والدالة المقربة على المجال $[0.1]$ هي:




والآن لنحسب قيمة الخطأ المُرتكب.

بوضع:

$$a = -4.12251 \ , \ b = 4.12251 \ , \ c = -0.05046$$

يكون

$$E = E_3^3 = \int_0^1 \left(f(x) - P_2(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(\left(f(x)\right)^2 - 2f(x)P_2(x) + \left(P_2(x)\right)^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx - 2\int_0^1 f(x)P_2(x)dx + \int_0^1 (P_2(x))^2 dx$$

وإذا رمزنا للتكاملات الثلاثة السابقة بالرموز:

$$I_1 = \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx \ , I_2 = \int_0^1 f(x)P_2(x)dx \ , I_3 = \int_0^1 (P_2(x))^2 dx$$

لوجدنا

$$E = I_1 - 2I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^1 (\sin \pi x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - cos\ 2\pi x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2} \ \Rightarrow I_1 = 0.5$$

$$I_2 = \int_0^1 f(x)P_2(x)dx = \int_0^1 \sin \pi x\,(ax^2 + bx + c)dx$$

$$= a\int_0^1 x^2 \sin \pi x\ dx + b\int_0^1 x\ \sin \pi x\ dx + c\int_0^1 \sin \pi x\ dx$$

$$= a\left(\frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}\right) + b\left(\frac{1}{\pi}\right) + c\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0.49970$$

$$I_3 = \int_0^1 (P_2(x))^2 dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)^2 dx =$$

$$= a^2\int_0^1 x^4\ dx + b^2\int_0^1 x^2\ dx + c^2\int_0^1 dx + 2ab\int_0^1 x^3\ dx + 2ac\int_0^1 x^2\ dx + 2bc\int_0^1 x\ \ dx$$

$$= a^2\left(\frac{1}{5}\right) + b^2\left(\frac{1}{3}\right) + c^2(1) + 2ab\left(\frac{1}{4}\right) + 2ac\left(\frac{1}{3}\right) + 2bc\left(\frac{1}{2}\right) = 0.49971$$

وبالتالي:

$$E = 0.5 - 2(0.49970) + 0.49971 = 0.00031$$

وبالتالي الخطأ المُرتكب(خطأ المُربعات الصُغرى) هو:

$$E_3 = \sqrt{E} = \sqrt{0.00031} = 0.01761$$

**مثال(2):**أوجد حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للدالة

$f(x) = e^x$ على المجال $[-1,1]$

**الحل:** بملاحظة أن $n = 2$ و $a = -1$ و $b = 1$ يكون لدينا جملة المعادلات التالية:

$$a_0 \int_{-1}^{+1} 1\, dx + a_1 \int_{-1}^{+1} x\, dx + a_2 \int_{-1}^{+1} x^2\, dx = \int_{0}^{+1} e^x\, dx$$

$$a_0 \int_{-1}^{+1} x\, dx + a_1 \int_{-1}^{+1} x^2\, dx + a_2 \int_{-1}^{+1} x^3\, dx = \int_{-1}^{+1} x.e^x\, dx$$

$$a_0 \int_{-1}^{+1} x^2\, dx + a_1 \int_{-1}^{+1} x^3\, dx + a_2 \int_{-1}^{+1} x^4\, dx = \int_{-1}^{+1} x^2.e^x dx$$

لدينا 8 تكاملات لابُد من حسابها بالشكل التالي:

$$\int_{-1}^{+1} 1\, dx = [x]_{-1}^{+1} = 2 \;\; , \;\; \int_{-1}^{+1} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{+1} = 0 \;\; , \;\; \int_{-1}^{+1} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{+1} x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = 0 \;\; , \;\; \int_{-1}^{+1} x^4\, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{+1} e^x\, dx = [e^x]_{-1}^{+1} = e - e^{-1} = \frac{e^2 - 1}{e}$$

$$\int_{-1}^{+1} x.e^x\, dx = [xe^x]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{1} (1)(e^x) dx = [xe^x]_{-1}^{+1} - [e^x]_{-1}^{+1} = (e + e^{-1}) - (e - e^{-1}) = \frac{2}{e}$$

$$\int_{-1}^{+1} x^2.e^x dx = [x^2 e^x]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{1} (2x)(e^x) dx = [x^2 e^x]_{-1}^{+1} - 2\left(\frac{2}{e}\right) = (e - e^{-1}) - \frac{4}{e} = \frac{e^2 - 5}{e}$$

بتعويض ماحصلنا عليه في جملة المعادلات السابقة نجد أن:

$$2a_0 + \frac{2}{3}a_2 = \frac{e^2 - 1}{e}$$

$$\frac{2}{3}a_1 = \frac{2}{e}$$

$$\frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2 = \frac{e^2 - 5}{e}$$

وبحل هذه الجُملة نجد أن:

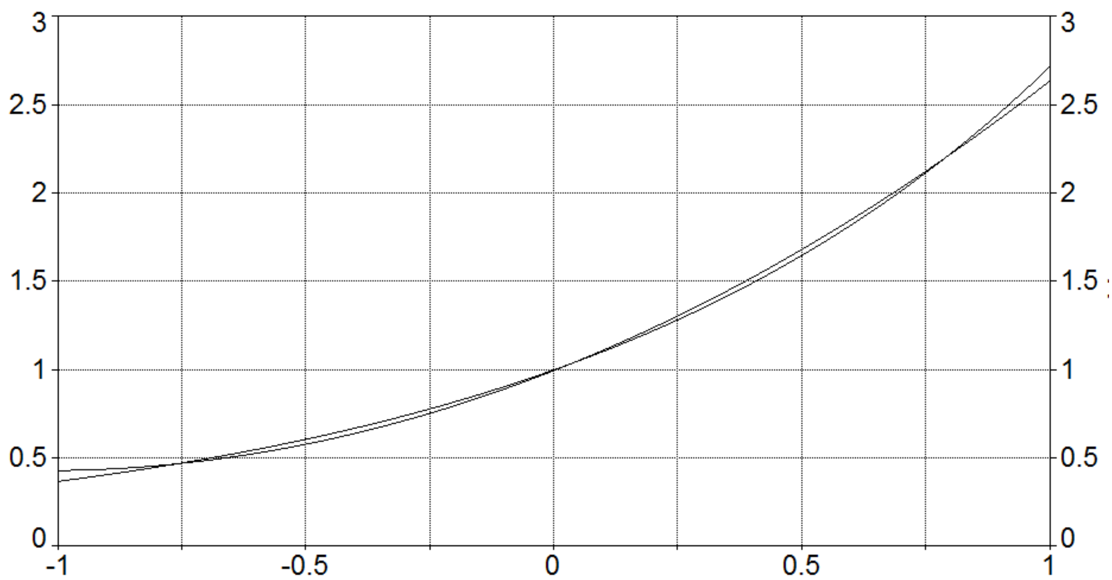
$$a_0 = \frac{33 - 3e^2}{4e} = 0.99629 \ , \ \ a_1 = \frac{3}{e} = 1.10364$$

$$a_2 = \frac{15}{4}\left(\frac{e^2 - 7}{e}\right) = 0.53672$$

وبالتالي حدودية تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للدالة $f(x) = e^x$ هي:

$$P_2(x) = 0.53672\, x^2 + 1.10364\, x + 0.99629$$

والرسم البياني الذي يوضح الدالة $f(x) = e^x$ والحدودية المُقربة لها بالشكل:




والآن لنحسب قيمة الخطأ المُرتكب.

بوضع:

$$a = 0.53672 \ \ , \ \ b = 1.10364 \ , \ \ c = 0.99629$$

يكون

$$E = E_3^3 = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - P_2(x)\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \left(\left(f(x)\right)^2 - 2f(x)P_2(x) + \left(P_2(x)\right)^2\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^2 dx - 2 \int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)dx + \int_{-1}^{1} (P_2(x))^2 dx$$

وبالتالي

$$E = I_1 - 2I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} e^{2x} dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) = 3.62686$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)dx = \int_{-1}^{1} e^x(ax^2 + bx + c)dx = a \int_{-1}^{1} x^2 e^x dx + b \int_{-1}^{1} x\, e^x dx + c \int_{-1}^{1} e^x dx$$

$$= a\left(\frac{e^2 - 5}{e}\right) + b\left(\frac{2}{e}\right) + c\left(\frac{e^2 - 1}{e}\right) = 3.62541$$

$$I_3 = \int_{0}^{1} (P_2(x))^2 dx = \int_{0}^{1} (ax^2 + bx + c)^2 dx =$$

$$= a^2 \int_{-1}^{1} x^4\, dx + b^2 \int_{-1}^{1} x^2\, dx + c^2 \int_{-1}^{1} dx + 2ab \int_{-1}^{1} x^3\, dx + 2ac \int_{-1}^{1} x^2\, dx + 2bc \int_{-1}^{1} x\ \ dx$$

$$= a^2\left(\frac{2}{5}\right) + b^2\left(\frac{2}{3}\right) + c^2(2) + 2ac\left(\frac{2}{3}\right) = 3.62540$$

وبالتالي:

$$E = 3.62686 - 2(3.62541) + 3.62540 = 0.00144$$

وبالتالي الخطأ المُرتكب(خطأ المُربعات الصُغرى) هو:

$$E_3 = \sqrt{E} = \sqrt{0.00144} = 0.03795$$

---

### 2-2-1 إيجاد حدودية المربعات الصُغرى باستخدام حدوديات متعامدة:

**تعاريف:**

١- نقول عن مجموعة من التوابع $f_0, f_1, \dots f_n$ أنها مُستقلة خطياً على المجال المغلق $[a,b]$ إذا كان التركيب الخطي لهذه التوابع يساوي الصفر(التابع الصفري) عندما وفقط عندما كُل من المعاملات تساوي الصفر وبمعنى آخر:

$$\forall\, x \in [a,b] : c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \cdots c_n f_n(x) = 0 \quad then \quad c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$$

ومن الأمثلة على توابع مُستقلة خطياً:

$$f_0(x) = 1\,,\, f_1(x) = x\,,\, f_2(x) = x^2\,, \dots, f_n(x) = x^n$$

هذه التوابع مُستقلة خطياً على المجال $[a,b]$ والأكثر من ذلك أي مجموعة من التوابع $P_0, P_1, \dots P_n$ حيثُ $P_j$ حدودية من الدرجة $j$ تكون مُستقلة خطياً.

