مبــادئ في المنطــق

Notion de Logique

1) تمهيد :

أ- المنطق الرياضي اهتم أساسا بدراسة الفكر التجريدي وطرق الاستدلال، حيث أن النظريات الرياضية ليست تجميع النتائج بدون روابط بينها، وإنما انطلاقا من نتائج تم قبولها كمكتسبات (نصوص صحيحة) يسمح "الاستدلال الرياضي" أو "المنطق" بالبرهان على نتائج أخرى.
وهذا الاستدلال يتم وفق قواعد محددة وتسمى قواعد المنطق أو القواعد المنطقية.

ب- الرياضيات تستعمل اللغة المتداولة بالإضافة إلى رموز أو حروف : a و b و x و y ...., $=$, $\leq$, $\sqrt{\ }$, ...

- النص الرياضي هو كل تجميع لكلمات وحروف ورموز.

2) تعاريف ومصطلحات

1-2. العبارات، الدوال العبارية

Propositions, Fonction propositionnelles

نعتبر النصوص الرياضية التالية :

- A_1 - $3\times 5=8$
- A_2 - $\sqrt{3}$ عدد لاجذري
- A_3 - $x^2+1\geq 2$ حيث $x\in\mathbb{R}$
- A_4 - $a+b\leq ab$ حيث a و b إعدادا حقيقية.

ملاحظة : كل هذه النصوص الرياضية تحمل معنى

- المعنى الذي يحمله A_1 خاطئ
- المعنى الذي يحمله A_2 صحيح.
- النصان A_3 و A_4 يحتويان على متغيرات.

ولا يمكن الحكم عليها أنها خاطئة أو صحيحة.

فمثلا A_3 صحيحة من أجل $x=2$

A_3 خاطئــة من أجل $x=\frac{1}{2}$

تعريف①

العبارة " في المنطق" هي كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا وإما خاطئا.
" ولا يمكن أن يكون صحيحا وخاطئا".

أمثلــة : من التلاميــذ.

تعريف②

الدالة العبارية هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة.

أمثلــة : من طرف التلاميــذ.

ملاحظة : • إذا كانت الدالة العبارية تصبح صحيحة من أجل a نقول أن a تحقق الدالة العبارية $A(x)$.
أو أن $A(x)$ تتحقق من أجل x

• الدالة العبارية $A(x)$ تسمى أيضا خاصية للمتغير x.

2-2. المكمـــات Les Quantificateurs

- <u>المكمم الوجودي</u>

لتكن $A(x)$ دالة عبارية للمتغير x و E مجموعة غير فارغة.

نعتبر العبارة : $P : (\exists x \in E) \; : \; A(x)$

العبارة P تكون صحيحة فقط إذا وجد على الأقل x من E و x يحقق $A(x)$.

العبارة P تقرأ : يوجد على الأقل x من E حيث $A(x)$

أو : يوجد على الأقل x من E يحقق $A(x)$

ملاحظة : إذا كان كل عنصر من E لا يحقق $A(x)$

نقول أن $A(x)$ خاطئة

- <u>المكمم الكوني</u>

نعتبر العبارة $Q : (\forall x \in E) \; : \; A(x)$

العبارة Q تكون صحيحة فقط إذا كانت كل عناصر E تحقق $A(x)$

العبارة Q تقرأ : مهما يكن x من E لدينا $A(x)$

أو : لكل x من E لدينا $A(x)$

أمثلـة :

$P_1 : \; x^2 \geq 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$

$P_2 : \; x + \dfrac{1}{x} = 2 \; ; \; \exists x \in \mathbb{R}$

$P_3 : \; x^2 + 1 = 0 \; ; \; \exists x \in \mathbb{R}$

$P_4 : \; x^2 + 3x + 1 \succ 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$

لدينـــا P_1 صحيحة

P_2 صحيحة

P_3 خاطـــئة

P_4 صحيحة

ملاحظة① هناك عبارات بعدة مكممات.

أمثلـة :

$Q_1 : \; y = x^2 \; ; \; (\exists x \in \mathbb{R}) \; (\forall y \in \mathbb{R}^+)$

$Q_2 : \; y = x^2 \; ; \; (\forall x \in \mathbb{R}) \; (\exists y \in \mathbb{R}^+)$

$Q_3 : \; y = |x+1| \; ; \; (\exists y \in \mathbb{R}^+) \; (\exists x \in \mathbb{R})$

$Q_4 : \; y \prec x \; ; \; (\forall y \in \mathbb{R}) \; (\forall x \in \mathbb{R})$

$Q_5 : \; y = x^2 \; ; \; (\forall y \in \mathbb{R}^+) \; (\exists x \in \mathbb{R})$

ملاحظة②
- إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة فإن ترتيبها ليست له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكممة.
- إذا كانت المكممات من طبيعة مختلفة فلترتيبها أهمية قصوى في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة.

3) العمليات المنطقية.

3-1. نفـي عبـارة.

نفي عبارة P هو عبارة نرمز لها بـ $\overline{P}$ أو $\rceil P$

وتكون صحيحة إذا كانت P خاطئة

وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة.

جدول حقيقة عملية النفي.

