Mathmatical Logic

المنطق الرياضي

$(P \to q) \to (\neg q \to \neg P)$

it's right Always

Dr. Jamal Abullaban-Mohamad

in University of Science

at 2012-2013

by: Abdulmoeen + Ebrahim.

منطق الاسناديات

المنطوق المسند / حساب الاسناديات

predicate logic

مقدمة:

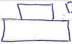
لتكن لدينا مجموعة A حتى تكون مرتبة يجب تحقق الشرط

$\forall x \in A ; \exists a \in A : a < x$ $\quad < a, x$

$a < x \equiv < a, x$

دالة الاسناد

* نريد أن نعبر أن صندوق ما B موضوع فوق صندوق A بالطريقة الطبيعية الكلاسيكية:



نقول A on B

ولكن حسب الاسناد ON AB

أي على A يتوضع B

هنا: لتوضيح الاسناد نقول ON تابع

{A,B} متغيرين

لكن في منطق الاسناديات نعتمد على تعميم الأفكار

* تخصيص أي $f\, a_1 a_2$

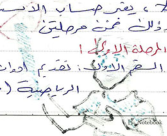
ONAB , under B A → A unclear

مدخل:

إن من أهم المهام الأساسية للرياضيين هو تفحص البنى لاقتراح الخواص التي يمكن أن تمتلكها بنية ما عن الأخرى، ومن ثم العمل على معرفة فيما إذا كانت هذه الخواص محققة بالفعل أم لا، يعتبر حساب الاسناديات الخطوة الأولى لهذا العمل وذلك ضمن مرحلتين

المرحلة الأولى:

الخطوة الأولى: تقديم أدوات الصياغة المناسبة لتسمية الأغراض الرياضية (وسنستخدم لها المفردات)



القسم الثاني: التعبير عن خواص هذه الأغراض وستخدم لها الصيغ

المرحلة الثانية:

مناقشة تحقق هذه الخواص في البنى، إن الصيغ هنا كما في الحسابات المنطقية //اللغة الكلاسيكية// عبارة عن متتاليات من رموز تؤخذ من الأبجدية وتخضع لقانون دقيق يحكم بنائها النحوي

* لن نتعامل في حساب الإسناديات مع أبجدية وحيدة، بل نأخذ الأبجدية التي سنسميها اللغة بما يتلاءم مع البنية التي سندرسها.

البنية:

نقصد في البنية مجموعة غير خالية $M \neq \phi$ مزودة بالتالي

* عدد محدود من العناصر المميزة

** لأجل كل عدد صحيح موجب (P): عدد محدود من العلاقات بـ (P) مسقط على M، والتي تدعى // الإسناديات //

*** عدد محدود من الدوال M^P إلى M

يتضح مما سبق أنه ليس من المناسب استخدام نفس اللغة مع جميع البنى التي سندرسها، أي لن نتعامل في حساب الإسناديات مع لغة وحيدة، بل نأخذ اللغة بما يتلاءم مع البنية التي سندرسها

ملاحظة:

يوجد رموز مشتركة بين كل اللغات: الروابط (أحادية أو ثنائية) الأقواس، $\forall$، $\exists$ وأيضاً المتحولات $v_1, \dots, v_n$ التي ننتهي عددها في الدوال (مثال $v_1, v_2, \dots$)
منتهي

ولكن الرموز الأخرى التي تتضمنها اللغة تختلف من لغة لأخرى وتعتمد على نوع البنية التي ندرسها وهي مثل العناصر المميزة إضافة إلى الإسناديات والدوال.

مثال:

في الزمر نحتاج لرمز ثابت يمثل الحيادي كما نحتاج لرمز دالة ثنائية. أما في المجموعات المرتبة نحتاج فقط لرمز علاقة ثنائية.

- نسمي الصيغ التي صنفت في هذا الفصل، صيغ حساب الاسناديات من الدرجة الأولى

وذلك بأن المكممات ستتحول الى عناصر من البنية.