وكمثال آخر مجموعة التوابع التالية مُستقلة خطياً:

$$1\,, sinx\,, cosx\,, sin2x\,, cos2x\,, \dots, sinnx\,, cosnx$$

٢- نقول أن التابع $W(x)$ هو تابع وزن على المجال $]a,b[$ إذا وفقط إذا حقق مايلي:

1) التابع $W$ تابع مُستمر.

2) $W(x) > 0$ موجب تماماً.

3) $\forall\, n \in \mathbb{N}\,, x \in ]a,b[ : \int_a^b W(x)|x^n|dx < \infty$

وكمثال على ذلك إن التابع $W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ هو تابع وزن على المجال $]-1,1[$.

٣- نقول عن مجموعة من التوابع $f_0, f_1, \dots f_n$ أنها مُتعامدة على المجال $[a,b]$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x)$ إذا تحقق مايلي:

$$\int_a^b W(x) f_i(x) f_j(x) dx = \begin{cases} 0 & if \quad i \neq j \\ l & if \quad i = j \end{cases} \qquad ; \quad l \text{ عدد}$$

وسنذكر فيما يلي بعض الحدوديات المتعامدة الشهيرة.

١- **حدوديات غرام شميدت:**

وهي عبارة عن دوال متعامدة ضمن المجال $[a,b]$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x)$ وتُعطى بالتعريف بالشكل:

$$f_0(x) = 1$$

$$f_1(x) = x - B_1$$

$$f_k(x) = (x - B_k)f_{k-1}(x) - C_k f_{k-2}(x) \;\; ; \;\; k \geq 2 \;\; , \;\; x \in [a,b]$$

ومن شرط التعامد يكون لدينا:

$$B_k = \frac{\int_a^b xW(x)[f_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b W(x)[f_{k-1}(x)]^2 dx} \qquad , \qquad C_k = \frac{\int_a^b xW(x)f_{k-1}(x)f_{k-2}(x)dx}{\int_a^b W(x)[f_{k-2}(x)]^2 dx}$$

٢- **حدوديات لوجاندر:**

وهي حالة خاصة من غرام شميدت وهي عبارة عن حدوديات متعامدة ضمن المجال $[-1,1]$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x) = 1$ وتُعطى بالتعريف بالشكل:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x - B_1 = x$$

وذلك لأن:

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x(1)\left[f_0(x)\right]^2 dx}{\int_{-1}^{1}(1)\left[f_0(x)\right]^2 dx} = \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}}{[x]_{-1}^{1}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$P_2(x) = (x - B_2)P_1(x) - C_2 P_0(x)$$

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^{-1} x(1)\left[f_1(x)\right]^2 dx}{\int_{-1}^{-1}(1)\left[f_1(x)\right]^2 dx} = \frac{\int_{-1}^{-1} x^3 dx}{\int_{-1}^{-1} x^2 dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{+1}}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1}} = \frac{0}{3/2} = 0$$

$$C_2 = \frac{\int_{-1}^{+1} x(1)f_1(x)f_0(x)dx}{\int_{-1}^{+1}(1)\left[f_0(x)\right]^2 dx} = \frac{\int_{-1}^{+1} x^2 dx}{\int_{-1}^{+1} dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1}}{[x]_{-1}^{+1}} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

وبالتالي:

$$P_2(x) = (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

وبنفس الطريقة نستطيع إيجاد باقي حدوديات لوجاندر بالشكل:

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \qquad , \qquad P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

وهكذا .....

**من المُلاحظ أن:**

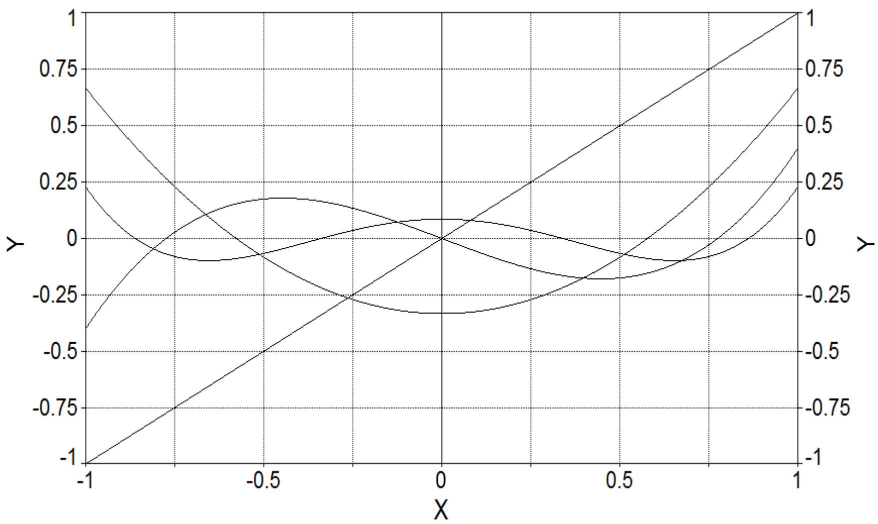
**1–** هُناك عُلاقة تكرارية بين حدوديات لوجاندر وهي:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

**2-** إن حدوديات لوجاندر تُحقق مايلي:

$$\int_{-1}^{+1} P_i(x)P_j(x)dx = \begin{cases} 0 & if \quad i \neq j \\ \dfrac{2}{2n+1} & if \quad i = j = n \end{cases} \qquad ; \; P_n(1) = 1$$

والرسم البياني لحدوديات لوجاندر من الحدودية من الدرجة صفر إلى الحدودية من الدرجة الرابعة يكون بالشكل التالي:




| |
|---|
| $P_0(x) = 1$ |
| $P_1(x) = x$ |
| $P_2(x) = x^2 - {}^1\!/_3$ |
| $P_3(x) = x^3 - {}^3\!/_5\,x$ |
| $P_4(x) = x^4 - {}^6\!/_7\,x^2 + {}^3\!/_{35}$ |

## 1-2-2-1 التقريب باستخدام حدوديات لوجاندر:

حدودية تقريب المربعات الصُغرى من الدرجة $n$ تأخذ الشكل:

$$Q(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + \cdots + c_nP_n(x)$$

لإيجاد حدودية تقريب المربعات الصُغرى من الدرجة $n$ لدالة $f(x)$ على المجال $[-1,1]$ باستخدام حدوديات لوجاندر فإننا نحتاج إلى تحديد المعاملات $c_0, c_1, \dots c_n$ والتي تجعل الخطأ

$$E = E_3^2 = \int_{-1}^{+1} \left(Q(x) - f(x)\right)^2 dx = \int_{-1}^{+1} \left(c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + \cdots + c_nP_n(x) - f(x)\right)^2 dx$$

أصغر مايُمكن.

من أجل ذلك يجب أن يتحقق:

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = 0 \quad ; \quad j = 0,1, \dots, n$$

بوضع $\frac{\partial E}{\partial c_0} = 0$ نحصل على:

$$2\int_{-1}^{+1} P_0(x)\Big(c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + \cdots + c_nP_n(x) - f(x)\Big)\, dx = 0$$

وبعد الإصلاح والإستفادة من خواص التكامل المحدد والترتيب نجد أن:

$$c_0\int_{-1}^{+1} P_0(x)P_0(x)dx + c_1\int_{-1}^{+1} P_0(x)P_1(x)dx + \cdots + c_n\int_{-1}^{+1} P_0(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^{+1} P_0(x)f(x)dx$$

وبما أن حدوديات لوجاندر متعامدة وحسب الملاحظة المأخوذة سابقاً فإن جميع التكاملات في الطرف الأيسر مساوية للصفر عدا التكامل الأول وبذلك يكون:

$$c_0\int_{-1}^{+1} P_0(x)P_0(x)dx = \int_{-1}^{+1} P_0(x)f(x)dx$$

وبأسلوب مماثل وبوضع $\frac{\partial E}{\partial c_1} = 0$ نجد:

$$c_1 \int_{-1}^{+1} P_1(x)P_1(x)dx = \int_{-1}^{+1} P_1(x)f(x)dx$$

وهكذا... وبوضع $\frac{\partial E}{\partial c_n} = 0$ نجد:

$$c_n \int_{-1}^{+1} P_n(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x)f(x)dx$$

إن التكاملات في الطرف الأيسر تم إيجادها سابقاً وبتعويض كُل منها بقيمته نحصل على $n$ معادلة تمكننا من حساب قيمة المتغيرات $c_0, c_1, \dots c_n$ ويمكن إيجاد قيمة المتغيرات بطريقة بسيطة جداً كالتالي:

$$c_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_i(x)f(x)dx \quad ; \quad i = 0,1,2, \dots n$$

وذلك لأن $\int_{-1}^{+1} P_i(x)P_i(x)dx = \frac{2}{2i+1}$

**مثال $(3)$:** أوجد حدودية المربعات الصُغرى من الدرجة الأولى للتابع $f(x) = \cos x$ على المجال $[-1,1]$ باستخدام حدوديات لوجاندر ثم احسب قيمة الخطأ المُرتكب.

