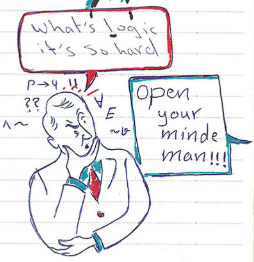
Subject: / /

Mathmatical Logic

المنطق الرياضي

$(P \to q) \to (\neg q \to \neg P)$

it's right Always



Dr. Jamal Abullaban-Mohamad

in University of Science

at 2012=2013

by: Abdulmoeen + Ebrahim.

Subject: منطق المكممات

بحث المكممات

منطق المكممات:

المتحول الحر والمقيد:

نقصد بالمكممات كلاً من مكمم الشمول ($\forall$) والوجود ($\exists$)

قد يكون المتحول حر ومقيد معاً، وقد يكون مقيد فقط أو حر فقط

مثال/

أول قوس مفتوح   آخر قوس مغلق

$$\forall x, \exists z ; (x \geq z) \longrightarrow (y + z) ; \quad x, y, z$$

متحولات منطقية

نلاحظ أن x مقيد في الطرف الأول ولا يوجد x في الطرف الثاني (مقيد)

نلاحظ أن z مقيد " " " ويوجد z في الطرف الثاني وغير مقيد بحكم بالتالي هو حر في الطرف الثاني (حر ومقيد)

" " y حر في الطرف الثاني ولا يوجد y في الطرف الأول (حر)

تعريف: المتحول المقيد: نقول عن متحول منطقي انه مقيد اذا وقع ضمن مدى الحكم (مجال الحكم: حيث يبدأ بعد أول قوس مفتوح بعد الحكم وينتهي عند آخر قوس مغلق)

والمتحول الحر: اذا كان خارج مدى الحكم نهائياً

ونقول انه حر ومقيد اذا حقق كلا التعريفين

مثال (1)/

أول قوس   آخر قوس

$$\forall x ((x \wedge y \longrightarrow z) \longrightarrow y) \longrightarrow z \quad x, y, z$$

مقيد   حر

موجود ضمن مدى x وليس بحكم y أو غيره

مدى x

(2)

$$\forall x \forall y \exists z (x + z) \longrightarrow z \quad x, z, y$$

موجود ضمناً

~~حر~~ مقيد

حر ومقيد

مقيد (موجود ضمناً)

Subject: ـــــ ~~الاختبار~~ / /

(3) $\forall x\,((x \wedge z) \to z) \to (z \vee x)$

x حر ومقيد

y حر

z حر

(4) $\forall x\,(((x \wedge y) \to x) \to y) \to \exists z\,(z \leq 1)$

x مقيد

y حر

z مقيد

(5) $\forall x\,(((x \wedge y) \to z) \to y) \to \exists z\,(z \leq 1)$

x مقيد ، y حر ، z حر ومقيد

(6)

$\forall x_j\,(x_i \leq x_j) \to x_i = 0$

x_i حر (ليس له معمم)

x_j مقيد

(٦) لاحظ: يرمز لكل من ملحمي العمومي والشمول بالرمز Q

مثال على ذلك:

$(Q_1 x\, Q_2 y\, Q_1 z\,((x \to y) \Leftrightarrow (t \leq x)) \to x))$

x مقيد y مقيد t حر (ليس له معمم)

بإزالة القوسين حول ...

يصبح x حر ومقيد

ملاحظة:

$\forall x\,(p(x) \to q(x))$ صيغة

$x \forall\,(p(x) \to q(x))$ ليست صيغة

تعميمات

Subject:

ملاحظة: (هامة)

$(p \wedge \neg p)$ تناقض دوما $1 \wedge 0 = 0$ $0 \wedge 1 = 0$

$(q \to p)$ ليس استدلال وليس تناقض

$(p \vee \neg p)$ استدلال دوما $1 \vee 0 = 1$ $0 \vee 1 = 1$

لننظر الى الشكل التالي

$$\underline{p \to q \,,\, q \to r}$$

اذا كانت $q \to r$ صحيحة

$p \to q$ صحيحة

بالتالي

$p \to r$ ← تكون صحيحة

يكون تركيب له معنى دلالي / يعني علاقة التعدي

ويمكن ان نكتب

$$\underline{p \to q \,,\, q \to r}$$
$$(p \to (q \to q) \to r)$$

صحيحة دوما $0 \to 0 = 1$ $1 \to 1 = 1$

وبشكل خاص (قاعدة النزع)

$$\underline{p \,,\, (p \to q)} \to \text{صحيحة} \quad \text{صحيحة}$$

q ← تكون صحيحة

* مثال (هام)