في الحقيقة هناك خواص رياضية عديدة تعجز هذه الصيغ عن التعبير عنها

مثال: للتعبير عن كون المجموعة مرتبة جيداً نقول

$\forall B \subseteq A$ if $B \neq \phi \Rightarrow$ B تحوي عنصر اصغر

نلاحظ أن المكمم - لأجل كل - في هذا التعريف يتحول الى مجموعات جزئية من A

والتي هي ليست من عناصر A

نذكر هنا المكمم مكمم الدرجة الثانية

لنأخذ على سبيل المثال:

مجموعة الاعداد الطبيعية

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots, 9, 10, \ldots$

لنأخذ مجموعات جزئية من N بحيث كل مجموعة

تحوي عدد من العناصر الفردية

$\{1\}, \{3,5\}, \{5,7,9\}, \{1,9\}$

نلاحظ أنه لا يمكن ترتيب هذه المجموعات

ولهذا السبب سمي بمنطق الدرجة الثانية والى الآن لم يتم التمكن من دراسة هذا المنطق

وبالتالي مفهوم المجموعة جيدة التركيب لا يمكن ان يصاغ باستخدام صيغ الدرجة الأولى.

التحليل التركيبي:

تعريف: لغة الدرجة الأولى (للسهولة نقول لغة): هي مجموعة ما من الرموز تتألف من قسمين:

* القسم الأول: مشترك في جميع اللغات ويتألف من مجموعة أولى من مجموعة محدودة وغير منتهية من الرموز؛ ندعو رموز المتحولات أو المتحولات (البسيطة) وهي

$W = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$

ومن جهة اخرى نضم الرموز التحتية التالية
* الاقواس (,)
* الروابط ↔ , → , ٧ , ٨ , ٦
* رمزي حكم الشمول وحكم الوجود ∃ , ∀

القسم الثاني: وهذا يختلف من لغة الى اخرى. والذي هو اجتماع مجموعة ₵ ومتتاليتين $(F_n)_{n\in IN^*}$ و $(R_n)_{n\in N^*}$ من المجموعات حيث المتتاليتين

منفصلتين مثنى مثنى ومنفصلتين عن ₵ ايضاً.

* ندعوا عناصر المجموعة ₵ برموز الثوابت (constant symbols)
* من اجل كل عدد صحيح n حيث n≥1 ندعو عناصر المجموعة F_n رموز التوابع بـ n متغيرات
(*) من اجل كل عدد صحيح n حيث n≥1 ندعوا عناصر المجموعة R_n برموز العلاقات بـ n متغيرات

او ندعوها //اسنادية//

ملاحظة: عادة نقول دالة (علاقة) احادية، ثنائية، ثلاثية ... بدلا من القول (علاقة) بمتغير، بمتغيرين، بثلاث متغيرات

ملاحظة:

سنتبني رمزاً خاصاً واحداً له وضع خاص وهو الرمز ≃ وهو رمز المساواة وهو موجود في كل لغة دون ذكر ذلك (دون الاشارة لذلك)

اذاً تكون الحروف من الشكل

$$A=\{W,٦,٧,٨,\to,\leftrightarrow,(,),\forall,\exists\}\cup\{₵\}\cup\{R_n\}_{n\in N^*}\cup\{F_n\}_{n\in N^*}$$

حيث $W=\{v_1,v_2,\dots,v_n,\dots\}$ مجموعة معدودة غير منتهية

مثال: $L = \{R, c, f, g\}$

حيث R علاقة ثنائية

c ثابت

f, g دالتين احاديتين

مجموعة العلاقات

① $R = \{R, \simeq\}$ ؛ لتفصيل اللغة R علاقة ثنائية

$n=2$ العلاقة المذكورة ← موجودة في كل لغة

$R_n = \Phi \; ; n \neq 2$

متساوية

② $C = \{c\}$ ثابت واحد فقط مذكور

$C = \{c\} = F_0$ ← دالة بعدها صفري

③ $F_1 = \{f, g\}$ ؛ $F_n = \Phi \; ; n \neq 1$ أي لا يوجد دوال ثنائية وما فوق

مثلاً $F_2 = \Phi \quad F_3 = \Phi$

* المفردة (term) ملاحظة: لم نلجأ لتعريف اللغة بالاسلوب المتقدم في التعريف والسبب في ذلك انه في غالب الاحيان نتعامل مع عدد من الدوال وعدد من العلاقات. ونعتبر أن الثابت (رمز الثابت) على اعتبار دالة أو علاقة بصفر فقط.

