الفصل الخامس

متسلسلات فورييــــه

V.1. فضاء التوابع $\Re_{2\pi}$

نذكِّر فيما يلي بتعريف توابع الصف $\Re$ الذي درسناه في كتاب التحليل الرياضي I.

V.1-1. تعريف: ليكن $[a,b]$ مجالاً متراصّاً وغير تافه من $\mathbb{R}$. نقــول عــن تــابع حقيقــي $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ إنّه من الصف $\Re$ إذا وفقط إذا وُجدت متتالية من التوابع المستمرّة قِطَعيّاً متقاربة بانتظام على $[a,b]$ نحو f . وهذا الشرط يكافئ وجود نهاية من اليمــين عند كلِّ نقطة من $[a,b[$ ونهاية من اليسار عند كلِّ نقطة من $]a,b]$ للتابع f . و نقول عن تابع $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ إنّه من الصف $\Re$ إذا انتمى كلٌّ مــن $\operatorname{Im} f$ و $\operatorname{Re} f$ إلى الصف $\Re$. وأخيراً نقول عن تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ إنّه ينتمي إلى الصف $\Re_{2\pi}$ ، ونكتــب عندئذ $f\in\Re_{2\pi}$ إذا وفقط إذا كان f تابعاً دورياً ويقبل 2π دوراً له، وانتمى مقصور f على المجال $[0,2\pi]$ إلى الصف $\Re$.

ولقد جرت العادة أنّ نستخدم الرموز التالية عندما يكون $f\in\Re_{2\pi}$ ، و $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x^-)=\lim_{\substack{t\to x\\ <}} f(t) \quad \text{و} \quad f(x^+)=\lim_{\substack{t\to x\\ >}} f(t)$$

V.1-2. ملاحظات:

- ❖ سندرس في هذا الفصل التوابع الــ 2π– دوريّة، وذلك لأنّ دراســة التوابع التي تقبل العدد T دوراً لها تؤول إلى الحالة السابقة بتغيير بسيط للمتحوّل.
- ❖ تكوِّن مجموعة التوابع $\Re_{2\pi}$ جبراً بالنسبة إلى قوانين التشكيل المألوفة : جمع التوابع، ضرب التوابع بعدد عقدي، وضرب التوابع. ويحتوي هذا الجبر على جــبر التوابع الــ 2π– دوريّة والمستمرّة قِطعيّاً وهذا بدوره يحتوي علــى $\mathcal{C}_{2\pi}$ أي جــبر التوابع الــ 2π– دوريّة والمستمرّة.
- ❖ إذا كان $f\in\Re_{2\pi}$ فإنّ التكــامل $\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt$ لا يتعلّق بالعدد $a\in\mathbb{R}$ ونرمز إليه بالرمز $\int_{\mathbb{T}} f(t)dt$ أو $\int_{\mathbb{T}} f$.

إذا كان f و g تابعين من $\Re_{2\pi}$ ، عرّفنا

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f \rangle} \quad \text{و} \quad \langle f,g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} \cdot g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

إنّ التطبيق $\langle \cdot,\cdot \rangle$ نصف خطّي بالنسبة إلى المركّبة الأولى، وخطّي بالنسبة إلى المركّبة الثانية، وهرمتي وموجب. ولكنّه ليس جداءً سلميّاً على $\Re_{2\pi}$ لأنّ $\langle f,f \rangle = 0$ لا يقتضي $f = 0$. نقول في مثل هذه الحالة إنّ $\langle \cdot,\cdot \rangle$ نصف جداء سلّمي على $\Re_{2\pi}$. ولكنّ مقصور $\langle \cdot,\cdot \rangle$ على الفضاء $\mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi}$ يجعل من $\mathcal{C}_{2\pi}$ فضاءَ جداء سلّمي ويكون مقصور $\|\cdot\|_2$ على $\mathcal{C}_{2\pi}$ نظيماً.

نستخدم أيضاً، على الفضاء $\Re_{2\pi}$ النظيم المنتظم أي المعرّف بالعلاقة

$$\forall f \in \Re_{2\pi}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathrm{IR}}|f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$$

.3-1.V تعريف : ليكن f و g تابعين من $\Re_{2\pi}$ ، وليكن x في IR . عندئذ ينتمي التابع $t \mapsto f(t)g(x-t)$ إلى $\Re_{2\pi}$ فنضع بالتعريف

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t$$

وعندها نسمّي التابع الـ2πـ دوريّ الذي يربطُ بالعدد x العددَ $f * g(x)$ جداءَ التلافّ لـ f و g .

يبيّن تغيير المتحوّل $t \mapsto x-u$ في التكامل الذي يُعرِّف $f * g(x)$ أنّ جداء التلافّ تبديليٌّ أي $f * g = g * f$.

.4-1.V مبرهنة : ليكن f و g تابعين من $\Re_{2\pi}$ ، عندئذ يكون التابع $f * g$ مستمراً. أي

$$(f,g) \in \Re_{2\pi} \times \Re_{2\pi} \Rightarrow f * g \in \mathcal{C}_{2\pi}$$

الإثبات

لنذكّر أوّلاً بالخاصة المعروفة التالية: ليكن $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً، عندئذ تتقارب المتتالية $(h_n)_{n\in\mathrm{IN}^*}$ ، حيث $h_n(x) = h(a + \frac{b-a}{n}E(n\frac{x-a}{b-a}))$ ، بانتظام نحو التابع h . انظر التمرين 2 من الفصل الثامن في كتاب التحليل الرياضي I. في الحقيقة، إنّ إثبات هذه الخاصّة بسيط جداً انطلاقاً من الاستمرار المنتظم للتابع h على $[a,b]$ ونترك التفاصيل للقارئ.

ونلاحظ أنّ التابع h_n تابعٌ ثابتٌ على كلٍّ من المجالات

$\left]a+\frac{b-a}{n}k, a+\frac{b-a}{n}(k+1)\right[$ حيث $0 \le k < n$.

فنقول عنه إنّه تابع درجيّ. نستنتج إذن أنّ مجموعة التوابع الدرجيّة على $[a,b]$ تكون كثيفـــة في فضاء التوابع المستمرة على $[a,b]$ بالنسبة إلى التقارب المنتظم.

وإذا كان $h:[a,b]\to\mathbb{C}$ تابعاً مستمراً قِطَعيّاً وجدنا $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}=b$ بحيث يقبل $h_{|]t_k,t_{k+1}[}$ التمديد إلى تابع مستمرٍّ على $[t_k,t_{k+1}]$. إذن يمكن تقريب التابع $h_{|]t_k,t_{k+1}[}$ بانتظام بمتتالية من التوابع الدرجيّة، وبناءً على ذلك يمكن تقريب التابع h نفسه بمتتالية متقاربة بانتظام من التوابع الدرجيّة.

وأخيراً إذا كان $h:[a,b]\to\mathbb{C}$ تابعاً من الصف $\mathfrak{R}$ وجدنـــا متتالية $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مـــن التوابع المستمرة قِطَعياً بحيث $h\overset{u}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{h}_n$. واستناداً إلى المناقشة السابقة نجد، أيـــاً كانت n، تابعاً درجياً h_n بحيث $\sup\limits_{[a,b]}\left|h_n-\tilde{h}_n\right|\le 2^{-n}$ وعلى هذا يكون $h\overset{u}{=}\lim\limits_{n\to\infty}h_n$. نستنتج إذن أنّ مجموعة التوابع الدرجيّة على $[a,b]$ تكون كثيفة في فضاء التوابع التي تنتمي إلى الصف $\mathfrak{R}$ على $[a,b]$ بالنسبة إلى التقارب المنتظم.

ليكن f من $\mathfrak{R}_{2\pi}$، عندئذ نجد متتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التوابـــع الدرجيّـــة على $[0,2\pi]$ متقاربة بانتظام نحو $f_{|[0,2\pi]}$. وعندها، مهما تكن x في $\mathbb{R}$، يكون:

$$|f*g(x)-f_n*g(x)|\le\int_0^{2\pi}|f(t)-f_n(t)||g(x-t)|\frac{dt}{2\pi}\le\frac{1}{2\pi}\sup_{[0,2\pi]}|f-f_n|\cdot\int_{\mathbb{T}}|g|$$

أو

$$\sup_{\mathbb{R}}|f*g-f_n*g|\le\frac{1}{2\pi}\sup_{[0,2\pi]}|f-f_n|\cdot\int_{\mathbb{T}}|g|$$

أي تتقارب المتتالية $(f_n*g)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام نحو التابع $f*g$. إذن يكفي حتى يتمّ البرهـــان أن نثبتَ أنّ التوابع f_n*g مستمرة، أياً كانت n في $\mathbb{N}$.