حر ↑ ↑ حر ومقيد

$$\forall x_j (x_i \leq x_j) \to (x_j = 0)$$

اذا بدلنا كل x_i ب x_j

نفرضها صحيحة $\forall x_j (x_j \leq x_j) \to (x_j = 0)$ (1)

$\forall x_j (x_j \leq x_j)$ → صحيحة دوما (2)

حسب العزل من (1) و (2)

$$\underline{\forall x_j (x_j \leq x_j) \to (x_j = 0), \forall x_j (x_j \leq x_j)}$$

$(x_j = 0)$ ← تكون صحيحة

ولكن بما ان x_j حر ومقيد تستطيع ان نفرض الصحة $x_j = 1$

ولكن $x_j = 0 \neq 1$

ومما سبق نلاحظ ما يلي

* لا يمكن تبديل المتحول (x_i) بمتحول مقيد (x_j)
* ولا يحول حر (x_i) بمتحول حر ومقيد

تذكرة:

الاستعاضة: $\Phi(x,y,z) = \big((x \le y) \Leftrightarrow (x+1=z)\big)$

بإمكاننا كتابة

$\tau(x_i) = (\qquad\qquad)$

$x_1 = x \;;\quad x_2 = y \quad x_3 = z$

أو أيضاً

$\Phi = \big((x \le y) \Leftrightarrow \_\_\_\,\big)$

على سبيل المثال $f(x,y) = 1+x \;,\quad f(x_i) = x+1$

$f = 1+x$

توصيف الاستعاضة بالطريقة الطابقية:

$$\frac{\Phi(x_i)}{\Phi(x)}$$

مثال:

$$\frac{(p \to q) \wedge (q \to r)}{\Phi(1,0,1)}$$

أي $p=1 \quad q=0 \quad r=1$

استدلال مهم

$$\big((p \to q) \to (\neg q \to \neg p)\big)$$

نماذج المكممات:

بديهيات وقواعد أساسية:

$L_1: \; \alpha(x_i) \longrightarrow \exists x_i\, \alpha(x_i)$

$L_2: \; \forall x_i\, \alpha(x_i) \longrightarrow \alpha(x_i)$

توضيحات

$\alpha(x_i)$ طلاب السنة الرابعة المتواجدين في القاعة

x_i طالب ما من طلاب السنة الرابعة

$\alpha(x_i) \longrightarrow \exists x_i\, \alpha(x_i)$

(طلاب السنة الرابعة المتواجدين) $\longrightarrow$ (يوجد طالب سنة رابعة من بين الطلاب الموجودين)

$\forall x_i\, \alpha(x_i) \longrightarrow \alpha(x_i)$

(نهاية الطالب من السنة الرابعة موجود) $\longrightarrow$ (معينا الحديث عن الطلاب السنة الرابعة المتواجدين)

R_1: $\dfrac{\alpha(x_i) \longrightarrow \psi}{\exists x_i\, \alpha(x_i) \longrightarrow \psi}$

R_2: $\dfrac{\psi \longrightarrow \alpha(x_i)}{\psi \longrightarrow \forall x_i\, \alpha(x_i)}$

شرط ألا يكون ψ يحوي x_i كمتحول حر

R_3: $\dfrac{\Phi(x_i)}{\forall x_i\, \alpha(x_i)}$ $\longleftarrow$ صحيحة

هام
$\boxed{\begin{array}{c}\forall \equiv \wedge \\ \exists \equiv \vee\end{array}}$

* برهان R_3

1) $\Phi(x_i)$ صحيحة فرضاً

2) $\Phi(x_i) \longrightarrow \Phi(x_i)$

3) وذلك لأن كل قضية تكافئ نفسها

كل قضية تؤدي إلى نفسها وتكافئ نفسها
✓ $(P \to P)$
✓ $(P \leftrightarrow P)$

صحيحة $(\forall x_0\, p(x_0) \to \forall x_0\, p(x_0))$

بالتكييف وحسب الاستدلال

$P \to ((q \to q) \to P)$

$\Phi(x_i) \longrightarrow ((\forall x_0\, p(x_0) \longrightarrow \forall x_0\, p(x_0)) \longrightarrow \Phi(x_i))$