**الحل:** الهدف هو إيجاد الحدودية

$$Q(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x)$$

ولكن وجدنا سابقاً أن:

$$c_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_i(x)f(x)dx \quad ; i = 0,1$$

$$i = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_0(x)f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos x\, dx = \frac{1}{2}[\sin x]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}[2\sin 1] = \sin(1)$$

$$i = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{2(1)+1}{2}\int_{-1}^{+1} P_1(x)f(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} x.\cos x\, dx = \frac{3}{2}\left([x\sin x]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \sin x\, dx\right)$$

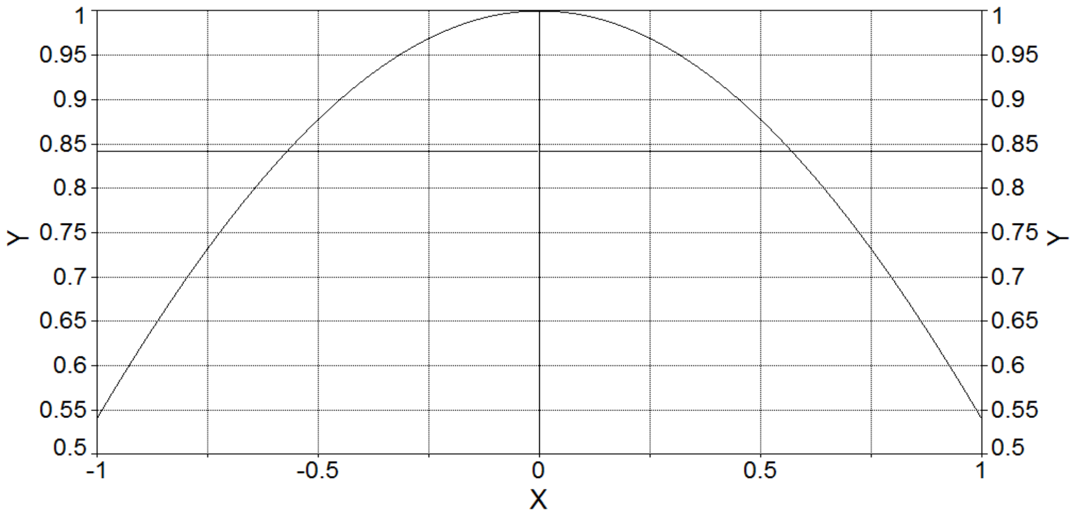
$$= \frac{3}{2}([x\sin x]_{-1}^{+1} - [-cos\, x]_{-1}^{+1}) = \frac{3}{2}([sin1 - sin1] + [cos\,1 - cos1]\,) = 0$$

**مُلاحظة:** يُمكن الحُكم مباشرةً على المُعامل $c_1$ أنه مساوي للصفر وذلك كون الدالة المُراد مُكاملتها فردية.

وبالتالي الحدودية المطلوبة تُصبح بالشكل:

$$Q(x) = \sin 1$$

والرسم البياني يوضح الدالة المُعطاة والحدودية المُقربة لها بالشكل التالي:




| |
|---|
| $Q(x) = sin1$ |
| $f(x) = \cos x$ |

لنحسب قيمة الخطأ المُرتكب.

$$E = E_3^2 = \int_{-1}^{+1} \left(f(x) - Q(x)\right)^2 = \int_{-1}^{1} \left(\left(f(x)\right)^2 - 2f(x)Q\,(x) + \left(Q\,(x)\right)^2\right) dx$$

وبالتالي

$$E = I_1 - 2I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 - cos2x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin x\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}[2 + sin2] = 1.45465$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} f(x)Q(x)dx = \int_{-1}^{1} \cos x\, sin1 dx = sin1 \int_{-1}^{1} \cos x\, dx = sin1[\sin x]_{-1}^{+1} = 2(sin1)^2 = 1.41615$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} (Q(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} (sin1)^2 dx = 2(sin1)^2 = 1.41615$$

وبالتالي:

$$E = 1.45465 - 2(1.41615) + 1.41615 = 0.0385$$

وبالتالي الخطأ المُرتكب(خطأ المُربعات الصُغرى) هو:

$$E_3 = \sqrt{E} = \sqrt{0.0385} = 0.19621$$

---

**مثال(4):** أوجد حدودية المربعات الصُغرى من الدرجة الثانية للتابع $f(x) = e^x$ على المجال $[-1,1]$ باستخدام حدوديات لوجاندر.

**الحل:** نهدف إلى إيجاد الحدودية

$$Q(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$$

وجدنا سابقاً أن:

$$c_i = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{+1} P_i(x)f(x)dx \quad ; i = 0,1,2$$

$$i = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_0(x)f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^x dx = \frac{1}{2}[e^x]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

$$i = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} P_1(x)f(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} x.e^x dx = \frac{3}{2}\left([x.e^x]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} e^x dx\right)$$

$$= \frac{3}{2}([xe^x]_{-1}^{+1} - [e^x]_{-1}^{+1}) = \frac{3}{2}([e + e^{-1}] - [e - e^{-1}]) = \frac{3}{2}(2e^{-1}) = \frac{3}{e}$$

$$i = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1} P_2(x)f(x)dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)e^x dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1} x^2e^x dx - \frac{5}{6}\int_{-1}^{+1} e^x dx =$$

$$= \frac{5}{2}\left([x^2.e^x]_{-1}^{+1} - 2\int_{-1}^{+1} xe^x dx\right) - \frac{5}{6}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{5}{2}\left(\left[e - \frac{1}{e}\right] - \frac{4}{e}\right) - \frac{5}{6}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(e - \frac{5}{e}\right) - \frac{5}{6}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{5}{3}\left(e - \frac{7}{e}\right) \quad \Rightarrow c_2 = \frac{5}{3}\left(e - \frac{7}{e}\right)$$

وبالتالي الحدودية المطلوبة تُصبح بالشكل:

$$Q(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \frac{3}{e}x + \frac{5}{3}\left(e - \frac{7}{e}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{3}\left(e - \frac{7}{e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) - \frac{5}{9}\left(e - \frac{7}{e}\right) = \frac{5}{3}\left(e - \frac{7}{e}\right)x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{1}{18}\left(\frac{61}{e} - e\right) \Rightarrow$$

$$Q(x) = 0.23854\,x^2 + 1.10364\,x + 1.09569$$

والآن لنحسب قيمة الخطأ المُرتكب:

بوضع:

$$a = 0.23854 \quad , \quad b = 1.10364, \quad c = 1.09569$$

يكون

$$E = E_3^3 = \int_{-1}^{1} (f(x) - Q(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} \left( \left(f(x)\right)^2 - 2f(x)Q(x) + (Q(x))^2 \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^2 dx - 2 \int_{-1}^{1} f(x)Q(x)dx + \int_{-1}^{1} (Q(x))^2 dx$$

وبالتالي

$$E = I_1 - 2I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} e^{2x} dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) = 3.62686$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} f(x)Q(x)dx = \int_{-1}^{1} e^x(ax^2 + bx + c)dx = a \int_{-1}^{1} x^2 e^x dx + b \int_{-1}^{1} x\, e^x dx + c \int_{-1}^{1} e^x dx$$

$$= a\left(\frac{e^2 - 5}{e}\right) + b\left(\frac{2}{e}\right) + c\left(\frac{e^2 - 1}{e}\right) = 3.59697$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} (Q(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)^2 dx =$$

$$= a^2 \int_{-1}^{1} x^4\, dx + b^2 \int_{-1}^{1} x^2\, dx + c^2 \int_{-1}^{1} dx + 2ac \int_{-1}^{1} x^2\, dx = a^2\left(\frac{2}{5}\right) + b^2\left(\frac{2}{3}\right) + c^2(2) + 2ac\left(\frac{2}{3}\right) = 3.58434$$