ليكن $h:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ تابعاً درجيّـــاً. إذن يوجد $0=t_0<t_1<\cdots<t_{m+1}=2\pi$ وتوجد أعداد $(\lambda_k)_{0\le k\le m}$ بحيـــث $\forall k\in\{0,1,\ldots,m\},\ \forall t\in]t_k,t_{k+1}[,\ h(t)=\lambda_k$، وبناءً على هذا يكون

$$h*g(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_k}{2\pi}\int_{t_k}^{t_{k+1}}g(x-t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_k}{2\pi}\int_{x-t_{k+1}}^{x-t_k}g(u)\,\mathrm{d}u$$

والتابع $h*g$ مستمرٌ لأنّ التابع $t\mapsto G(t)=\int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u$ مستمرٌ. انظـــر النقطة 7. من المبرهنة 13-2.IX. في كتاب التحليل الرياضي I. بذا يتم الإثبات. ❐

2.V. متسلسلات فورييـــه Fourier

1-2.V. **تعريف**: ليكن $k\in\mathbb{Z}$، نعرّف التابع e_k من $\mathcal{C}_{2\pi}$ بالعلاقـــة $e_k(x)=\exp(\mathrm{i}\,kx)$، ونسمي كلَّ عبارة خطيّة من عناصر الجماعة $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ كثير حدود مثلّثي، ونرمز بالرمز $\mathcal{T}$ إلى فضاء كثيرات الحدود المثلثيّة: $\mathcal{T}=\mathrm{vect}\big((e_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$. وإذا كـــانت $n\in\mathbb{N}$ عرّفنا الفضاء الشعاعي الجزئي $\mathcal{T}_n=\mathrm{vect}\big((e_k)_{|k|\le n}\big)$. ونذكِّر أنّ الجماعة $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ تكوِّن أساساً متعامداً نظامياً لـــ $\mathcal{T}$. (بالنسبة إلى الجداء السلمي الذي عرّفناه على $\mathcal{C}_{2\pi}$).

ليكن f من $\mathfrak{R}_{2\pi}$، ولنتأمّل التطبيق الخطّي

$$T_f:\mathfrak{R}_{2\pi}\to\mathfrak{R}_{2\pi},\quad g\mapsto f*g$$

نلاحظ أنّه، مهما تكن $k\in\mathbb{Z}$، فلدينا

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad T_f(e_k)(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t)\,e^{\mathrm{i}\,k(x-t)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{T}}f(t)\,e^{-\mathrm{i}\,kt}\,\mathrm{d}t\right)\cdot e^{\mathrm{i}\,kx}\\&=\langle e_k,f\rangle\,e_k(x)\end{aligned}$$

فالجماعة $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ مكوَّنة من أشعة ذاتيّة للتطبيق الخطّي T_f، والقيمة الذاتيّة الموافقة للشعاع الذاتي e_k هي $\langle e_k,f\rangle$. تسمح لنا هذه الملاحظة بوضع التعريف التالي:

V.2-2. تعريف: ليكن f من $\Re_{2\pi}$، نعرّف الجماعة $(C_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ بالعلاقة

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \langle e_n, f\rangle$$

ونسميها طيف فورييه للتابع f [☝]، ونسمّي العدد $C_n(f)$ ثابت فورييه الأسّي من المرتبة n للتابع f.

ولقد أثبتنا أنّ

$$\forall f \in \Re_{2\pi},\ \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f * e_n = C_n(f)\cdot e_n .$$

V.3-2. تعريف: ليكن f من $\Re_{2\pi}$، نعرّف الجماعتين $(a_n(f))_{n\in\mathrm{I\!N}}$ و $(b_n(f))_{n\in\mathrm{I\!N}^*}$ بالعلاقتين:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathrm{I\!N}, \quad a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\ \forall n \in \mathrm{I\!N}^*, \quad b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ونسمّيهما ثوابت فورييه المثلثيّة للتابع f. ونتيقّن بسهولة صحةَ العلاقات التالية

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathrm{I\!N}, \quad a_n(f) &= C_n(f) + C_{-n}(f)\\ \forall n \in \mathrm{I\!N}^*, \quad b_n(f) &= \mathrm{i}\,(C_n(f) - C_{-n}(f))\end{aligned}$$

V.4-2. اصطلاح: لتكن $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ جماعة ما من فضاء شــعاعي منظّم. نصطلح أنّ نســتخدم الرمز $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n$ دلالة على المتسلسلة $\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n + \lambda_{-n})$.

V.5-2. تعريف: ليكن f من $\Re_{2\pi}$، نسمّي متسلسلة فورييه للتابع f متسلسلة التوابع

$$S(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)\,e_n$$

أو، بأسلوب مُكافئ، متسلسلة التوابع المعرّفة بــ

$$\forall x \in \mathrm{I\!R}, \quad S(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\right)$$

[☝] الأصحّ أن نقول طيف T_f.

3.V. خواص ثوابت فورييـــه

نلخِّصُ في المبرهنة التالية بعض الخواص البسيطة التي تُبرهَنُ مباشرة انطلاقاً من التعريف تاركين تفاصيل الإثبات تمريناً للقارئ.

1-3.V. مبرهنة :

1. ليكن f و g تابعين من $\mathfrak{R}_{2\pi}$، وليكن λ و μ من $\mathbb{C}$، عندئذ

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(\lambda f + \mu g) = \lambda C_n(f) + \mu C_n(g)$$

2. ليكن f تابعاً من $\mathfrak{R}_{2\pi}$، و $\tau \in \mathrm{IR}$. نعرِّف $f_\tau \in \mathfrak{R}_{2\pi}$ بالعلاقــة $f_\tau(x) = f(x-\tau)$. عندئذ يكون $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(f_\tau) = C_n(f) \cdot e^{-in\tau}$.

3. ليكن f تابعاً من $\mathfrak{R}_{2\pi}$، و $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$، عندئذ يكون $C_n(e_m \cdot f) = C_{n-m}(f)$.

ونأتي الآن إلى مبرهنة مهمّة جداً :

2-3.V. مبرهنة : ليكن f و g تابعين من $\mathfrak{R}_{2\pi}$، عندئذ

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(f * g) = C_n(f) \cdot C_n(g) .$$

الإثبات

لنبدأ بإثبات الحالة الخاصّة الموافقة لـــ $n = 0$. لمّا كان مقصـــور التابع $f * g$ علـــى المجال $[0,2\pi]$ مستمراً استنتجنا، بمُقتضى النقطة 5. من المبرهنة 13-2.IX. في كتاب التحليل الرياضي I، أنّه

$$C_0(f * g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f * g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f * g(\frac{2\pi k}{m})$$

وإذا عُدنا إلى تعريف $f * g$ واستخدمنا الخاصّة الخطيّة للتكامل استنتجنا

$$C_0(f * g) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} g(\frac{2\pi k}{m} - t)\right)\mathrm{d}t$$

لنعرِّف إذن

$$h_m : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \quad h_m(t) = f(t)\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} g(\frac{2\pi k}{m} - t)\right)$$

نلاحظ أنّ h_m ينتمي إلى الصف $\Re$ أياً كانت $0 < m$ ، وأنّ

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,2\pi],\quad \lim_{m\to\infty} h_m(t) &= f(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u-t)\,\mathrm{d}u\\ &= f(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(w)\,\mathrm{d}w = C_0(g)\cdot f(t)\end{aligned}$$

وأخيراً نرى أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,2\pi],\quad |h_m(t)| \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

فإذا استخدمنا مبرهنة التقارب للوبيغ استنتجنا أنّ

$$C_0(f*g) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_m(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{m\to\infty} h_m(t)\,\mathrm{d}t = C_0(g)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

أو $C_0(f*g) = C_0(f)\cdot C_0(g)$ ، وبذا يتم المطلوب في حالة $0 = n$.