تعريف مفردات اللغة: الرموز التي علينا ان نعتبر المادة الخام لبناء المفردات هي رموز الدوال والمتحولات ونلاحظ لا وجود للاقتباس في كتابة المفردات، والمفردة هي اساس تشكيل (تصميم) اللغة

تعريف: مجموعة مفردات اللغة (L)، والتي نرمز لها بـ $T(L)$ هي اصغر مجموعة جزئية من مجموعة كلمات اللغة $W(L)$. بحيث تحقق ما يلي:

1) تحوي رموز الثوابت والمتحولات

$V \cup C \subseteq T(L)$ (بنو)

هي مجموعة المتحولات

2) مغلقة بالنسبة للمؤثر

$\underbrace{(m_1, m_2, m_3, \ldots m_n)}$ ⟶ $f m_1 m_2 \ldots m_n$

; $f \in F_n \; ; n \geq 1$

للتوضيح لعملية الانغلاق نقول: إذا اعتبرنا أنه m_1 معرفة و m_2 معرفة و ... m_n معرفة، عندئذٍ يمكننا القول بأن الدالة المكونة من هذه المعرفات والتي قلنا عنها كل منها معرفة بأن هذه الدالة هي معرفة.

* تعريف آخر: المعرفات هي كلمات يمكن أن نحصل عليها بتطبيق القانون التالي عدد من المرات:

* ملاحظة: * رموز الثوابت والمتحولات هي معرفات (نذكر هنا أننا لم نميز بين رموز حروف الأبجدية وبين الكلمات التي طولها (1) والتي تحتوي على هذا الرمز)

** من أجل $n \geq 1$ (عدد صحيح)، f رمز لدالة أو تابع بـ n مسقط إذا كانت $(t_1,\ldots,t_n)$ معرفات فإن الكلمة $ft_1,\ldots,t_n$ معرفة أيضاً

* شكل مكافئ: نضع $T_0(L)=LUC$ من أجل كل عدد صحيح $k\geq 0$ فإن

$$T_{k+1}(L) = T_k(L) \cup \{ft_1,\ldots,t_n \in F_n,\ t_1\in T_k(L),\ t_2\in T_k(L),\ \ldots,\ t_n\in T_k(L)\}$$

وهو التعريف الاستقرائي

مثال:

لنأخذ $T_0(L)=c \quad T_0(L)=m_1 \quad T_0(L)=m_2$

من التعريف السابق

$T_1(L)=c\cup m_1\cup m_2$

هنا لم نأخذ حالة الدالة بسبب عدم وجود $f_0=c$

* أما إذا كانت الدالة رمزها f بثلاثة مساقط $n=3$ عندئذٍ يجب وجود (ما اختصر) معرفة.

$T_1(L)=c\cup m_1\cup m_2\cup f\text{-}cm_1m_2\cup fccc\cup fm_1m_1m_1$

$\cup\ldots\cup\ldots\cup\ldots$

أما إذا كانت f دالة ثنائية $n=2$

$T_1(L) = \{a\} \cup m_1 \cup m_2 \cup fcc \cup fm_1m_2 \cup \dots$

ونلاحظ أنه من المهم مكانه عند كتابة الدالة ينبغي كتابتها بدلالة المتغيرات الموجودة في T_0

ملاحظة:

العلاقات الموجودة في اللغات R_n ليست فقط العمليات أو علاقة الترتيب أو كل ما عرفناه في المنطق الرياضي $\{\vee, \wedge, \leftrightarrow, \rightarrow\}$ بل يمكن أن توجد علاقة يتم الاتفاق عليها على سبيل المثال فرضنا أن ($\not{Z}$) علاقة $\rightarrow \not{Z}\,x\,y$

ارتفاع المفردة:

ارتفاع المفردة t من مجموعة المفردات $T(L)$ هو أصغر عدد صحيح يتحقق لأجله: $t \in T_k(L)$