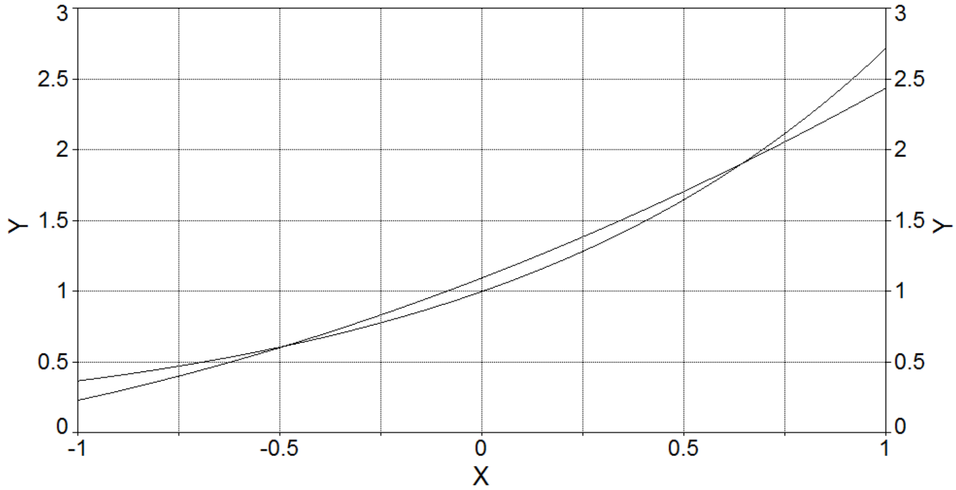
وبالتالي:

$$E = 3.62686 - 2(3.59697) + 3.58434 = 0.01726$$

وبالتالي الخطأ المُرتكب هو:

$$E_3 = \sqrt{E} = \sqrt{0.01726} = 0.13138$$

والرسم البياني يوضح الدالة المعطاة والدالة المُقربة لها على المجال $[-1,1]$ بالشكل التالي:




| |
|---|
| $Q(x) = 0.23854\, x^2 + 1.10364\, x + 1.09569$ |
| $f(x) = e^x$ |

---

**مُلاحظة هامة:**أي تابع للمتغير $x$ على مجال منتهٍ$[a,b]$ يُمكن تحويلهُ إلى تابع للمتحول الجديد $t$ على المجال $[-1,1]$ وذلك بإجراء التحويل التالي:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

**مثال(5):**أوجد حدودية المربعات الصُغرى من الدرجة الثانية للتابع $f(x) = \cos x$ على المجال $[0,\pi]$ باستخدام حدوديات لوجاندر.

**الحل:** نجري التحويل

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} = \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي:

$$g(t) = f\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = -sin\frac{\pi}{2}t \quad ; -1 \le t \le +1$$

نهدف إلى إيجاد الحدودية:

$$q(t) = c_0P_0(t) + c_1P_1(t) + c_2P_2(t)$$

وجدنا سابقاً أن:

$$c_i = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{+1} P_i(t)g(t)\,dt \qquad ; i = 0,1,2$$

$$i = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_0(t)g(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \left(-sin\frac{\pi}{2}t\right)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi}cos\frac{\pi}{2}t\right]_{-1}^{+1} = 0$$

$$i = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} P_1(t)g(t)dt = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} t.\left(-sin\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$= \frac{3}{2}\left(\left[\frac{2t}{\pi}.cos\frac{\pi}{2}t\right]_{-1}^{+1} - \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} cos\frac{\pi}{2}t\,dt\right) = \frac{3}{2}\left(\left[\frac{2t}{\pi}.cos\frac{\pi}{2}t\right]_{-1}^{+1} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}sin\frac{\pi}{2}t\right]_{-1}^{+1}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left([0-0] - \frac{2}{\pi}\left[\frac{4}{\pi}\right]\right) = \frac{-12}{\pi^2}$$

$$i = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1} P_2(t)g(t)dt = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\left(-sin\frac{\pi}{2}t\right)dt = 0$$

وذلك كون التابع المُراد مُكاملته هو تابع فردي.

وبالتالي الحدودية المطلوبة تُصبح بالشكل:

$$q(t) = c_0P_0(t) + c_1P_1(t) + c_2P_2(t) = \frac{-12}{\pi^2}t$$

وبالعودة إلى المتحول القديم نجد أن:

$$x = \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{2x}{\pi} - 1$$

وبالتالي:

$$Q(x) = q\left(\frac{2x}{\pi} - 1\right) = \frac{-12}{\pi^2}\left(\frac{2x}{\pi} - 1\right) = -\frac{24}{\pi^3}x + \frac{12}{\pi^2} = -0.77404\,x + 1.21585$$

ولنحسب قيمة الخطأ المرتكب بوضع:

$$a = 0\,, b = -0.77404\,, c = 1.21585$$

$$E = E_3^2 = \int_0^{\pi} \left(f(x) - Q(x)\right)^2 = \int_0^{\pi} \left(\left(f(x)\right)^2 - 2f(x)Q\,(x) + \left(Q\,(x)\right)^2\right)dx$$

وبالتالي

$$E = I_1 - 2I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^{\pi} (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - cos2x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} = 1.57071$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} f(x)Q(x)dx = \int_0^{\pi} \cos x\,(bx+c)dx = b\int_0^{\pi} x\cos x\,dx + c\int_0^{\pi} \cos x\,dx$$

$$= b\left([xsinx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx\right) + c[sinx]_0^{\pi} = b([xsinx]_0^{\pi} + [\cos x]_0^{\pi}) + c[sinx]_0^{\pi} = -2b = 1.54808$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} (Q(x))^2 dx = \int_0^{\pi} (bx+c)^2 dx = b^2\int_0^{\pi} x^2\,dx + c^2\int_0^{\pi} dx + 2bc\int_0^{\pi} x\ \ dx$$

$$= b^2\left(\frac{\pi^3}{3}\right) + c^2(\pi) + 2bc\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = 1.54809$$

وبالتالي:

$$E = 1.57071 - 2(1.54808) + 1.54809 = 0.02264$$

ومنه الخطأ المُرتكب هو:

$$E_3 = \sqrt{E} = \sqrt{0.02264} = 0.15047$$

والرسم البياني للدالة المُعطاة والحدودية المُقربة لها يكون بالشكل التالي:


| |
|---|
| $Q(x) = -0.77404\,x + 1.21585$ |
| $f(x) = \cos x$ |

### ٣- حدوديات تشيبتشيف:

وهي حدوديات متعامدة ضمن المجال $[-1,1]$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ وتُعطى بالشكل التالي:

$$T_n(x) = \cos(n\,acrc\cos(x))$$

وبشكلٍ خاص يكون

$$n = 0 \ \Rightarrow T_0(x) = \cos(0\ acrc\cos(x)) = \cos 0 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow T_1(x) = \cos(acrc\cos(x)) = x$$

**مُلاحظة:** حتى نستغل خواص التوابع المثلثية المتعامدة نُجري التحويل

$$\theta = arc\cos(x) \Rightarrow \cos\theta = x$$

- إن التوابع $T_n(x)$ في الحقيقة هي حدوديات وذلك بالأخذ بعين الإعتبار أن

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n$$

بنشر الطرف الأيمن وبتبديل القوى الزوجية للتابع $\sin(\theta)$ بالتعبير الموافق في حدود $(1 - cos^2\theta)$ وبعدها نأخذ الجزء الحقيقي من المعادلة الناتجة لنرى أن $\cos(n\theta)$ هي حدودية من الدرجة $n$ للتابع $cos(\theta)$ ومن ناحية أُخرى $\cos\theta = x$ وبذلك نحصل على الحدودية المطلوبة.

- إن حدوديات تشيبتشيف تُحقق:

$$\int_{-1}^{+1} W(x)T_n(x)T_m(x)dx = \begin{cases} 0 & if \quad m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & if \quad m = n \neq 0 \\ \pi & if \quad m = n = 0 \end{cases}$$

- هُناك عُلاقة تكرارية تربط بين حدوديات تشيبتشيف وهي:

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad ; \quad n \geq 1$$

- طريقة مبسطة للحصول على توابع تشيبتشيف على شكل حدوديات وذلك باستخدام التابعين الأول والثاني (تم إيجادهما سابقاً) وباستخدام العُلاقة التكرارية الأساسية:

$$T_0(x) = \cos(0\ acrc\cos(x)) = \cos 0 = 1$$

$$T_1(x) = \cos(1\ acrc\cos(x)) = x$$

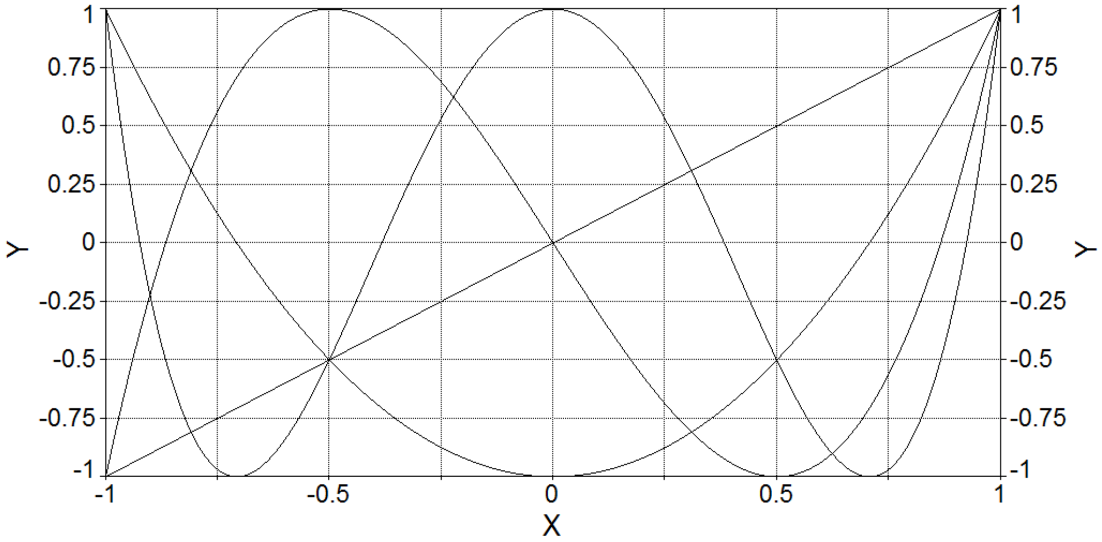
$$T_2(x) = 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x\,T_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2x\,T_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

وهكذا...