لنثبت الحالة العامّة، لتكن n و $\mathbb{Z}$ ، عندئذ

$$\begin{aligned}C_n(f*g) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}g(x-t)e^{-\mathrm{i}n(x-t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f\cdot e_{-n})*(g\cdot e_{-n})(x)\,\mathrm{d}x\\ &= C_0\left((f\cdot e_{-n})*(g\cdot e_{-n})\right)\\ &= C_0(f\cdot e_{-n})\cdot C_0(g\cdot e_{-n})\\ &= C_n(f)\cdot C_n(g)\end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب. ❐

V.3-3. مبرهنة (متراجحة Bessel) : ليكن f تابعاً من $\Re_{2\pi}$، عندئذ

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|C_n(f)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

الإثبات

ليكن f تابعاً من $\Re_{2\pi}$، ولتكن n من $\mathbb{N}$. نضع بالتعريف

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)\cdot e_k = \sum_{k=-n}^{n}\langle e_k, f\rangle\cdot e_k$$

ونتحقّق بسهولة أنّ $\langle f - S_n(f), e_p\rangle = 0$ أياً كانت p في $\{-n,1-n,\ldots,n-1,n\}$. ومنه نستنتج أنّ

$$\langle f - S_n(f), S_n(f)\rangle = 0$$

ومن ثَمّ

$$\|S_n(f)\|_2^2 \le \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

ولكن نجد بحسابٍ بسيط أنّ

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n}|C_k(f)|^2$$

إذن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=-n}^{n}|C_k(f)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

وهذه هي المتراجحة المطلوبة. ❐

النتيجتان التاليتان واضحتان انطلاقاً من المبرهنة السابقة.

V.3-4. نتيجة: ليكن f تابعاً من $\Re_{2\pi}$، عندئذ

$$\frac{1}{2}|a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

V.3-5. نتيجة: ليكن f تابعاً من $\Re_{2\pi}$، عندئذ

$$\lim_{n\to\infty} C_n(f) = \lim_{n\to\infty} C_{-n}(f) = \lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0$$

6-3.V. مبرهنة: ليكن f و g تابعين من $\mathfrak{R}_{2\pi}$، وليكن $h = f * g$. عندئذ تتقارب متسلسلة فورييه للتابع h بالنظيم. وبقول أكثر دقّة يكون لدينا

$$\sum_{n\mathbb{Z}} |C_n(f * g)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

الإثبات

يمكننا أن نفترض $\|f\|_2 \ne 0$، وإلاّ لا يوجد ما يجب إثباته. لتكن λ في $\mathbb{R}_+^*$، وعندئذ يُمكننا أن نكتبَ، بمُقتضى المبرهنة 2-3.V :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ C_n(h) = C_n(f)\cdot C_n(g) = C_n(\lambda f)\cdot C_n(\frac{1}{\lambda} g)$$

ومن ثَمّ[☝]

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad |C_n(h)| \le \frac{1}{2}\left(|C_n(\lambda f)|^2 + \left|C_n(\frac{1}{\lambda} g)\right|^2 \right)$$

واستناداً إلى متراجحة Bessel نجد

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=-n}^{n} |C_k(h)| \le \frac{1}{2}\left(\lambda^2 \|f\|_2^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|g\|_2^2 \right)$$

أياً كانت قيمة λ. فإذا اخترنا قيمة λ التي تجعل الطرف الأيمن من المتراجحة السابقة أصغرياً، أي $\lambda = \sqrt{\|g\|_2/\|f\|_2}$، وجدنا

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=-n}^{n} |C_k(h)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

وهذا يُثبت النتيجة المطلوبة. ❐

7-3.V. مبرهنة: ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ تابعاً من الصف C^1 و 2π–دوري. عندئذ

$$\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\qquad C_n(f) = \frac{1}{\mathrm{i}n} C_n(f')$$

الإثبات

يكفي إجراء مُكاملة بالتجزئة لنجد

$$\begin{aligned} C_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\Big]_0^{2\pi} + \frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + \mathrm{i}nC_n(f) = \mathrm{i}nC_n(f) \end{aligned}$$

وبذا يتمّ الإثبات. ❐

[☝] لأنّ $ab \le (a^2+b^2)/2$.

8-3.V. نتيجة: ليكن k في $\mathbb{N}^*$، وليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ تابعــاً من الصف C^k و 2π– دوري.
عندئذ يكون $C_n(f) = o(n^{-k})$.

الإثبات

في الحقيقة، نستنتج من المبرهنة السابقة وبالتدريج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n^k \left|C_n(f)\right| = \left|C_n(f^{(k)})\right|$$

ونحصل على النتيجة المطلوبة بالاستفادة من النتيجة 5-3.V. ❐

4.V. التقارب النقطي لمتسلسلات فورييــه

تؤدّي التوطئة التالية دوراً مهماً في دراستنا اللاحقة.

1-4.V. توطئة Riemann : ليكن $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ تابعاً من الصف $\mathfrak{R}$. عندئذ يكون

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

الإثبات

لقد وجدنا عند إثباتنا للمبرهنة 4-1.V. أنّ مجموعة التوابع الدرجيّة على $[a,b]$ تكون كثيفة في فضاء التوابع التي تنتمي إلى الصف $\mathfrak{R}$ على $[a,b]$ بالنسبة إلى التقارب المنتظم.
لتكن $\varepsilon > 0$. إذن نجد تابعاً درجيّاً g_ε على $[a,b]$، بحيث يتحقّق الشرط:

$$\sup_{[a,b]}|g - g_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

وعندها، مهما تكن λ في $\mathbb{R}$ يكن:

$$\text{①} \qquad \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b g_\varepsilon(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}\,t\right| \le (b-a)\sup_{[a,b]}|g - g_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ولّما كان g_ε تابعاً درجيّاً، وجدنا $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m+1} = b$ ووجدنا $(\alpha_k)_{0\le k\le m}$ بحيث $\forall k \in \{0,1,\ldots,m\},\ \forall t \in]t_k, t_{k+1}[,\ g_\varepsilon(t) = \alpha_k$. وبناءً على هذا يكون

$$\int_a^b g_\varepsilon(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \left(\cos(\lambda t_k) - \cos(\lambda t_{k+1})\right)$$

ومنه

$$\left|\int_a^b g_\varepsilon(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{2}{\lambda}\sum_{k=0}^{m}|\alpha_k|$$

فإذا اخترنا $\lambda_\varepsilon = \frac{4}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{m}|\alpha_k|$ صار لدينا

$$\forall\lambda > \lambda_\varepsilon,\quad \left|\int_a^b g_\varepsilon(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad ②$$

ومن ① و ② نجد

$$\forall\lambda > \lambda_\varepsilon,\quad \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \le \varepsilon$$

وبهذا يتمّ المطلوب. ❐

V.4-2. تعريف: ليكن f تابعاً من $\mathfrak{R}_{2\pi}$. لقد عرّفنا، حين تكون n و $\mathbb{N}$، المجموع الجزئيّ:

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)e_k = \sum_{k=-n}^{n} f * e_k = f * \left(\sum_{k=-n}^{n} e_k\right) \qquad ❶$$

نسمّي العنصرَ $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ من $\mathfrak{R}_{2\pi}$ نواةَ ديرخليه Dirichlet ذات الدليل n.