P	$\rceil P$
0	1
1	0

العدد **1** يعني أن العبارة صحيحة
العدد **0** يعني ان العبارة خاطئة
يمكن أن نغير **1** بـ V **VRAI**
و **0** بـ F **FAUX**

ملاحظة : $\rceil(\rceil A) = A$

أمثلـة : اعط نفي العبارات التالية :

- A_1 $x^2 \prec 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$
- A_2 $x^2 = 1$; $(\exists x \in \mathbb{R})$
- A_3 $x^2 + y^2 = 1$; $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})$
- A_4 $x + y = xy$; $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})$
- A_5 $y = \dfrac{1}{x}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ (\exists y \in \mathbb{R}^*)$
- A_6 $xy \geq 0$; $(\exists x \in \mathbb{N})\ (\forall y \in \mathbb{Z})$

خلاصة :

نفي العبارة $(\forall x \in E): A(x)$ هو $(\exists x \in E): \rceil A(x)$
نفي العبارة $(\exists x \in E): A(x)$ هو $(\forall x \in E): \rceil A(x)$
نفي العبارة $(\forall x \in E)(\exists y \in F): A(x,y)$ هو $(\exists x \in E)(\forall y \in F): \rceil A(x,y)$
نفي العبارة $(\exists x \in E)(\forall y \in F): A(x,y)$ هو $(\forall x \in E)(\exists y \in F): \rceil A(x,y)$

ملاحظة : " الإستدلال بالمثال المضاد"

لكي نبرهن على أن عبارة ما A خاطئة، يكفي أن نبين نفيها $\rceil A$ صحيحة.
وخصوصا بالنسبة للعبارة : $P: (\forall x \in E): A(x)$
لكي نبين أن P خاطئة : يمكن أن نبين أن $\rceil P: (\exists x \in E): \rceil A(x)$

مثـال : ① بين أن العبارة : $x^2 - 3x - 1 \succ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ خاطئة.
② بين أن العبارة : $\dfrac{1}{x} + x \succ 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ خاطئة.

2-3. الفصل المنطقي Disjonction logique

- **فصل عبارتين**

تعريف فصل العبارتين A و B هو العبارة التي نرمز لها بـ (A أو B) والتي تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين A و B صحيحة.
جدول حقيقة العبارة (A أو B).

A	B	A أو B
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**1**	**1**
0	**0**	**0**

أمثلة :

P_1 : ($2 \in \mathbb{Q}$ أو $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$)
P_2 : ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ أو $\forall n \in \mathbb{N}, 1^n = 1$)
P_3 : ($\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \prec 0$ أو $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$)

العبارة P_1 صحيحة

P_2 صحيحة

P_3 خاطئة

3-3. العطف المنطقي Conjonction logique

- عطف عبارتين

تعريف عطف العبارتين A و B هو العبارة التي نرمز لها بـ (A و B) والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت A و B صحيحتين معا.

جدول حقيقة العبارة A و B.

A	B	A و B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة :

Q_1 : ($\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, و $(\exists x \in \mathbb{R})$ $x^2 - 1 = 0$)

Q_2 : ($\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 \prec 0$ و $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$, $nm \geq n$)

Q_3 :($\forall x \succ 0$; $x + \frac{1}{x} \succ 2$ و $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{x-1} = 1$)

Q_1 : صحيحة

Q_2 : خاطئة

Q_3 : خاطئة

4-3. الاستلزام المنطقي Implication logique

تمهيد : لتكن A و B عبارتين.

أتمم جدول الحقيقة التالي :

A	B	$\rceil A$	$\rceil A$ أو B
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

لاحظ أن العبارة ($\rceil A$ أو B) لا تكون خاطئة إلا إذا كانت A صحيحة و B خاطئة.

تعريف : العبارة ($\rceil A$ أو B) تسمى استلزام A و B.

ونكتب $A \Rightarrow B$

ونقرأ A تستلزم B.

أو إذا كانت A فإن B .

أو من A نستنتج B.

ملاحظة ① إذا كانت العبارة $(A \Rightarrow B)$ صحيحة

نقول إن B استنتاج منطقي للعبارة A.

② العبارتان $(A \Rightarrow B)$ و $(B \Rightarrow A)$ لا يحملان نفس المعنى.

③ نلاحظ أن العبارة $(A \Rightarrow B)$ لا تكون خاطئة إلا إذا كانت A صحيحة و B خاطئة .

ولكي نبين أن $(A \Rightarrow B)$ عبارة صحيحة

يكفي أن نبرهن على أنه إذا كانت A صحيحة فإن B صحيحة أيضا.

ونقول إن A شرط كافي لتحقيق B.

ملاحظة : إذا كان $(B \Rightarrow C)$ و $(A \Rightarrow B)$

فـــإن $A \Rightarrow C$

- التكافؤ المنطقي.....
- القوانين المنطقية.

① قوانين موركان .... Lois de MORGAN

$\rceil B$ أو $\rceil A \quad \Leftrightarrow \quad \rceil(B$ و $A)$

$\rceil B$ و $\rceil A \quad \Leftrightarrow \quad \rceil(B$ أو $A)$

② قانون التكافؤات المتتالية

③ قانون الاستلزام المضاد للعكس.

$$(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$$

مثـــال : $(\forall \varepsilon \succ 0) \; : \; |a| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a = 0$

④ قانون الخلف (الاستدلال بالخلف)

Raisonnement par l'absurde

مثـــال : نعتبر المستقيمات D و Δ و L حيث : D

D يقطع Δ في النقطة I و $D//L$

بيث أن L يقطع Δ Δ

⑤ الاستدلال بفصل الحالات

مثـــال① : بين أن العدد $n^3 - n$ قابل للقسمة على 3 لكل عدد صحيح طبيعي n.

مثـــال② : بين أن العدد $n^3 - n$ عدد زوجي.

مثـــال③ : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $mx^2 + 2x + 1 = 0$ ، m بارامتر حقيقي.

⑥ الاستدلال بالترجع.