ويكون الرسم البياني لحدوديات تشيبتشيف من الحدودية من الدرجة صفر إلى الحدودية من الدرجة الرابعة بالشكل التالي:




| |
|---|
| $T_0(x) = 1$ |
| $T_1(x) = 2x^2 - 1$ |
| $T_2(x) = 4x^3 - 3x$ |
| $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ |
| $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ |

### 2-2-2-1 التقريب باستخدام حدوديات تشيبتشيف:

حدودية تقريب المربعات الصُغرى من الدرجة $n$ تأخذ الشكل التالي:

$$Q(x) = c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + \cdots + c_nT_n(x)$$

لإيجاد حدودية تقريب المربعات الصُغرى من الدرجة $n$ لدالة $f(x)$ على المجال $[-1,1]$ باستخدام حدوديات تشيبتشيف فإننا نحتاج إلى تحديد المعاملات $c_0, c_1, \dots c_n$ والتي تجعل الخطأ

$$E = E_3^2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(Q(x) - f(x)\right)^2 dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + \cdots + c_nT_n(x) - f(x)\right)^2 dx$$

أصغر مايُمكن.

وبإتباع نفس الخطوات التي قُمنا بإتباعها في حالة حدوديات لوجاندر نتوصل إلى المعادلات التالية:

$$c_0 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_0(x) T_0(x) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_0(x) f(x) dx$$

$$c_1 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_1(x) T_1(x) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_1(x) f(x) dx$$

وهكذا....

$$c_n \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_n(x) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) f(x) dx$$

إن التكاملات في الطرف الأيسر تم إيجادها سابقاً وبتعويض كُل منها بقيمته نجد:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_0(x) f(x) dx$$

$$c_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_1(x) f(x) dx$$

وهكذا...

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) f(x) dx$$

وباختصار فإن المعاملات تتعين بالشكل:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_0(x) f(x) dx \quad , \quad c_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x) f(x) dx \quad ; \quad i = 1,2, \dots n$$

**مثال(6):**أوجد حدودية المربعات الصُغرى من الدرجة الأولى للتابع $f(x) = 1 - x^2$ على المجال $[-1,1]$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ باستخدام حدوديات تشيبتشيف.

**الحل:** حدودية تقريب المربعات الصغرى المطلوبة هي

$$Q(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x)$$

ووجدنا سابقاً أن:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_0(x)f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1)(1-x^2)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}dx$$

لحساب قيمة التكامل السابق نُجري تغيير في المتحول من الشكل:

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\, dt$$

وتصبح حدود التكامل الجديدة $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ الحد الأدنى للتكامل و $t_2 = \frac{\pi}{2}$ الحد الأعلى للتكامل وبالتالي:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = 0.5$$

$$c_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_1(x)f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x(1-x^2)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} x\sqrt{1-x^2}dx = 0$$

وذلك كون التابع المُراد مُكاملتهُ هو تابع فردي.

وبالتالي الحدودية المطلوبة هي:

$$Q(x) = c_0T_0(x) + c_1T_1(x) = 0.5$$

لنحسب قيمة الخطأ المُرتكب.

$$E = E_3^2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\big(Q(x)-f(x)\big)^2 dx = \int_{-1}^{+1} \frac{\big(Q(x)\big)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - 2\int_{-1}^{+1} \frac{Q(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_{-1}^{+1} \frac{(f(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

وبالتالي:

$$E = I_1 - 2I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{\big(Q(x)\big)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4} = 0.78531$$

الخطوة السابقة تمت بإجراء تغيير بالمتحول من الشكل $x = \sin t$.

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{Q(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4} = 0.78531$$

$$I_3 = \int_{-1}^{+1} \frac{(f(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^4 dt = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2t)^2 dt$$

$$\frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos2tdt + \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cos2t)^2 dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4t) dt$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \left[ t + \frac{1}{4} \sin 4t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{8} = 1.17801 \quad \Rightarrow I_3 = 1.17801$$

وبالتالي:

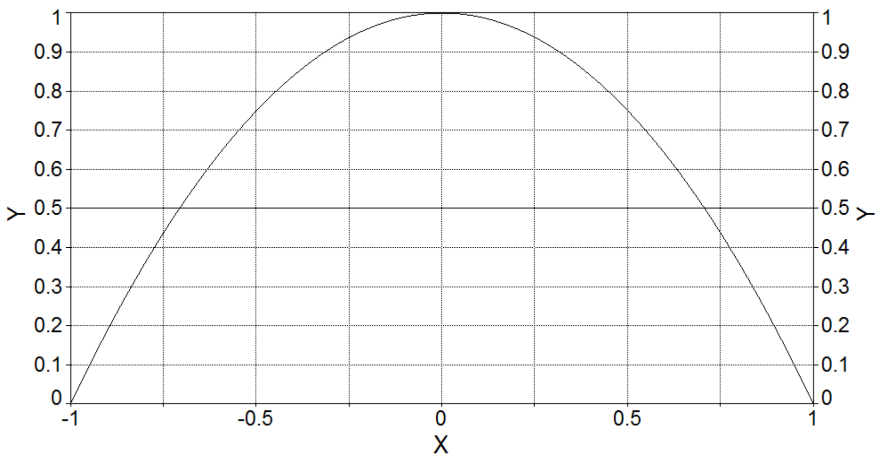
$$E = 0.78531 - 2(0.78531) + 1.17801 = 0.3927$$

ومنهُ الخطأ المُرتكب هو:

$$E_3 = \sqrt{E} = \sqrt{0.3927} = 0.62666$$

والرسم البياني الذي يوضح الدالة المعطاة والحدودية المُقربة لها على المجال $[-1,1]$ بالشكل التالي:

| |
|---|
| $Q(x) = 0.5$ |
| $f(x) = 1 - x^2$ |




**٤- حدوديات لاغير:**

وهي حدوديات متعامدة ضمن المجال $[0,+\infty[$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x) = e^{-x}$ وتُعطى بالشكل:

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1 - x$$

$$L_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}(2n+1-x)L_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x)$$

وبالإستفادة من العُلاقة التكرارية والتابع الأول والثاني نجد أن:

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3-x)(1-x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$L_3(x) = \frac{1}{3}(5-x)\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right) - \frac{2}{3}(1-x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$$

$$L_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

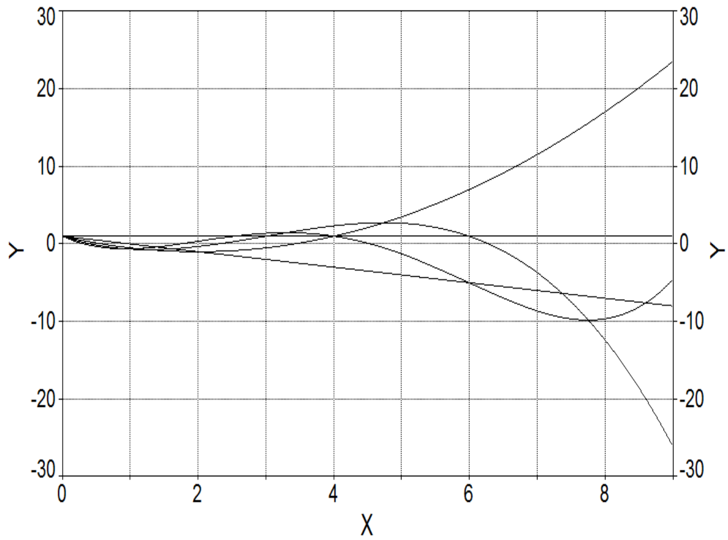
وهكذا...