لاحظ أنه يوجد دائماً في اللغة مفردات ارتفاعها صفر وهي المتغيرات لكن من الممكن بشكل عام ألا نجد مفردات ارتفاعها ليس صفراً ~~...~~ فعندما لا تحوي اللغة أي رموز الثابت فإن جميع مفردات لها الارتفاع صفر

مثال:

لتكن اللغة $L = \{f_1, g_3, c\}$ وهي تملك رمزاً واحداً للثابت (c)

ورمز للدالة أحادية (f) ورمز لدالة ثلاثية (g) ولنأخذ الكلمة

$$w = ggffv_0gv_2v_0cfcffgfcgv_2fv_0ffcfcfc$$

الحل:

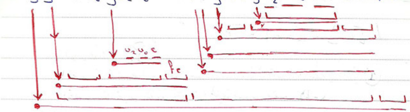
الطريقة الأولى:

طريقة الشجرة

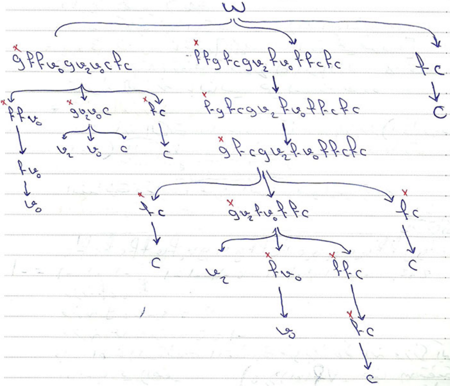
٢٩

Subject:

$w = g\,g\,f\,f\,v_0\,g\,v_2\,v_0\,c\,f\,c\,f\,f\,g\,f\,c\,g\,v_2\,f\,v_0\,f\,f\,c\,f\,c\,f\,c$



تمثيل الشجرة



Subject: / /

بما أننا استطعنا ايجاد الشجرة الموافقة لا بانه w هي معزوة

$$h[w] = 8 - 1 = 7$$

الوزن : (f)

الوزن لرمز دالة هو عدد مساقط الدالة مطروح منه (1)

الوزن لرمز ثابت أو المتحول هو (-1)

تعريف : الوزن لكلمة مكتوبة بالمتحولات ورموز الثوابت والدوال ، هو عبارة عن مجموع أوزان الرموز التي تظهر في هذه الكلمة

ووزن الكلمة الحالية هو (0) (اذا انها ليست معزوة)

* جاء في الفحص : ناقش [الكلمة الحالية هي معزوة]

الحل : الكلمة الحالية وزنها (0) وبالتالي لا تحقق قانون الوزن بالتالي هي ليست معزوة

* قانون الوزن :

نقول أن الكلمة w تحقق قانون الوزن (إذا وفقط إذا) كان وزنها (-1) ووزن أي قطعة

إذا وفقط إذا

ابتدائية فعلية منه الدائم يساوي الصفر

الطريقة الثانية لحل السؤال السابق

قطعة ابتدائية لا وزن لها (0)

$$W = g\,g\,f\,f\,v_0\,g\,v_2\,v_0\,c\,f\,c\,f\,f\,g\,f\,c\,g\,v_2\,f\,v_0\,f\,f\,c\,f\,c\,f\,c$$

$$2\;2\;\; -1\;2\;-1\;-1\;-1\;-1\;\; 2\;-1\;2\;-1\;-1 \;\; -1\;-1\;-1 = -1$$

وزن $f = 0$

وزن $g = 3 - 1 = 2$

وزن v = وزن $c = -1$

وإذا اخذنا أي قطعة ابتدائية منه نلاحظ أن وزنها أكبر أو يساوي الصفر

حيث m قطعة ابتدائية $\forall f(m) \geq 0$ ، $f(w) = -1$

وبذلك تحقق الكلمة قانون الوزن فهي مفردة.