ويتيقَّن القارئ بحساب بسيط أنّ

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}(e^{\mathrm{i}x})^k = \frac{e^{-\mathrm{i}nx} - e^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1 - e^{\mathrm{i}x}}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z},\quad D_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \qquad ❷$$

ليكن x و I R. تُكتبُ العلاقة ❶ بالشكل

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

فإذا استفدنا من كوْن التابع D_n زوجيّاً أمكننا تحويل التكامل السابق إلى الشكل

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

ولكن $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ إذن نستنتج أنّه، مهما تكن ℓ و $\mathbb{C}$ ، فلدينا

$$S_n(f)(x) - \ell = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\big(f(x-t) + f(x+t) - 2\ell\big)\,\mathrm{d}t$$

ولكنّ توطئة Riemann تبيِّنُ أنّ

$$\forall \delta \in]0,\pi], \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi} D_n(t)\big(f(x-t) + f(x+t) - 2\ell\big)\,\mathrm{d}t = 0$$

وعليه نكون قد أثبتنا التكافؤ التالي

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \ell \\ \Updownarrow \\ \exists \delta \in]0,\pi], \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta} D_n(t)\big(f(x-t) + f(x+t) - 2\ell\big)\,\mathrm{d}t = 0\end{gathered} \qquad ❸$$

ولكنّ التابع $t \mapsto \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{2}{t}$ يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍ على المجال $[0,\pi]$، و بناءً على ذلك فإنّ توطئة Riemann تسمح لنا أن نكتبَ، أياً كانت δ من $]0,\pi]$،

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\left(\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{2}{t}\right)\big(f(x-t) + f(x+t) - 2\ell\big)\sin((n+1/2)t)\,\mathrm{d}t = 0$$

فإذا استفدنا من هذه الخاصّة، وعُدنا إلى عبارة D_n في ❷، اســـتنتجنا أنّه يمكـــن التعبـــير عن التكافؤ في ❸ بالشكل التالي:

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \ell \\ \Updownarrow \\ \exists \delta \in]0,\pi], \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x-t) + f(x+t) - 2\ell}{t}\right)\cdot \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\mathrm{d}t = 0\end{gathered} \qquad ❹$$

تسمح لنا المناقشة السابقة بإثبات المبرهنة المهمّة التالية:

V.4-3. مبرهنة Dirichlet : ليكن f تابعاً من $\mathfrak{R}_{2\pi}$. ولتكن x و $\mathbb{R}$. نعرّف التطبيقين

$$f^- :]-\infty, x] \to \mathbb{C}, \quad f^-(t) = \begin{cases} f(x^-) & : \ t = x \\ f(t) & : \ t < x \end{cases}$$

$$f^+ : [x, +\infty[\to \mathbb{C}, \quad f^+(t) = \begin{cases} f(x^+) & : \ t = x \\ f(t) & : \ t > x \end{cases}$$

إذا كان التطبيقان f^- و f^+ قابلين للاشتقاق عند x ، فإنّ متسلسلة فورييـــه للتابع f تكون متقاربة عند النقطة x ، ويكون مجموعها $S(f)(x)$ مساوياً $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

الإثبات

لنعرّف $\ell = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ ، وليكن δ عنصراً ما من $]0, \pi[$. عندئذ نتيقّن بسهولة أنّ

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\ell}{t} = (f^+)'(x) - (f^-)'(x)$$

وبناءً على ذلك يقبل التابع

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\ell}{t}$$

التمديد إلى تابع من الصف $\mathfrak{R}$ على المجال $[0, \delta]$. ومن ثَمّ فإنّ توطئة Riemann تقتضي أنّ

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\delta \left(\frac{f(x-t) + f(x+t) - 2\ell}{t} \right) \cdot \sin\left((n + \frac{1}{2})t \right) dt = 0$$

فإذا استفدنا من التكافؤ ❹ وصلنا إلى النتيجة المطلوبة. ❐

V.4-4. نتيجة : ليكن f تابعاً من $\mathcal{C}_{2\pi}$ ، قابلاً للاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند كلّ نقطـــة من $\mathbb{R}$. عندئذ تتقارب متسلسلة فورييه للتابع f ببساطة نحو التابع f .

5.V. التقارب بمعنى سيزارو لمتسلسلات فورييـــه

1-5.V. تعريف: لتكن n في $\mathbb{N}^*$، نعرِّف نواةَ فيجر Fejer ذات الدليل n، بأنها العنصر

$$K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$$

من $\Re_{2\pi}$ حيث D_k هي نواة ديرخليه ذات الدليل k.

نلخِّص فيما يلي بعض أهم خواص نواة فيجر.

2-5.V. مبرهنة:

1. مهما يكن n في $\mathbb{N}^*$، ومهما يكن x في $\mathbb{R}$، فلدينا

$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right) \quad e^{ikx} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

2. مهما يكن n في $\mathbb{N}^*$، ومهما يكن x في $\mathbb{R}$، فإنّ $K_n(x) \geq 0$.
3. مهما يكن n في $\mathbb{N}^*$، فإنّ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
4. مهما يكن n في $\mathbb{N}^*$، ومهما يكن δ في $]0,\pi[$، فإنّ المتراجحة التالية صحيحة:

$$\forall x \in [-\pi,\pi]\backslash[-\delta,\delta], \quad K_n(x) \leq \frac{1}{n\sin^2(\delta/2)}$$

الإثبات

1. لنعرِّف $\widetilde{K}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}$. عندئذ، أياً كانت $1 \leq m$، فلدينا

$$\begin{aligned}(m+1)\widetilde{K}_{m+1}(x) - m\widetilde{K}_m(x) &= \sum_{k=-m}^{m}(m+1-|k|)e^{ikx} - \sum_{k=-m}^{m}(m-|k|)e^{ikx}\\ &= \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = D_m(x)\end{aligned}$$

ولكن $\widetilde{K}_1(x) = D_0(x) = 1$ إذن

$$\begin{aligned}n\widetilde{K}_n(x) &= \widetilde{K}_1(x) + \sum_{m=1}^{n-1}\left((m+1)\widetilde{K}_{m+1}(x) - m\widetilde{K}_m(x)\right)\\ &= D_0(x) + \sum_{m=1}^{n-1} D_m(x) = nK_n(x)\end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ المساواة الأولى.

ومن جهة أخرى نعلم أنّه، في حالة x و $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ يكون لدينا

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{1-\cos x}$$

فإذا استفدنا من العلاقة $(n+1)K_{n+1} - nK_n = D_n$ أمكننا أن نكتبَ، أياً كانت n،

$$(n+1)K_{n+1} + \frac{\cos(n+1)x}{1-\cos x} = nK_n(x) + \frac{\cos nx}{1-\cos x}$$

وهذا يسمح لنا أن نثبت بالتدريج

$$nK_n(x) + \frac{\cos nx}{1-\cos x} = K_1(x) + \frac{\cos x}{1-\cos x} = \frac{1}{1-\cos x}$$

وذلك مهما تكن n و $\mathbb{N}^*$ ومهما تكن x و $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. ومن ثَمّ نجد بإصلاح العلاقة السابقة:

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

وتبقى هذه العلاقة صحيحة حين يكون x و $2\pi\mathbb{Z}$ على أن نُمدِّد الطرف الأيمن باستمرار عند هذه النقاط.

2. إنّ الخاصّة المذكورة واضحة اعتماداً على النتيجة السابقة.

3. لّما كان $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ixk}\,dx = 0$ حين يكون $k \neq 0$، استنتجنا من المساواة الأولى في 1. أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$$

4. من الواضح أنّ

$$\forall x \in [-\pi,\pi]\backslash[-\delta,\delta], \quad \sin^2(\delta/2) \le \sin^2(x/2)$$

وبالاستفادة من المساواة الثانية في 1. نحصل على المتراجحة المطلوبة. ❐

ليكن f و $\mathfrak{R}_{2\pi}$. لقد وجدنا أنّ متتالية المجاميع الجزئيّة $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ لمتسلسلة فورييه للتابع f يمكن بوجه عام ألاّ تكون متقاربة، ولكن ماذا يمكننا أن نقول عن متتالية متوســطات سيزارو Cesàro أي المتتالية $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، حيث $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$ ؟

في الحقيقة، لدينا

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f * D_k = f * \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k\right) = f * K_n$$

وإذا استخدمنا المبرهنة 2-5.V. وجدنا

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) C_k(f) e^{ikx}$$

وبالاستفادة من كوْن K_n تابعاً زوجياً ومن الخاصّة 3. في المبرهنة 2-5.V. نجد

$$\sigma_n(f)(x) - \ell = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\cdot\big(f(x+t) + f(x-t) - 2\ell\big)\,\mathrm{d}t \qquad ⌘$$

تتيح لنا خواص نواة فيجر أن نثبت المبرهنة المهمّة التالية:

3-5.V. مبرهنة: ليكن f و $\mathfrak{R}_{2\pi}$. ولتكن $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية المجاميع الجزئيّة لمتسلسلة فورييه للتابع f. وأخيراً لتكن $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متوسطات سيزارو Cesàro للمتتالية $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$، أي $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$. عندئذ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

الإثبات

لتكن x و $\mathbb{R}$، نعرِّف كما في السابق $\ell = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. ونعوِّض في ⌘ فنجد

$$\sigma_n(f)(x) - \ell = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\cdot\big(f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)\big)\,\mathrm{d}t$$

ومن ثَمّ، أياً كانت δ و $]0,\pi]$، فلدينا

$$|\sigma_n(f)(x) - \ell| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} K_n(t)\cdot\Big(\big|f(x+t) - f(x^+)\big| + \big|f(x-t) - f(x^-)\big|\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{4}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\cdot\|f\|_\infty\,\mathrm{d}t$$

وبالاستفادة من المبرهنة 2-5.V. نجد، أياً كانت δ و $]0,\pi]$ وأياً كانت n و $\mathbb{N}^*$، ما يلي :

$$(\S)\ |\sigma_n(f)(x) - \ell| \le \sup_{0<t<\delta}\left(\frac{|f(x+t) - f(x^+)| + |f(x-t) - f(x^-)|}{2}\right) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

لتكن $\varepsilon > 0$ ، إذن يوجد، استناداً إلى تعريف النهاية، δ_ε في $]0,\pi]$ بحيث

$$0 < t < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|f(x+t)-f(x^+)\right| + \left|f(x-t)-f(x^-)\right| \le \varepsilon$$

وبعدها نجد n_ε في $\mathbb{N}^*$ ، بحيث

$$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta_\varepsilon/2)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

فإذا طبّقنا $(\S)$ استنتجنا، اعتماداً على ما سبق، أنّ

$$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |\sigma_n(f)(x) - \ell| < \varepsilon$$

أي إنّ $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ ، وهذا هو المطلوب إثباته. ❐

V.5-4. نتيجة: ليكن f في $\mathfrak{R}_{2\pi}$. إذا تقاربت متسلسلة فورييه للتابع f عند نقطة ما x في $\mathbb{R}$ ، حينئذ يكون مجموعها $S(f)(x)$ مساوياً $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

الإثبات

لنفترض أنّ متسلسلة فورييه للتابع f عند نقطة x في $\mathbb{R}$ ، متقاربة وأنّ مجموعها يساوي ℓ . عندئذ تتقارب متتالية المجاميع الجزئيّة $(S_n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ نحو ℓ ، واستناداً إلى مبرهنة سيزارو تتقارب المتتالية $(\sigma_n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ أيضاً نحو ℓ . ولكنّ نهاية المتتاليـــة $(\sigma_n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ هـــي $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ بمقتضى المبرهنة السابقة، إذن $\ell = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. بذا يتم المطلوب. ❐

V.5-5. نتيجة: ليكن f في $\mathcal{C}_{2\pi}$. إذا تقاربت متسلسلة فورييه للتابع f عند نقطة ما x في $\mathbb{R}$ ، حينئذ يكون مجموعها $S(f)(x)$ مساوياً $f(x)$.

الإثبات

هذه نتيجة واضحة من الخاصّة السابقة. ❐

V.5-6. نتيجة : ليكن f في $\mathcal{C}_{2\pi}$. إذا كان $\forall n \in \mathbb{Z},\ C_n(f) = 0$ استنتجنا أنّ $f = 0$.

الإثبات

لأنّه عندئذ يكـــون $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n})C_k(f)e_k = 0$ ، والمتتاليـــة $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب ببساطة نحو f بناءً على المبرهنة V.5-3. ❐

V.5-7. ملاحظة: تُبيِّنُ الخاصّة السابقة أن التطبيق الخطّي الذي يربط بتابع مستمرٍ و $2\pi-$ دوري f طيفَه أي $(C_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ هو تطبيق خطّي متباين. وعادة نستخدم هذه الخاصّة على الوجـــه التالي : " إذا كان لتابعين مستمرين و $2\pi-$ دوريين الطيف نفسه، أي ثوابت فورييه نفسها، كانا متساويين".

وبوجه عام، إنّ الإثبات السابق نفسه يبيِّن أنّه إذا كان لتابعين من الصف $\Re_{2\pi}$ الطيف نفسه، كانا متساويين عند نقاط استمرارهما المشتركة.

V.5-8. مبرهنة: ليكن $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. ولتكن $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية المجاميع الجزئيّة لمتسلسلة فورييه للتابع f . وأخيراً لتكن $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متوسطات ســـيزارو Cesàro للمتتاليـــة $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$. عندئذ تتقارب المتتالية $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ بانتظام نحو التابع f .

الإثبات

لمّا كان $\sigma_n(f) = f * K_n$ فإننا نجد استناداً إلى النقطة 3. من المبرهنة V.5-2. أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\big(f(x-t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t$$

وبناءً عليه، مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ ، و $n \in \mathbb{N}^*$ ، و $\delta \in]0,\pi[$ يكن لدينا

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|\,\mathrm{d}t + \\ &\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \sup_{|t|\le\delta}|f(x-t) - f(x)| + 2\|f\|_\infty \sup_{\delta\le|t|\le\pi} K_n(t)\end{aligned}$$

وأخيراً، مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ ، و $n \in \mathbb{N}^*$ ، و $\delta \in]0,\pi[$ يكن لدينا

$$(\S)\qquad |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \le \sup_{|t|\le\delta}|f(x-t) - f(x)| + \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta/2)}$$

لتكن $\varepsilon > 0$. لمّا كان f مستمراً بانتظام على $\mathbb{R}$ ، لأنّه تابع مستمرٌ ودوري، استنتجنا أنّه يوجد $\delta_\varepsilon \in]0,\pi[$ بحيث

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon], \quad |f(x-t) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

وعندئذ نجد $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ بحيث

$$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin^2(\delta_\varepsilon/2)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

فإذا طبّقنا $(\S)$ استنتجنا، اعتماداً على ما سبق، أنّ

$$\forall n \ge n_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sigma_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$$

أي إنّ $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f) \overset{u}{=} f$ ، وهذا هو المطلوب إثباته. ❐

9-5.V. ملاحظة: تُبيِّنُ المبرهنة السابقة أنّ مجموعة كثيرات الحدود المثلّثيّة $\mathcal{T}$ كثيفة في الفضاء الشعاعيّ المنظّم $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$. أي يُمكن تقريب كلِّ تابع مستمرٍ و $2\pi-$دوريّ بمتتالية متقاربة بانتظام من كثيرات الحدود المثلّثيّة.

6.V. التقارب بالمتوسّط التربيعي لمتسلسلات فورييـــه

1-6.V. مبرهنة : ليكن f و g تابعين من $\Re_{2\pi}$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f) C_n(g) e^{inx}$$

الإثبات

لنعرّف الجماعة $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ بالعلاقة

$$\lambda_n = C_n(f)\cdot C_n(g) = C_n(f * g)$$

لقد أثبتنا في المبرهنة 6-3.V أنّ المتسلسلة $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n$ متقاربة بالنظيم. لنعرّف إذن التابـــع h من $\mathcal{C}_{2\pi}$ بأنه مجموع هذه المتسلسلة : $h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e_n$. عندئذ يكون للتابعين $f * g$ و h من $\mathcal{C}_{2\pi}$ طيف فورييه نفسه. ونستنتج بمُقتضى الملاحظة 7-5.V أنّهما متساويان ويتم المطلوب. ❐

V.6-2. مبرهنة :متطابقة Bessel-Parseval ، ليكن f و g تابعين من $\Re_{2\pi}$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{C_n(f)} \cdot C_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} \cdot g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t$$

الإثبات

من الواضح أنّ المساواة الثانية تنتج من الأولى بوضع $g = f$. يكفي إذن أن نُثبتَ صحةَ المساواة الأولى.