والأكثر من ذلك فإن حدوديات لاغير تُحقق:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}L_i(x)L_j(x)dx = \begin{cases} 0 & if \quad i \neq j \\ 1 & if \quad i = j \end{cases}$$

والرسم البياني لحدوديات لاغير من الحدودية من الدرجة صفر إلى الحدودية من الدرجة الرابعة بالشكل التالي:

| |
|---|
| $L_0(x) = 1$ |
| $L_1(x) = 1 - x$ |
| $L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ |
| $L_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ |
| $L_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ |



### 3-2-2-1 التقريب باستخدام حدوديات لاغير:

حدودية تقريب المربعات الصُغرى من الدرجة $n$ تأخذ الشكل التالي:

$$Q(x) = c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) + \cdots + c_n L_n(x)$$

لإيجاد حدودية تقريب المربعات الصُغرى من الدرجة $n$ لدالة $f(x)$ على المجال $[0, \infty[$ باستخدام حدوديات لاغيرفإننا نحتاج إلى تحديد المعاملات $c_0, c_1, \dots c_n$ والتي تجعل الخطأ

$$E = E_3^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\big(Q(x) - f(x)\big)^2 dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\big(c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) + \cdots + c_n L_n(x) - f(x)\big)^2 dx$$

أصغر مايُمكن.

وبإتباع نفس الخطوات التي قُمنا بإتباعها في حالة حدوديات لوجاندر وحدوديات تشيبتشيف نتوصل إلى المعادلات التالية:

$$c_0 \int_0^{+\infty} e^{-x} L_0(x) L_0(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_0(x) f(x) dx$$

$$c_1 \int_0^{+\infty} e^{-x} L_1(x) L_1(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_1(x) f(x) dx$$

وهكذا....

$$c_n \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) f(x) dx$$

إن التكاملات في الطرف الأيسر تم إيجادها سابقاً وبتعويض كُل منها بقيمته نجدالمعاملات تتعين بالشكل:

$$c_i = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_i(x) f(x) dx \quad ; \quad i = 0,1,2, \dots n$$

**مثال (7):**أوجد حدودية المربعات الصُغرى من الدرجة الأولى للتابع $f(x) = \cos x$ على المجال $]0, +\infty[$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x) = e^{-x}$ باستخدام حدوديات لاغير.

**مُلاحظة:يُمكن الإستفادة في إيجاد الحل للمثال السابق من الدستورين التاليين:**

$$\int e^{ax} cos\ bx\, dx = \frac{acos\ bx + bsin\ bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$$

$$\int e^{ax} sin\ bx\, dx = \frac{asin\ bx - bcos\ bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$$

**الحل:** حدودية تقريب المربعات الصُغرى المطلوبة هي

$$Q(x) = c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x)$$

ووجدنا سابقاً أن

$$c_i = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_i(x) f(x) dx \quad ; \quad i = 0,1$$

$$i = 0 \Rightarrow c_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_0(x) f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x\, dx = \left[\frac{-cosx + sin\ x}{2} e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$i = 1 \Rightarrow c_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_1(x) f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 - x) \cos x\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x\, dx - \int_0^{+\infty} x e^{-x} \cos x\, dx$$

$$= \left[\frac{-cosx + sin\ x}{2} e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \left([xe^{-x} \sin x]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(\frac{-cosx + sin\ x}{2} e^{-x}\right) dx\right) =$$

$$\left[\frac{-cosx + sin\ x}{2} e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \left([xe^{-x} \sin x]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x} cos\ x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x\, dx\right)$$

$$= \left[\frac{-cosx + sin\ x}{2} e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \left([xe^{-x} \sin x]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\left[\frac{-cosx + sin\ x}{2} e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\left[\frac{-cosx - sin\ x}{2} e^{-x}\right]_0^{\infty}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{2}\right]\right) = 0$$

وبالتالي نستنتج أن $c_1 = 0$ .

والحدودية المطلوبة هي:

$$Q(x) = c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) = \frac{1}{2}$$

لنحسب الخطأ المُرتكب:

$$E = E_3^2 = \int_0^\infty W(x)\big(f(x) - Q(x)\big)^2 = \int_0^\infty e^{-x}\left(\big(f(x)\big)^2 - 2f(x)Q(x) + \big(Q(x)\big)^2\right)dx$$

وبالتالي

$$E = I_1 - 2I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-x}\big(f(x)\big)^2 dx = \int_0^\infty e^{-x}(\cos x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}(1 + cos2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}cos2xdx = \frac{1}{2}[-e^{-x}]_0^\infty + \frac{1}{2}\left[\frac{-cos2x + 2sin\,2x}{5}e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$I_2 = \int_0^\infty W(x)f(x)Q(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{4}$$

$$I_3 = \int_0^\infty W(x)(Q(x))^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-x}dx = \frac{1}{4}$$

وبالتالي:

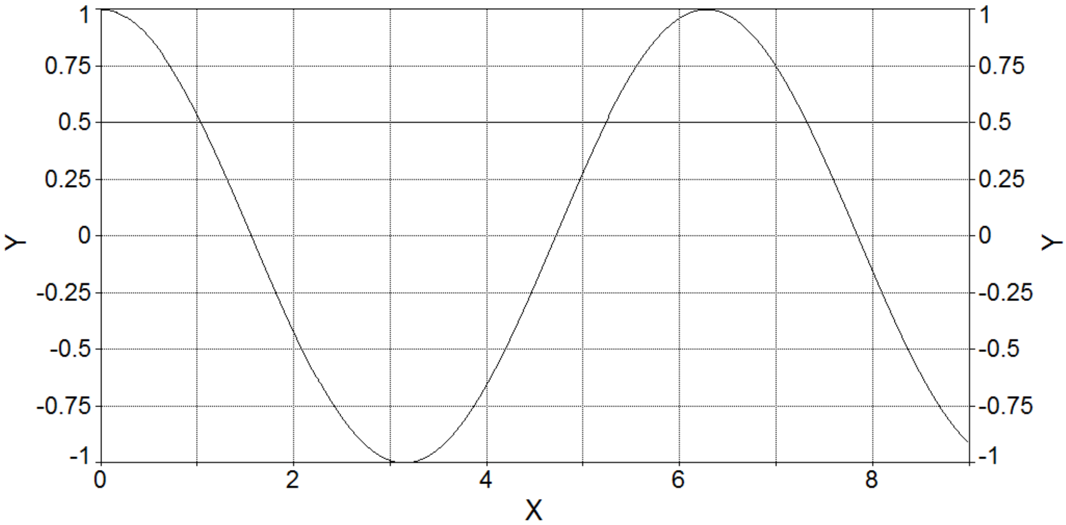
$$E = \frac{3}{5} - 2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{7}{20} = 0.35$$

وبالتالي الخطأ المُرتكب هو:

$$E_3 = \sqrt{E} = \sqrt{0.35} = 0.59161$$

والرسم البياني للدالة المُعطاة والدالة المُقربة لها يكون بالشكل التالي:

| |
|---|
| $Q(x) = 0.5$ |
| $f(x) = cosx$ |



### ٥- حدوديات هرميت:

وهي حدوديات متعامدة ضمن المجال $]-\infty,+\infty[$ بالنسبة لتابع الوزن $W(x) = e^{-x^2}$
وهذه الحدوديات مُعرفة بالشكل:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x) \quad ; \quad n \geq 1$$

وبالإستفادة من العُلاقة التكرارية والتابعين الأول والثاني نجد:

$$H_3(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_4(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_5(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

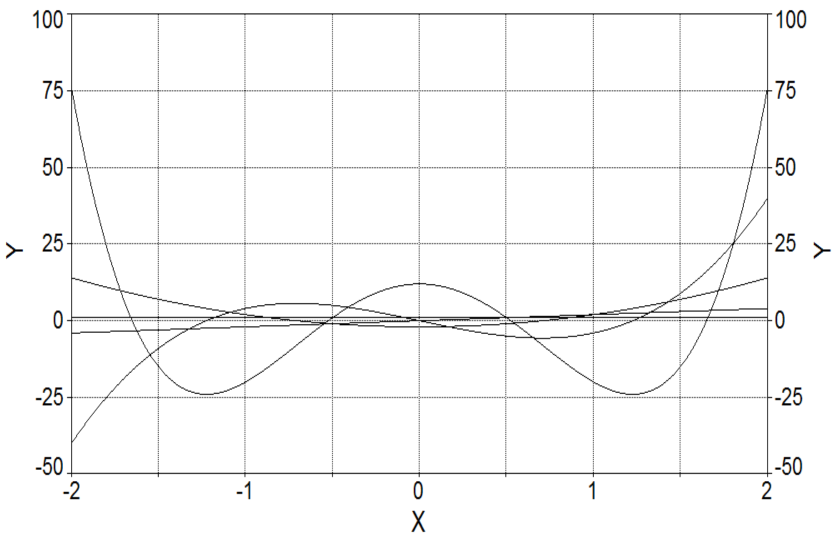
وهكذا..

والأكثر من ذلك فإن حدوديات هرميت تُحقق مايلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_i(x) H_j(x) dx = \begin{cases} 0 & if \quad i \neq j \\ 2^i . i! . \sqrt{\pi} & if \quad i = j \end{cases}$$

والرسم البياني لحدوديات هرميت من الحدودية من الدرجة صفر إلى الحدودية من الدرجة الرابعة يكون بالشكل التالي:

| |
|---|
| $H_0(x) = 1$ |
| $H_1(x) = 2x$ |
| $H_2(x) = 4x^2 - 2$ |
| $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ |
| $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ |



## 4-2-2-1 التقريب باستخدام حدوديات هرميت:

حدودية تقريب المربعات الصُغرى من الدرجة $n$ تأخذ الشكل التالي:

$$Q(x) = c_0 H_0(x) + c_1 H_1(x) + \cdots c_n H_n(x)$$

لإيجاد حدودية تقريب المربعات الصُغرى من الدرجة $n$ لدالة $f(x)$ على المجال $]-\infty, +\infty[$ باستخدام حدوديات هرميت فإننا نحتاج إلى تحديد المعاملات $c_0, c_1, \ldots c_n$ والتي تجعل الخطأ

$$E = E_3^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(Q(x) - f(x)\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(c_0 H_0(x) + c_1 H_1(x) + \cdots c_n H_n(x) - f(x)\right)^2 dx$$

أصغر مايُمكن.

