أولا . نشر (حساب قيمة المحددات :

من المرتبة الثانية :ليكن لدينا محدد من المرتبة الثانية ، أي محدد سطرين وعمودين : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ عندئذٍ لحساب قيمة هذا المحدد نقوم بحساب جداء القطر الرئيسي مطروحاً منه جداء القطر الثانوي أي :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

مثال : احسب قيمة المحددات التالية :

$$1)\ \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad , \quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \quad , \quad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$1)\ \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (6 \times 5) - (3 \times 2) = 30 - 6 = 24$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (1 \times 3) - (5 \times 9) = 3 - 45 = -42$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = \big(1 \times (-3)\big) - \big((-3) \times 2\big) = -3 + 6 = 3$$

من المرتبة الثالثة أو أكثر :

ليكن لدينا محدد من المرتبة $n$ ، أي بـ $n$ سطر و $n$ عمود من الشكل $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ عندئذٍ لحساب قيمة المحدد التالي نقوم بنشره وفقاً لأي سطر أو أي عمود مع تناوب الإشارات على النحو التالي ( مثلا بالنسبة للسطر الأول ) :

$$\begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & + \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ونقوم بضرب كل عنصر من ذلك السطر بالمحددات الأصغرية التي تنتج عن حذف السطر و العمود الموافقين لذلك العنصر ونقوم بتكرار ذلك حتى نصل إلى محددات أصغرية من المرتبة الثانية يمكن حسابها بسهولة .

مثال : احسب قيمة المحددات التالية :

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} \quad , \quad 2)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

نقوم بالحساب وفقاً للسطر الأول : ( يمكن النشر وفق أي سطر أو أي عمود )

$$1)\ \begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{2} & \overset{+}{4} \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \big(3 \times (-6)\big) - \big(2 \times (-8)\big) + \big(4 \times (20)\big) = -18 + 16 + 80 = 78$$

ثانياً . الطريقة المصفوفية (مقلوب مصفوفة) في حل المعادلات الخطية :

بفرض $AX = B$ جملة معادلات خطية ، حيث $A = a_{ij}$ مصفوفة من الدرجة $n$ ، إذا كانت $A$ نظامية أي $detA \neq 0$ حيث $detA$ محدد الأمثال للمصفوفة $A$ ،عندئذٍ يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة $A$ وهو $A^{-1}$

تذكرة : جداء مصفوفة بمقلوبها هو المصفوفة الواحدية من نفس المرتبة أي حيث أنَّ $A$ من المرتبة $n$

نضرب طرفي المساواة $AX = B$ من اليسار بـ $A^{-1}$ فنجد :

$$\overbrace{A^{-1} \cdot A}^{I_n} X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

هذا يعني من أجل حل جملة المعادلات الخطية يمكن أن نوجد $A^{-1}$ ثم نعوض في العلاقة $X = A^{-1}B$ فنحصل على حل جملة المعادلات المطلوب .

لإيجاد مقلوب مصفوفة ما نتأكد أولا أنَّ $detA \neq 0$ عندها نقوم بإيجاد مصفوفة المحددات الأصغرية :

تذكرة : منقول مصفوفة $A$ هو $A^t$ حيث أنَّ أسطر المصفوفة $A$ هي أعمدة لـ $A^t$ وأعمدة المصفوفة $A$ هي أسطر لـ $A^t$

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

نوجد المصفوفة المرافقة $adjA = M^t$ حيث أنَّ $M^t$ منقول $M$ ، ويكون مقلوب $A$ هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA$$

مثال : أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة مقلوب مصفوفة :

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$6x_1 + 7x_2 - x_3 = 17$$

أولا نحسب محدد الأمثال :

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 78 \neq 0 \Longrightarrow A$$ يوجد مقلوب لـ

نوجد مصفوفة المحددات الأصغرية :

$$M = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 20 \\ 30 & -27 & -9 \\ 6 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

وتكون المصفوفة المرافقة :

$$adjA = M^t = \begin{pmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

مقلوب المصفوفة $A$ هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA = \frac{1}{78} \begin{pmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

بالتعويض بالعلاقة $X = A^{-1}B$ نجد :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{78} \begin{pmatrix} -6 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{78} \begin{pmatrix} 78 \\ 156 \\ 234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

تمرين : أوجد حل كل من جمل المعادلات التالية باستخدام طريقة مقلوب مصفوفة :

$$1.\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + 5z = 2 \end{cases} \qquad 2.\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_2 = 1 \end{cases} \qquad 4.\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$$