ليكن f و g تابعين من $\Re_{2\pi}$ ، ولنعرّف التابع h من $\Re_{2\pi}$ بالعلاقة : $h(t) = \overline{f(-t)}$. عندئذ يتحقّق القارئ بسهولة صحةَ الخاصّتين التاليتين:

$$h * g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} \cdot g(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ C_n(h) = \overline{C_n(f)}$$

ولكن، استناداً إلى المبرهنة السابقة، لدينا

$$h * g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(h) C_n(g)$$

وهذه هي المساواة المطلوبة. ❐

V.6-3. نتيجة : ليكن f تابعاً من $\Re_{2\pi}$ ، ولتكن $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية المجاميع الجزئيّة لمتسلسلة فوربيه للتابع f . عندئذ يكون

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t) - S_n(f)(t)|^2\,\mathrm{d}\,t\right) = 0$$

ونعبِّر عن هذه النتيجة بقولنا إنّ متسلسلة فورييهللتابع f تتقارب نحو f بالمتوسّط التربيعيّ.

الإثبات

إذا عُدنا إلى إثبات متراجحة Bessel نجد أنّ

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t - \sum_{k=-n}^{n} |C_k(f)|^2$$

والنتيجة السابقة تبيِّن إذن أنّ $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_2^2 = 0$ ، وهذا هو المطلوب. ❐

7.V. تطبيقات

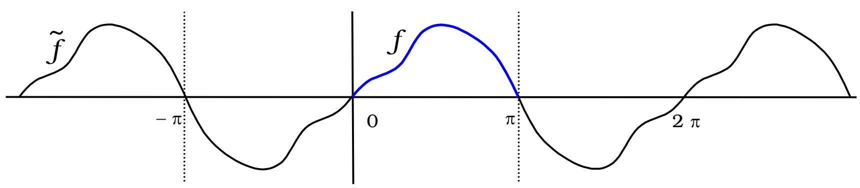
1-7.V. متراجحة Writinger: ليكن $[a,b]$ مجالاً متراصّاً وغير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن $E = C_0^1([a,b])$، فضاء التوابع التي تنتمي إلى الصف C^1 على $[a,b]$ وتنعدم عند كلٍّ من a و b. عندئذ

$$\forall f \in E, \quad \int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

أمّا الثابت $(b-a)^2\pi^{-2}$ فهو أفضل ثابت ممكن.

الإثبات

لنفترض أولاً أنّ $a = 0$ و $b = \pi$. وليكن التابع f عنصراً من E عندئذ يوجد تابع وحيد $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ فردي ويقبل 2π دوراً له بحيث $\tilde{f}_{|[0,\pi]} = f$. ونتيقّنُ بسهولة أنّ $\tilde{f}$ ينتمي إلى الصف C^1.



لتكن إذن $S(\tilde{f}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ متسلسلة فورييه للتابع $\tilde{f}$. عندئذ تكون متسلسلة فورييه للتابع $\tilde{f}'$ هي $S(\tilde{f}') = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathrm{i}nc_n e_n$، وذلك لأنّ $C_0(\tilde{f}') = 0$، هنا استخدمنا الفرْض $f(0) = f(\pi)$. وبمُلاحظة أنّ $c_0 = 0$، لأنّ $\tilde{f}$ تابع فردي، نستنتج أنّ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{f}(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^2 |c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{f}'(t)\right|^2 \mathrm{d}t$$

وبالاستفادة من كوْن التابعين $t \mapsto \left|\tilde{f}(t)\right|^2$ و $t \mapsto \left|\tilde{f}'(t)\right|^2$ زوجيّين استنتجنا

$$\int_0^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \le \int_0^{\pi} |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

وتحدث المساواة إذا كان $c_n = 0$ أياً كانت n في $\mathbb{Z}\setminus\{-1,+1\}$، أي إذا وُجِدَ λ في $\mathbb{C}$ بحيث يكون $\forall t \in [0,\pi],\ f(t) = \lambda \sin t$.

لإثبات الحالة العامّة، نتأمّل تابعاً f من E . ونعرِّف

$$g:[0,\pi]\to\mathbb{C},\ g(x)=f(a+\frac{b-a}{\pi}x)$$

فنلاحظ أنّ g ينتمي إلى الصف C^1 على $[0,\pi]$ وينعدم عند 0 وعند π . إذن بمقتضى الحالة السابقة نجد

$$\int_0^\pi |g(t)|^2\,\mathrm{d}t \le \int_0^\pi |g'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

وهذا يُكافئ

$$\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

حيث تحدث المساواة إذا وفقط إذا كان g متناسباً مع التابع $\sin$ على $[0,\pi]$، أي إذا وفقط إذا وُجِدَ λ في $\mathbb{C}$ بحيث يكون $\forall t\in[a,b],\quad f(t)=\lambda\sin(\frac{t-a}{b-a}\pi)$.

V.7-2. كثيرات حدود Bernoulli:

من الواضح أنّ الشروط الثلاثة التالية تعرِّف بوجه وحيد وبالتدريج متتالية من كثيرات الحدود $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي نسميها كثيرات حدود Bernoulli:

$$(1)\qquad \forall x\in\mathbb{R},\quad B_0(x)=1$$

$$(2)\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad B_n'(x)=n\,B_{n-1}(x)$$

$$(3)\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^{2\pi} B_n(x)\,\mathrm{d}x=0$$

في الحقيقة، إذا افترضنا معرفة B_{n-1} فإنّ الشرط (2) يبيِّن وجود ثابت λ_n بحيث

$$B_n(x)=\lambda_n+n\int_0^x B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

والشرط (3) يسمح لنا بتعيين λ_n كما يلي:

$$\begin{aligned}0&=2\pi\lambda_n+n\int_0^{2\pi}\left(\int_0^x B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=2\pi\lambda_n+\left[n(x-2\pi)\int_0^x B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right]_0^{2\pi}-n\int_0^{2\pi}(x-2\pi)B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\lambda_n = n\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2\pi}-1\right)B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}\,x$$

إذن

$$B_n(x) = n\int_0^{2\pi}\left(\frac{t}{2\pi}-1\right)B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t + n\int_0^{x}B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{4}$$

فعلى سبيل المثال نجد

$$\begin{aligned} B_1(x) &= x-\pi \\ B_2(x) &= x^2-2\pi x+\frac{2\pi^2}{3} \\ B_3(x) &= x^3-2\pi x^2+2\pi^2 x \end{aligned} \tag{5}$$

ونلاحظ أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$B_{n+1}(2\pi)-B_{n+1}(0) = \int_0^{2\pi}B'_{n+1}(t)\,\mathrm{d}\,t = (n+1)\int_0^{2\pi}B_n(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

وبناءً على هذا يكون

$$\forall n\geq 2,\ \ B_n(2\pi)=B_n(0) \tag{6}$$

لنعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، التابع الـ 2π–دوري الوحيد $\widetilde{B}_n$ الذي يتّفق مع B_n على المجال $]0,2\pi[$. نلاحظ أنّ $\widetilde{B}_n$ ينتمي إلى الصف C^1 قِطَعياً.

لنعيِّن متسلسلة فورييه للتابع $\widetilde{B}_1$. في الحقيقة، إنّ $C_0(\widetilde{B})=0$، أمّا حين تكون $k\neq 0$ فنجد

$$\begin{aligned} C_k(\tilde{B}_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)e^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left.\frac{(\pi-x)e^{-\mathrm{i}kx}}{2\pi\mathrm{i}k}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{i}}{k} \end{aligned}$$

وبمُقتضى مبرهنة ديرخليه نجد

$$\forall x\in\,]0,2\pi[,\quad x-\pi = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}kx}}{k} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} \tag{7}$$

لنعيّن بوجه عام متسلسلة فورييه لـــ $\widetilde{B}_n$، حيث $n \geq 2$. في الحقيقة يبيّن الشرط (3) أنّ $C_0(\widetilde{B}_n) = 0$، أمّا حين يكون $k \neq 0$، فلدينا، استناداً إلى الخاصّة (2):

$$C_k(\widetilde{B}_n) = \frac{1}{\mathrm{i}\,k} C_k(\widetilde{B}'_n) = \frac{n}{\mathrm{i}\,k} C_k(\widetilde{B}_{n-1})$$

وهذا يسمح لنا أن نستنتج بالتدريج :

$$\forall n \geq 1,\ \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \quad C_k(\widetilde{B}_n) = -\frac{n!}{(\mathrm{i}\,k)^n} \tag{8}$$