وبإتباع نفس الخطوات التي قُمنا بإتباعها في حالة حدوديات لوجاندر وحدوديات تشيبتشيف وحدوديات لاغيرنتوصل إلى المعادلات التالية:

$$c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_0(x) H_0(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_0(x) f(x) dx$$

$$c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_1(x) H_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_1(x) f(x) dx$$

وهكذا....

$$c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx$$

إن التكاملات في الطرف الأيسر تم إيجادها سابقاً وبتعويض كُل منها بقيمته نجدالمعاملات تتعين بالشكل:

$$c_i = \frac{1}{2^i . i! . \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_i(x) f(x) dx \quad ; \quad i = 0,1,2, \ldots n$$

---

# أهمية حدوديات تشيبتشيف

وجدنا سابقاً أن حدوديات تشيبتشيف لها الشكل:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

ومن العُلاقة التكرارية:

$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad ; n \geq 1$

يكون

$T_2(x) = 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x\,T_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2x\,T_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

وهكذا...

***مُبرهنة (1):***

إن حدودية تشيبتشيف $T_n(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ تملُك $n$ صفراً بسيطاً(من المرتبة الأولى) على المجال $[-1,1]$ عند النقاط:

$$\overline{x_k} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad ; \ \forall\, k = 1,2,\ldots,n$$

والأكثر من ذلك إن $T_n(x)$ تبلُغ قيمتها العظمى بالقيمة المُطلقة عند النقاط:

$$\overline{x_k}' = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \quad ; \ \forall\, k = 1,2,\ldots,n \quad , \ T_n\left(\overline{x_k}'\right) = (-1)^k$$

**تعريف:**

**حدوديات تشيبتشيف واحدية المعامل الرئيسي:**ونرمز لها بالرمز $\tilde{T}_n(x)$ وهي الحدوديات التي تنتج عن حدوديات تشيبتشيف بتقسيم $T_n(x)$ على المُعامل الرئيسي $2^{n-1}$ ومنهُ:

$\tilde{T}_0(x) = 1$

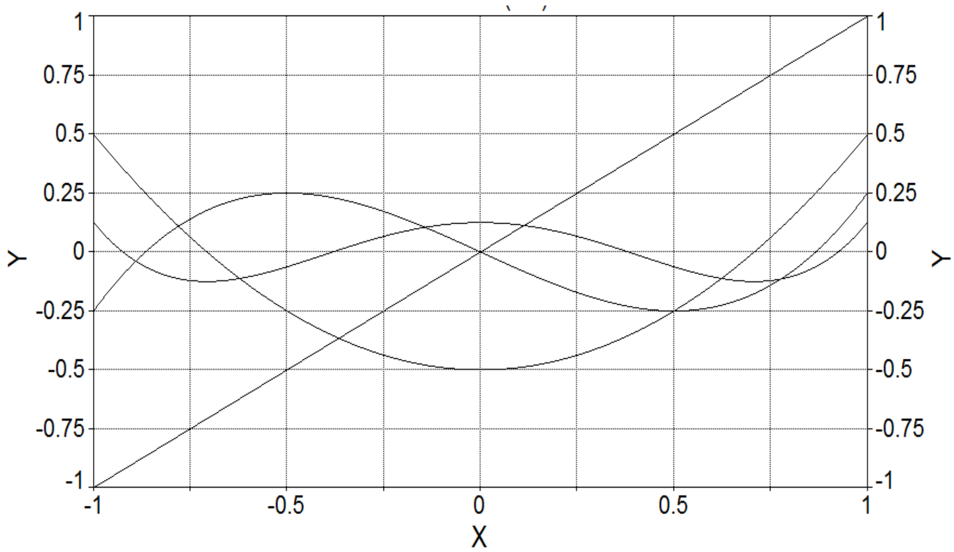
$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \ ; \ \ n \geq 1$

$$\tilde{T}_2(x) = x\tilde{T}_1(x) - \frac{1}{2}\tilde{T}_0(x)$$

وتصبح العُلاقة التكرارية بالشكل:

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = x\tilde{T}_n(x) - \frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x) \quad ; n \geq 2$$

والرسم البياني لحدوديات تشيبتشيف واحدية المُعامل الرئيسي من الحدودية الصفرية إلى الحدودية من الدرجة الرابعة بالشكل التالي:




| |
|---|
| $\tilde{T}_0(x) = 1$ |
| $\tilde{T}_1(x) = x$ |
| $\tilde{T}_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ |
| $\tilde{T}_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$ |
| $\tilde{T}_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$ |

وبما أن $\tilde{T}_n(x)$ هي مُضاعف للحدودية $T_n(x)$ فهذا يقتضي أن أصفار $\tilde{T}_n(x)$ هي آيضاً عند النقاط:

$$\overline{x_k} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad ; \quad \forall\, k = 1,2,\dots,n$$

كما أن القيمة العُظمى للحدودية $\tilde{T}_n(x)$ عند النقاط:

$$\overline{x_k}' = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \quad ; \quad \forall\, k = 1,2,\dots,n \quad , \quad \tilde{T}_n(\overline{x_k}') = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad \dots *$$

لتكن $\tilde{\Pi}_n$ مجموعة كُل الحدوديات واحدية المُعامل الرئيسي من الدرجة $n$، إن العلاقة * تؤدي إلى خاصة هامة جداً تتميز بها $\tilde{T}_n(x)$ عن باقي أعضاء المجموعة $\tilde{\Pi}_n$ سنذكرها في المبرهنة التالية:

**مُبرهنة (2):** الحدوديات $\tilde{T}_n(x)$ حيثُ $n \geq 1$ تتمتع بالخاصة التالية

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1 \leq x \leq +1} \left|\tilde{T}_n(x)\right| \leq \max_{-1 \leq x \leq +1} |P_n(x)|$$

وذلك آياً كانت $P_n(x) \in \tilde{\Pi}_n$.

- تكمن أهمية حدوديات تشيبتشيف بأننا من خلالها يُمكن تصغير الخطأ الناتج في إستيفاء لاغرانج.

***تذكرة:***

حدودية الإستيفاء من الدرجة $n$ بطريقة لاغرانج على المجال $[a, b]$ تُعطى بالشكل:

$$P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \cdots L_n(x)f(x_n)$$

حيثُ:

$x_0, x_1, \dots x_n$ نقاط مُختارة من المجال $[a, b]$ و $f$ تابع مُعطى كما أن:

$$L_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad ; \quad i, j = 0{:}\, n$$

- **خطأ الإستيفاء بطريقة لاغرانج:**

**مُبرهنة (3):** لتكن لدينا مجموعة النقاط $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ المختلفة من المجال $[-1,1]$ وليكن

$f \in C^{n+1}[-1,1]$ عندئذٍ آياً كانت $x \in [-1,1]$ يوجد $]-1,1[\ni \xi(x)$ (عدد) بحيث:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

ويكون:

$$E = \max_{-1 \leq x \leq +1} |f(x) - P_n(x)|$$

ومنه

$$E \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq +1} \left|f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)\right| \max_{-1 \leq x \leq +1} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$$

حيثُ $P_n(x)$ هي حدودية إستيفاء لاغرانج.

نلاحظ أنه لايوجد قيد على $\xi(x)$ لذلك حتى نُصغر الخطأ لابد من حسن إختيار النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ من المجال $[-1,1]$ وذلك لتصغير المقدار $|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$

وبما أن $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ هي حدودية واحدية المعامل الرئيسي من الدرجة $n+1$ فإنها تكون أصغر مايمكن عندما:

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

إذاً المقدار $\max_{-1\le x\le +1}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$ يكون أصغر مايمكن عندما تكون النقاط $x_k$ هي أصفار $\tilde{T}_{n+1}(x)$ والتي عددها $n+1$ صفراً ويمكن اختيار النقاط بالشكل:

$$\overline{x_{k+1}} = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \quad ; \quad k = 0,1,2,\dots n$$

وبما أن

$$\frac{1}{2^n} = \max_{-1\le x\le +1}\left|\tilde{T}_{n+1}(x)\right|$$

هذا يقتضي:

$$\frac{1}{2^n} = \max_{-1\le x\le +1}|(x-\overline{x_1})(x-\overline{x_2})\dots(x-\overline{x_{n+1}})| \le \max_{-1\le x\le +1}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

وبالتالي يكون:

$$\max_{-1\le x\le +1}|f(x)-P_n(x)| \le \frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{-1\le x\le +1}\left|f^{(n+1)}\big(\xi(x)\big)\right|$$

**مثال:**أوجد حدودية الإستيفاء من الدرجة الثانية للتابع

$f(x) = \sin \pi x$ على المجال $[-1,1]$ وقدر قيمة الخطأ.