ملاحظة: لا يمكن رسم الشجرة في عدة حالات

مثلاً: f (احادية)، إذا وصلنا إلى fu_1u_2 ← هذا خاطئ
بالتالي لا يمكن متابعة الرسم

wu

fu_1u_2 gu_0

لا يمكن كون f لا يمكن كون g عقدة
بمسقط واحد   وهنا لـ مسقط واحد
هنا لدينا مسقط واحد

* نظرية: لتكن w كلمة (سلسلة حروف) مكتوبة بالمتحولات ورموز الثوابت ورموز الدوال عندئذٍ: الشرط اللازم والكافي لتكون الكلمة w مفردة هو أن تحقق قانون الوزن.

* مبرهنة: لتكن t مفردة $F(L)$ (مجموعة كل المفردات)، إن أي قطعة ابتدائية فعلية من t لا يمكن أن تكون مفردة.

* نظرية: (وحدانية القراءة من أجل المفردات)
لتكن t مفردة اختيارية من $T(L)$ عندئذٍ يجب أن تحقق واحدة من الحالات الثلاثة الآتية.
- t رمز متحول في L
- t رمز ثابت في L
- يوجد عدد صحيح $k \geq 1$، رمز لدالة بـ k مسقط من اللغة L ومرتبة وحيدة $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ من المفردات بحيث

$$t = f u_1 u_2 \cdots u_k$$

* أي أن المفردة إما ثابت c، أو متحول v، أو دالة منشأة منها fcv fcc fvv أو دالة مفردات fgu_1u_2fcv

تعريف: // المفردة المغلقة //
ندعو المفردة التي لا تظهر فيها متحولات بالمفردة المغلقة

Subject: / /

تعليق: بنظرة سريعة نرى أنه المفردة المغلقة يجب أنه يظهر فيها رمز لثابت مرة على الأقل وبالتالي اللغة التي لا تحوي رموز ثوابت لا تحوي مفردات مغلقة

ترميز: لتكن $t \in T(L)$ حيث $i_1, i_2, \dots, i_n$ اعداد طبيعية مختلفة مثنى مثنى، سنستخدم الترميز $t = t[u_{i_1}, \dots, u_{i_m}]$ للاشارة الى أنه المتحولات التي تظهر في المفردة مرة واحدة على الأقل وهي من جملة المتحولات $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_m}$

مثلاً: $t = f u_2 g u_1 u_2 \Leftarrow t = t[u_1, u_2]$

$t = f u_1 u_2 u_3 g u_2 u_1 f u_3 \Leftarrow t = t[u_1, u_2, u_3]$

$t = f u_1 u_1 g u_1 \Leftarrow t = t[u_1]$

وهنا نلاحظ أنه اي مفردة t تكتب بالشكل $t = t[u_1, u_2, \dots, u_m]$ وذلك لانه المفردة التي تحوي عدد منتهي من الرموز، وبالتالي عدد منتهي من المتحولات.

فإذا اخذنا m هو اكبر دليل بين ادلة المتحولات التي تظهر في t مرة على الأقل نستنتج امكانية كتابة t بالشكل السابق

* **الاستعاضة:** (التعويض في المفردات)

تعريف: ليكن k عدد طبيعي ولنأخذ k رمز متحول (رمز الدليل متحول) $u_1, u_2, \dots, u_k$ مختلفة مثنى مثنى، و $k+1$ مفردة $t, w_1, w_2, \dots, w_k$ عندئذ نعرف الكلمة

$$t^{u_1}/_{w_1}, {}^{u_2}/_{w_2}, \dots, {}^{u_k}/_{w_k}$$

بأنها نتيجة تعويض المفردات $w_1, w_2, \dots, w_k$ بالمتحولات $u_1, u_2, \dots, u_k$ على الترتيب

وذلك حيث لا ظهور للمتحولات في t

مبرهنة:

ليكن k عدد طبيعي ولنأخذ k متحول اختيار مختلفة مثنى مثنى $w_1, \dots, w_k$ و $k+1$ مفردة $t, u_1, \dots, u_k$. إنه الكلمة

$t^{u_1}/_{w_1}, {}^{u_2}/_{w_2}, \dots {}^{u_k}/_{w_k}$ تكون مفردة

* صيغ اللغة:

نحن الآن بصدد تعريف مجموعة صيغ اللغة (L) نستخدم لذلك الاستقراء الرياضي

بداية نعرف المجموعة الأساسية أو الصيغ ذات الارتفاع صفر والتي ندعوها الصيغ الذرية

تعريف: نقول أن الكلمة $w \in W(L)$ أنها تشكل صيغة ذرية بالإضافة إذا وفقط إذا (إذا)) وجد عدد طبيعي $n \geq 1$ ورمز R لعلاقة بـ n مسقط و n مفردة $t_1, t_2, \ldots t_n$ بحيث

$$w = Rt_1, \ldots, t_n$$

ونرمز لمجموعة كل الصيغ الذرية $At(L)$

تعريف:

مجموعة صيغ اللغة L والتي نرمز لها $F(L)$ هي أصغر مجموعة جزئية من مجموعة كلمات $W(L)$ بحيث تحقق (أصغر مايلي)

① تحوي مجموعة الصيغ الذرية $At(L) \subseteq F(L)$

② إذا كانت u, w صيغتين في (L) فإن كلاً من الكلمات التالية تكون من $F(L)$ أيضاً

$$(u \Leftrightarrow w), \ uw, (u \wedge w), (u \vee w), (u \Rightarrow)$$

③ لأجل كل $n \in N^*$ الكلمتين: $\exists v_k w$, $\forall v_n w$ رمزها من $F(L)$ وذلك من w صيغة و v_k متحول.

أمثلة:

لتكن لدينا اللغة $L = \{R, c, f, g_2\}$

$$\forall x f x \Rightarrow c_1 g x_1 x_2$$

① هل تمثل مفردة

② هل تمثل صيغة

③ ناقش منطقيا (صح أو خطأ بالتعليل)

// الحل لاحقاً //

مثال : لتكن لدينا $L = \{\overset{R}{\leq}, \overset{c_1}{0}, \overset{c_2}{1}, \overset{f}{+}, \overset{g}{*}\}$

$$\forall a \forall b (aRb \Rightarrow bRa)$$

1) هل هي مفردة

2) هل هي صيغة //ستحل لاحقاً//

علم // المفردات من ثوابت ودوال ومتحولات فقط لا تحوي علاقة ← بالتالي وجود العلاقة ينفي وجود مفردة //

ملاحظات :

① كل مفردة ليست صيغة، وكل صيغة ليست مفردة

② الصيغة ولو كانت صيغة ذرية يجب ان تحوي علاقة (R) وفي حال كانت اي كلمة (سلسلة محارف) لا تحوي علاقة حتماً لا تكون صيغة

③

* ان الصيغة تمثل علاقات بينما المفردات لا تملك اي علاقة والمفردة لا يمكن ان تكون صيغة

* اما الصيغة الذرية هي عبارة عن مفردات فيما بينها علاقات

تعريف :

مجموعة صيغ اللغة $F(L)$ هي اصغر صيغة جزئية من مجموعة الكلمات $W(L)$ بحيث تحقق // مكتوب سابقاً هذا التعريف //

حيث :

$W(L)$ هي مجموعة كل الكلمات المشكلة على اللغة (L)

$T(L)$ هي مجموعة مفردات اللغة (L) وتشكل اصغر مجموعة جزئية من $W(L)$

$At(L)$ هي مجموعة الصيغ الذرية المعرفة على اللغة (L)

$F(L)$ هي اصغر مجموعة جزئية من $W(L)$ تضمن الصيغ

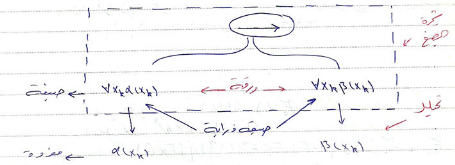
ملاحظة هامة :

في المنطق الكلاسيكي أصغر بنية تشكل المنطق الكلاسيكي هي المتحولات أما في منطق الاسناديات من الصيغة الذرية.