إنّ استمرار التابع $\widetilde{B}_n$ والتقارب المنتظم لمتسلسلة فورييه للتابع $\widetilde{B}_n$ حين يكون $n \geq 2$ يسمحان لنا أن نستنتج

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \in [0, 2\pi], \quad B_n(x) = -n! \sum_{k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{e^{\mathrm{i}\,kx}}{(\mathrm{i}\,k)^n}$$

وبناءً على هذا، مهما تكن n في $\mathrm{I\!N}^*$، ومهما تكن x في $[0,2\pi]$ فلدينا

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n)!} B_{2n}(x) \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n+1)!} B_{2n+1}(x) \tag{10}$$

لنعرّف، أياً كانت n في $\mathrm{I\!N}$، $b_n = \dfrac{B_n(0)}{(2\pi)^n}$. فيكون $b_0 = 1$، $b_1 = -\dfrac{1}{2}$. واستناداً إلى العلاقة (2) نجد

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\},\ \ B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}(2\pi)^{n-k} b_{n-k} \tag{11}$$

وإذا لاحظنا أنّ درجة كثير الحدود B_{n+1} هي $n+1$، استنتجنا من علاقة تايلور أنّ:

$$B_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{B_{n+1}^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

فإذا استفدنا من العلاقتين (6) و (11) استنتجنا أنّه، في حالة $1 \leq n$:

$$(2\pi)^{n+1} b_{n+1} = B_{n+1}(2\pi) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k b_{n+1-k} (2\pi)^{n+1}$$

أو

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k b_k = 0 \tag{12}$$

ومنه

$$\forall n \geq 1,\ b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k b_k \tag{13}$$

وتسمح هذه العلاقة الأخيرة، مع الشرط $b_0 = 1$ بتعيين جميع حدود المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الـــتي تسمّى متتالية أعداد Bernoulli . وتسمح هذه المتتالية بتعيين كثيرات الحدود $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ وذلك استناداً إلى علاقة تايلور و (11) فنجد

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k b_{n-k}(2\pi)^{n-k} x^k \tag{14}$$

لاحظ أنّ العلاقة (10) تُبيِّنُ أنّ $b_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 1,$ ، في حـــــين تُعطـــي العلاقـــة (9) عند $x = 0$ النتيجة التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n+1} \frac{b_{2n}}{2(2n)!}(2\pi)^{2n} \tag{15}$$

ونجد فيما يلي بعض القيم العدديّة

n	2	4	6	8	10
b_n	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$

نختتم هذه الفقرة بتطبيق أخير لمتتالية أعداد Bernoulli . في الحقيقة، ينتج من الخاصّــة (15) أنّ المتتالية $\left(\frac{b_n}{n!}(2\pi)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة، وهذا يبيِّن تقارب المتسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$ في القرص المفتوح $D(0,2\pi)$. لنعرّف إذن التابع التحليلي $F : D(0,2\pi) \to \mathbb{C}$ بالعلاقة

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

ومن جهة أخرى نعرّف التابع التحليلي

$$G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

حيث نلاحظ أنّ $G(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ أياً كانت $z \neq 0$ ، والنقطة $z = 0$ نقطة شاذّة كاذبة.

ومن ثَمّ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\forall z \in D(0,2\pi),\ \ F(z)\cdot G(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!}\frac{1}{(n+1-k)!}\Big)z^n\\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k} b_k\Big)\frac{z^n}{(n+1)!} = 1\end{aligned}$$

حيث استفدنا من العلاقة (12). وبناءً على ما سبق نرى أنّ

$$\forall z \in D(0,2\pi),\quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n = \frac{z}{e^z-1}$$

وإذا استخدمنا الخاصّة، $b_{2n+1} = 0$ أياً كانت $1 \le n$، استنتجنا أنّ

$$\forall z \in D(0,2\pi),\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n}}{(2n)!}z^{2n} = \frac{z}{e^z-1} - b_1 z = \frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z/2}{\operatorname{th}(z/2)}$$

وبناءً على هذا

$$\forall z \in D(0,\pi),\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n}2^{2n}}{(2n)!}z^{2n} = \frac{z}{\operatorname{th}(z)}$$

وبطرح العلاقتين السابقتين وملاحظة أنّ $\frac{1}{\operatorname{th}(z)} - \frac{1}{2\operatorname{th}(z/2)} = \frac{1}{2}\operatorname{th}(z/2)$ نجد

$$\forall z \in D(0,\pi),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}z^{2n} = \frac{z}{2}\operatorname{th}(\frac{z}{2})$$

أو

$$\forall z \in D(0,\pi/2),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}(2^{2n}-1)2^{2n}}{(2n)!}z^{2n-1} = \operatorname{th}(z)$$

وأخيراً، لّما كان $\operatorname{th}(i z) = i\tan(z)$ اســتنتجنا النشر بمتسلسلة صحيحة في جوار 0، للتابع $\tan$:

$$\forall z \in D(0,\pi/2),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}(2^{2n}-1)2^{2n}(-1)^{n-1}}{(2n)!}z^{2n-1} = \tan(z)$$

تمرينات

التمرين 1. عيّن متسلسلة فورييه للتابع الزوجي والــ2π-دوري f المعرّف على المجال $[0,\pi]$ بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases}1 & : \ 0\le x\le \pi/2\\ \dfrac{2(\pi-x)}{\pi} & : \ \pi/2\le x\le \pi\end{cases}$$

واستنتج متسلسلة فورييه للتابع الزوجي والــ2π-دوري g المعرّف على المجال $[0,\pi]$ بالعلاقة

$$g(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2x}{\pi} & : \ 0\le x\le \pi/2\\ 0 & : \ \pi/2\le x\le \pi\end{cases}$$

التمرين 2. عيّن متسلسلة فورييه للتابع الــ2π-دوري f المعرّف على المجال $[-\pi,\pi]$ بالعلاقة $f(x)=|x|$. واستنتج أنّ

$$\forall x\in[0,\pi/2],\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^2(2n+1)x}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^2}{8}x^2-\frac{\pi}{6}x^3$$

التمرين 3. عيّن متسلسلة فورييه للتابع الزوجي والــ 2-دوري f المعرّف على المجــال $[0,1]$ بالعلاقة $f(x)=-2x+1$. ثُمّ استنتج متسلسلة فورييه للتابع الفردي الــ 2-دوري g المعرّف على المجال $[0,1]$ بالعلاقة $g(x)=-x^2+x$.

التمرين 4. عيّن متسلسلة فورييه للتابعين الــ2π- دوريين f و g المعرّفين على المجال $]-\pi,\pi]$ بالعلاقتين $f(x)=e^{ax}$ و $f(x)=\mathrm{ch}(ax)$ ، حيث $a\neq 0$ ، ثُمّ اســـتنتج مجموع كلٍّ من المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^2}{(n^2+a^2)^2}$$

التمرين 5. عيّن متسلسلة فورييه للتابع f المعرّف بالعلاقة $\forall x\in \mathrm{IR}, f(x)=|\sin x|^3$. ثُمّ اســـتنتج أنّ

$$\pi^2=\frac{256}{45}+\frac{4608}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-9)^2(4n^2-1)^2}$$

التمرين 6. لتكن $m \in \mathbb{N}$ ، ولنعرّف $\forall x \in \mathbb{R},\ f_m(x) = |\sin x|^{2m+1}$.

I. أثبت أنّه، أياً كانت $n \in \mathbb{N}^*$ ، فلدينا $b_n(f_m) = 0$ و $a_{2n-1}(f_m) = 0$.

II. لنعرّف $A_n^{(m)} = \int_0^{\pi} \sin^{2m+1}(x) \cdot \cos(2nx)\,\mathrm{d}x$.

1. أثبت أنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n^{(0)} = \dfrac{2}{1-4n^2}$.
2. ثُمّ أثبت كذلك أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad A_n^{(m)} = \frac{2m(2m+1)}{(2m+1)^2 - 4n^2} A_n^{(m-1)} .$$

III. اكتب متسلسلة فورييه للتابع f_m ، واستنتج عبارة لــ π كمجموع متسلسلة عددية.

التمرين 7. ليكن التابع الــ 2π- دوري f المعرّف على المجال $[0,2\pi]$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{3(x-\pi)^2 - \pi^2}{12}$$

1. ارسم بيان التابع f وانشره بمتسلسلة فورييه.
2. استنتج قيمة $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.
3. لتكن $a \in \mathbb{R}_+^*$. ولنضع $F(a) = \int_0^{\infty} e^{-a x} f(x)\,\mathrm{d}x$. أثبت أنّ

$$F(a) = \frac{1}{1-e^{-2a\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ax} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ثُمّ احسب $F(a)$.