**الحل:**بما أن $n = 2$ فالحدودية المطلوبة من الشكل

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

لنوجد النقاط $x_k$ حيث $k = 0,1,2$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \quad ; \quad k = 0,1,2$$

$$k = 0 \;\Rightarrow x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 0$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبالتالي:

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(x_0) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) = 0.40858$$

$$f(x_1) = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f(x_2) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) = -0.40858$$

كما أن

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{2}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{4}{3}x^2 + 1$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{2}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

ومنهُ

$$P_2(x) = \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)(0.40858) + \left(-\frac{4}{3}x^2 + 1\right)(0) + \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)(-0.40858)$$

$$\Rightarrow \quad P_2(x) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}0.40858\,x = 0.47179\,x$$

والخطأ المُرتكب هو:

$$\max_{-1\le x\le +1} |f(x) - P_2(x)| \le \frac{1}{2^2(3)!} \max_{-1\le x\le +1} \left|f^{(3)}\big(\xi(x)\big)\right|$$

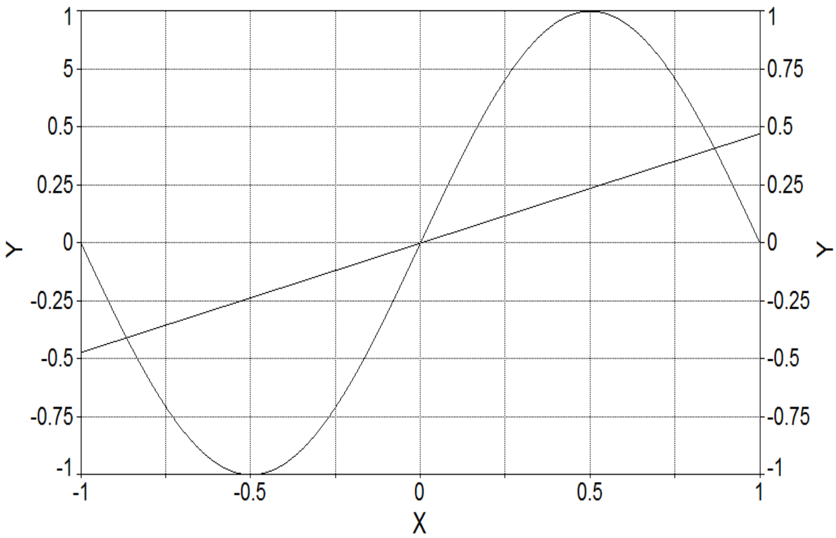
$$\max_{-1\le x\le +1} |\sin \pi x - P_2(x)| \le \frac{1}{24} \max_{-1\le x\le +1} \left| [\sin \pi x]^{(3)}_{x=\xi(x)} \right|$$

وبالتالي:

$$\max_{-1\le x\le +1} |\sin \pi x - P_2(x)| \le \frac{1}{24}\pi^3 = 1.29193$$

والرسم البياني للدالة المعطاة وحدودية الإستيفاء المُقربة لها على المجال $[-1,1]$ يكون بالشكل:

| |
|---|
| $P_2(x) = 0.47179\, x$ |
| $f(x) = \sin \pi x$ |




**تذكرة:** أي تابع للمتحول $x$ مُعرف على مجال منته $[a,b]$ يُمكن تحويلهُ إلى تابع للمتحول $\tilde{x}$ على المجال $[-1,1]$ وذلك بإجراء التحويل:

$$x = \frac{b-a}{2}\tilde{x} + \frac{b+a}{2}$$

- يُمكن الإستفادة آيضاً من حدوديات تشيبتشيف في إيجاد طرق لتخفيض درجة حدودية التقريب مع أقل خسارة في الدقة وذلك لأن حدوديات تشيبتشيف تملك قيماً صُغرى وعُظمى بالقيمة المطلقة منتشرة بانتظام على مجال ما.

لنفرض أننا نريد تقريب حدودية اختيارية من الدرجة $n$ من الشكل:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

على المجال $[-1,1]$ بحدودية من الدرجة $n-1$ على الأكثر.

الموضوع المدروس هو إختيار $P_{n-1}(x) \in \tilde{\Pi}_{n-1}$ بحيث يكون:

$$\max_{-1\le x\le +1}|P_n(x)-P_{n-1}(x)|$$

أصغر مايُمكن.

نلاحظ أن $\frac{P_n(x)-P_{n-1}(x)}{a_n}$ هي حدودية واحدية المعامل الرئيسي من الدرجة $n$ وبالتالي بحسب مبرهنة سابقة يكون:

$$\max_{-1\le x\le +1}\left|\frac{P_n(x)-P_{n-1}(x)}{a_n}\right|\ge \frac{1}{2^{n-1}}$$

وتتحقق المساواة للمتراجحة السابقة إذا كان:

$$\frac{P_n(x)-P_{n-1}(x)}{a_n}=\tilde{T}_n(x)$$

هذا يعني أننا يجب أن نختار

$$P_{n-1}(x)=P_n(x)-a_n\tilde{T}_n(x)$$

وبهذا الإختيار يُصبح لدينا:

$$\max_{-1\le x\le +1}|P_n(x)-P_{n-1}(x)|=\max_{-1\le x\le +1}\left|a_n\tilde{T}_n(x)\right|=|a_n|\max_{-1\le x\le +1}\left|\tilde{T}_n(x)\right|=\frac{|a_n|}{2^{n-1}}\Rightarrow$$

$$\max_{-1\le x\le +1}|P_n(x)-P_{n-1}(x)|=\frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

**مثال:**ليكن لدينا التابع $f(x)=e^x$ والمُقرب على المجال $[-1,1]$ بواسطة حدودية ماك لوران من الدرجة الرابعة بالشكل:

$$P_4(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

وخطأ الإقتطاع هو:

$$|R_{n+1}(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}\big(\xi(x)\big)\right|.\,|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

أي

$$|R_5(x)|=\frac{\left|f^{(5)}\big(\xi(x)\big)\right|.\,|x^5|}{5!}=\frac{\left|e^{\xi(x)}\right|.\,|x^5|}{5!}\le\frac{e}{120}=0.02265$$

وبحيث $-1\le x\le 1$

الحدودية من الدرجة الثالثة تُعطى بالعلاقة:

$$P_3(x) = P_4(x) - a_4\tilde{T}_4(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{24}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{13}{24}x^2 + x + \frac{191}{192}$$

وبهذا يكون الخطأ المُرتكب من التقريب:

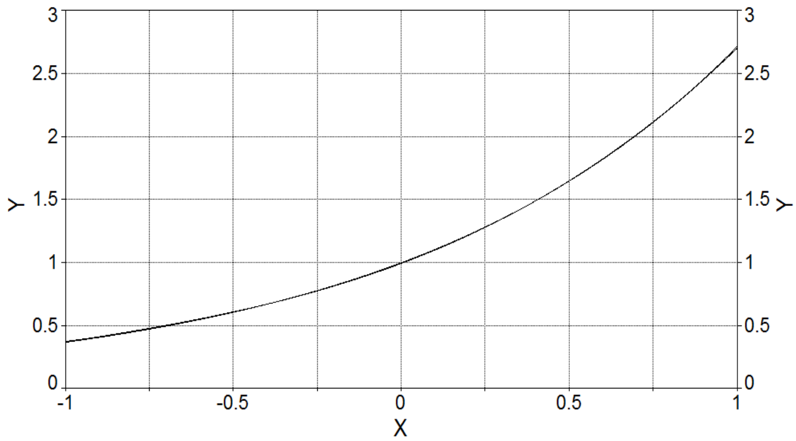
$$\max_{-1\le x\le +1}|P_n(x) - P_{n-1}(x)| = \frac{|a_4|}{2^3} = \frac{\frac{1}{24}}{8} = \frac{1}{192} \Rightarrow \max_{-1\le x\le +1}|P_n(x) - P_{n-1}(x)| = 0.00521$$

ويكون الخطأ الكُلي المرتكب الناتج عن تقريب الدالة $f(x) = e^x$ للحدودية $P_3(x)$ على المجال $[-1,1]$ هو حاصل جمع خطأ الإقتطاع مع خطأ التقريب من الحدودية $P_4(x)$ إلى $P_3(x)$ أي أن:

$$E = 0.02265 + 0.00521 = 0.02786$$

والرسم البياني للدالة الأسية المعطاة بالفرض وحدودية ماك لوران من الدرجة الرابعة المُقربة لها والحدودية من الدرجة الثالثة المُقربة لنفس الدالة بالشكل التالي:

| |
|---|
| $P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$ |
| $P_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ |
| $f(x) = e^x$ |




من الرسم البياني نلاحظ أن الخطوط البيانية للدوال الثلاثة السابقة قريبة جداً من بعضها على المجال $[-1,1]$ ولكن إذا تم أخذ المجال $[-5,5]$ مثلاً لنرى الرسم البياني الموافق التالي:

| |
|---|
| $P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$ |
| $P_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ |
| $f(x) = e^x$ |

إنتهى البحث الأول