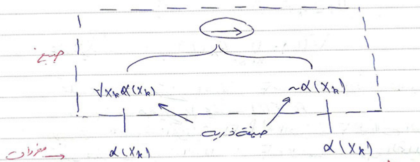
لنأخذ الصيغة:

$$\forall x_k \overbrace{(\alpha(x_k) \to \beta(x_k))}^{W \text{ و } \forall_{x_k} W} \to (\forall x_k \alpha(x_k) \to \forall x_k \beta(x_k))$$

نرسم شجرة $(\forall x_k \alpha(x_k) \to \forall x_k \beta(x_k))$



نرسم شجرة: $\forall x_k \alpha(x_k) \to \sim\alpha(x_k)$



ملاحظة:
في المنطق الكلاسيكي كانت الأوراق عبارة عن متغيرات منطقية يمكن الحكم عليها بصحيح أو خطأ: أي تأخذ القيم مثلاً ($P=0$ أو $P=1$)

أما في منظور الاسناديات :

الادراك هي عبارة عن صيغ حيث أنه الصيغ تأخذ قيم صحيحة أو خاطئة وإذا قمنا بالتحليل تلك الصيغ نصل إلى مفردات ولكن المفردات لا يمكن أنه تأخذ قيم صحيحة أو خاطئة بالتالي لا نشكل فروع الشجرة

ملاحظة: علاقة المساواة موجودة في جميع اللغات وعموما يتم التصريح عنها بالرمز ($\simeq$) مثلا لا علاقة

$\underbrace{\simeq t_1 t_2}_{\text{صيغة}}$ هذا يعني $t_1 = t_2$

مبرهنة: // التعريف الاستقرائي للصيغة //

نصف مجموعة الصيغ $F(L)$:

- نضع المجموعة $F_0(L) = At(L)$
- لأجل كل $n \in N^*$ إذا فرضنا :

$$F_{n+1} = F_n(L) \cup \{\sim F ; F \in F_n(L)\} \cup \{(F \alpha G) ; F \in F_n(L) ; G \in F_n(L) ; \alpha \in \{\vee, \wedge, \leftrightarrow, \rightarrow\}\}$$
$$\cup \{\forall v_k F ; F \in F_n(L) ; k \in N\}$$
$$\cup \{\exists v_k F ; F \in F_n(L) ; k \in N\}$$

عندئذ: $$F(L) = \bigcup_{n \in N^*} F_n(L)$$

نسمي العدد أنه ارتفاع الصيغة F من $F(L)$ والذي نرمز له بـ $h[F]$ هو أصغر عدد صحيح k يحقق $F \in F_k(L)$

ملاحظة: الصيغة الجزئية $Sf(F)$ للصيغة F هي كل التي تظهر عند عقد شجرة التحليل لـ F، كل عقدة في شجرة التحليل هي صيغة جزئية

* تعريف العلاقة السلوكية: لتكن الصيغة $F = F[v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}]$ من مجموعة صيغ اللغة L و $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}$ متغيرات مختلفة

علك ظهور حر واحد على الأقل في F ، عندئذ الصيغة

$\forall v_{i_1} \forall v_{i_2} \forall v_{i_3} \ldots \forall v_{i_n} (\qquad)$

ندعوها الغلاقة الشمولية للصيغة F

وكل الصيغ المشابهة لها بتبديل ترتيب ظهور المتحولات الكمية.

$\forall v_{i_2} \forall v_{i_1} \ldots \forall v_{i_n} (\qquad)$

ملاحظة

$\forall x \forall y \forall z ((x \to y) \to z)$ علامة شمولية

نظرية: نفرض F صيغة من اللغة L و $v_1, v_2, \ldots, v_k$ متحولات مختلفة مثنى مثنى و $u_1, u_2, \ldots, u_k$ حدود من اللغة L حيث $k \in N$ عندئذ.

$F_{u_1/v_1, u_2/v_2, \ldots, u_k/v_k}$ هي صيغة

التعويض يتم بعدة أشكال منها

1. تعويض المتحولات بالحدود
2. تعويض المتحولات الكمية بمتحولات كمية أخرى
3. تعويض المتحولات المنطقية الموجودة بالكلاسيكي بمتغيرات أو صيغ

مثال:

$(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$

$(\forall x\, \alpha(x) \to \forall y\, \beta(y)) \to (\sim \forall y\, \beta(y) \to \sim \forall x\, \alpha(x))$