4. أثبت أنّ $F(a) = a \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2(n^2+a^2)}$.

التمرين 8.

I. لتكن $a \neq 0$ ، وليكن g التابع الــ 2π- دوري المعرّف على المجال $[-\pi,\pi]$ بالعلاقــة $g(x) = a^2x^2/2$.

1. عيّن متسلسلة فورييه للتابع g ، وأثبت أنّها متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ نحو g .
2. احسب مجموع كلٍ من المتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ ، و $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

II. نعرّف حين تكون a و IR_+^* و x و IR، المقـــدار $f(x)=2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2\cos(nx)}{n^2+a^2}$.

أثبت أنّ f تابع معرّف ومستمرٌ و 2π- دوري على IR.

III.

1. أثبت أنّ $\forall x\in\mathrm{IR},\quad g(x)-f(x)=\frac{a^2\pi^2}{6}+2a^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2\cos(nx)}{n^2(n^2+a^2)}$.

2. استنتج أنّ التابع $g-f$ ينتمي إلى الصف C^2 واحسب $(g-f)''$.

3. أثبت أنّه على المجال $]-\pi,\pi[$ يكون التابع f حلاً لمعادلة تفاضليّة خطّية من المرتبة الثانية يُطلب تعيينها. (أي توجد أعداد α و β و γ بحيث $f''+\alpha f'+\beta f=\gamma$).

4. * استنتج أنّه توجد أعداد A و B و C بحيث يكون

$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\quad f(x)=A\,\mathrm{ch}(ax)+B\,\mathrm{sh}(ax)+C\ .$$

5. استنتج قيمة كلٍّ من $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ و $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

التمرين 9. عيّن متسلسلة فورييه للتابع f المعرّف بالعلاقة

$$\forall x\in\mathrm{IR},\ f(x)=\max(\sin x,0)\ .$$

ثُمّ ادرس تقارب هذه المتسلسلة، واحسب مجموعها وبيِّن قيمة : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

التمرين 10. ليكن التابع الــ 2π- دوري Θ المعرّف كما يلي:

$$\Theta(x)=\begin{cases} x & : \quad x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \pi-x & : \quad x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

1. أثبت أنّه، أياً كانت x من IR فلدينا

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2k+1)^2}=1 \quad \text{و} \quad \Theta(x)=\frac{2}{\mathrm{i}\,\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{\mathrm{i}(2k+1)x}$$

2. استنتج أنّه، أياً كانت n و IN^*، فلدينا

$$\forall x\in[-n,n],\quad x=\frac{4n}{\mathrm{i}\,\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{\mathrm{i}(2k+1)\pi\ x/2n}$$

3. ليكن كثير الحدود المثلثيّ من درجة أصغر أو تساوي n : $P_n(t)=\sum_{r=-n}^{n} C_r e^{\mathrm{i}rt}$ أثبت أنّ

$$P'(t)=\frac{4n}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}P_n\left(t+\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

4. متراجحة Bernstein : استنتج أنّه إذا كانت $\mathcal{T}_n=\mathrm{vect}((e_k)_{-n\le k\le n})$ فإنّ

$$\forall P\in\mathcal{T}_n,\quad \|P'\|_\infty\le n\|P\|_\infty$$

هل يمكن أن نستبدل بالثابت n ثابتاً أصغر منه في المتراجحة السابقة ؟

التمرين 11.

I. نثبّتُ عدداً r في $[0,1[$.

1. أثبــت أنّ $\forall t\in\mathbb{R},\quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n\sin(nt)=\frac{r\sin t}{1+r^2-2r\cos t}$، حيــث تتقــارب المتسلسلة بالنظيم.

2. استنتج أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\quad -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos(nx)=\frac{1}{2}\ln(1+r^2-2r\cos x)$.

3. احسب، في حالة n في $\mathbb{N}$، التكامل $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1+r^2-2r\cos x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$. ثُم استنتج، في حالة n في $\mathbb{N}^*$، قيمة

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\,\ln(1+r^2-2r\cos x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

II. نُعرِّف التابع φ بالعلاقة

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x\,\ln(1-\cos x) & : \ x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ 0 & : \ x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}$$

1. أثبت أنّ φ تابع فردي من $\mathcal{C}_{2\pi}$. هل هو قابل للاشتقاق عند 0؟

2. استخدم نتيجة I.3 لتحسب قيمة $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ حين يكون n في $\mathbb{N}^*$.

3. استنتج متسلسلة فورييه للتابع φ، وادرس تقاربها.

التمرين 12. ليكن a عنصراً من $]0,\pi/2]$. ولنعرّف التابع f_a من $\Re_{2\pi}$ بالعلاقة:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{a}\cdot\left(1-\dfrac{|x|}{2a}\right) & : \quad x \in [-2a,2a] \\ 0 & : \quad x \in [-\pi,\pi]\backslash[-2a,2a \end{cases}$$

.I

1. اكتب متسلسلة فورييه للتابع f_a وادرس تقاربها.
2. احسب المجموع $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{\sin(na)}{na}\right)^2$.
3. احسب، في حالة $0 < a \le b \le \pi/2$ المجموع $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2(na)\cdot\sin^2(nb)}{n^4}$. ومـــا قيمة هذا المجموع إذا كان $0 < b \le a \le \pi/2$ ؟

.II لتكن λ و IR_+^* ، وليكن g_λ التابع من $\Re_{2\pi}$ المعرّف بالعلاقة:

$$\forall x \in [-\pi,\pi[,\quad g_\lambda(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)\,.$$

اكتب متسلسلة فورييه للتابع g_λ وادرس تقاربها.

.III

1. احسب بطريقتين مختلفتين المقدار $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x)g_\lambda(x)\,\mathrm{d}\,x$ ، واستنتج أنّ

$$\forall a \in]0,\pi/2],\ \forall\lambda \in \mathrm{IR}_+^*,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin^2(an)}{n^2(\lambda^2+n^2)} = \frac{\pi\,\mathrm{sh}^2(\lambda a) - a^2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^3\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}$$

هل تبقى النتيجة السابقة صحيحة عند قيم أخرى للعدد λ ؟

2. احسب مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin^2(an)}{n^4}$.

التمرين 13. لنعرّف حين تكون x و $\mathrm{IR} \ni x$ و $n \in \mathrm{IN}^*$ المقدار $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(kx)}{k}$.

.I لنعرّف $f(x) = (\pi - x)/2$ حين يكون $x \in [0,2\pi[$. أثبت أنّ

$$\forall x \in]0,2\pi[,\quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)\,.$$

.II أثبت أنّ $\forall x \in]0,2\pi[,\ S_n(x) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\int_0^x D_n(t)\,\mathrm{d}\,t$ ، حيث D_n هي نواة ديرخليه.

III. نعرّف على المجال $[0,\pi]$ التابع g بالعلاقة

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin(x/2)}-\dfrac{1}{x} & : \quad x\in\,]0,\pi]\\ 0 & : \quad x=0\end{cases}$$

1. أثبت أنّ g مستمرٌ على المجال $[0,\pi]$.

2. أثبت أنّ

$$S_n(x)=\int_0^x g(t)\sin(\frac{2n+1}{2}t)\,\mathrm{d}\,t+\int_0^x\frac{\sin(n+1/2)\,t}{t}\,\mathrm{d}\,t-\frac{x}{2}$$

3. استنتج أنّ $\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$.

IV. أثبت أنّ $\lim_{n\to\infty}S_n\left(\frac{\pi}{n}\right)=\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

V. استنتج أنّ $\lim_{x\to0^+}f(x)>\lim_{n\to\infty}S_n\left(\frac{\pi}{n}\right)$. وهذه تسمّى ظاهرة Gibbs.