أهمية هذه الخطوة تكمن بأن ψ لا تحوي متحولات حرة

من ① و ③ وفق النزع

$$(\underbrace{\forall x_0 p(x_0) \longrightarrow \forall x_0 p(x_0)}) \longrightarrow \Phi(x_i)$$

صحيحة (صام في الامتحان) لأن $\forall$ ولا يوجد x_i طليق حر

نطبق R_2 وذلك لأن الشرط محقق

5) $(\forall x_0 p(x_0) \longrightarrow \forall x_0 p(x_0)) \longrightarrow \forall x_i \Phi(x_i)$

من الكلاسيكي $(p \rightarrow p)$

6) $\forall x_0 p(x_0) \longrightarrow \forall x_0 p(x_0)$ صحيحة دوماً

بتطبيق النزع على 5 و 6

7) $\forall x_i \Phi(x_i)$

تكون صحيحة وبالتالي R_3 صالحة

* مثال على R_1.

$$(\exists x(x+y) \leq z) \longrightarrow \underbrace{(\alpha \rightarrow z)}_{\forall}$$

نلاحظ أن z حر

بالتالي لا يمكن تطبيق R_1 وذلك كون z حر

أما إذا كانت العلاقة بالشكل

$$(\exists x(x+y) \leq z) \longrightarrow (x = t)$$

نستطيع تطبيق R_1 وذلك كون $\forall$ لا يوجد متحول حر (t ليس متحول حر وذلك كون $x = t$)

مثال على الاستدلال (كلاسيكي)

$$(\forall x \in Net; x \leq 1) \Rightarrow (y + z = 7)$$

مجموعة الأعداد الطبيعية

نلاحظ أن العدد الطبيعي الأصغر 1 هو 0

إذ أن الطرف الأول مساوٍ لـ 0

وبالتالي ~~فإن~~ العلاقة صحيحة

$$\mathcal{L}_3.\ \forall x_i \alpha(x_i) \longrightarrow \forall x_j \alpha(x_j)$$

كلمات

تمارين ومراجعات وامثلة لم تحل

$L_1.\ \alpha(x_i) \longrightarrow \exists x_i \alpha(x_i)$

$L_2.\ \forall x_i \alpha(x_i) \longrightarrow \alpha(x_i)$

$L_3.\ \forall x_i \alpha(x_i) \longrightarrow \forall x_j \alpha(x_j)$

$L_4.\ \exists x_i \alpha(x_i) \longrightarrow \exists x_j \alpha(x_j)$

$L_5.\ \exists x_i \sim p(x_i) \longrightarrow \sim\forall x_j p(x_j)$

$L_6.\ \sim\exists x \sim p(x) \longrightarrow \forall x p(x)$

$L_7.\ \sim\forall x p(x) \longrightarrow \exists x \sim p(x)$

$L_8.\ \exists x \sim p(x) \equiv \sim\forall x p(x)$

$L_9.\ \forall x p(x) \equiv \sim\exists x \sim p(x)$

$L_{10}.\ \sim\forall x \sim p(x) \longrightarrow \exists x p(x)$

$L_{11}.\ \sim\exists x p(x) \equiv \forall x \sim p(x)$

$L_{12}.\ \exists x p(x) \equiv \sim\forall x \sim p(x)$

$L_{13}.\ \forall x_i(\alpha(x_i) \longrightarrow \beta(x_i)) \longrightarrow (\forall x_i \alpha(x_i) \longrightarrow \forall x_i \beta(x_i))$

$L_{14}.\ \forall x_i(\alpha(x_i) \longrightarrow \beta(x_i)) \longrightarrow (\exists x_i \alpha(x_i) \longrightarrow \exists x_i \beta(x_i))$

$L_{15}.\ \forall x_i(\alpha(x_i) \wedge \beta(x_i)) \longleftrightarrow (\forall x_i \alpha(x_i) \wedge \forall x_i \beta(x_i))$

$L_{16}.\ \exists x_i(\alpha(x_i) \vee \beta(x_i)) \equiv (\exists x_i \alpha(x_i) \vee \exists x_i \beta(x_i))$

$L_{17}.\ \forall x_i \forall x_j \alpha \longleftrightarrow \forall x_j \forall x_i \alpha$

$L_{18}.\ \exists x_i \exists x_j \alpha \longleftrightarrow \exists x_j \exists x_i \alpha$

$L_{19}.\ \exists x \forall y\, \phi(x,y) \longrightarrow \forall y \exists x\, \phi(x,y)$

$L_{20}.\ \forall x \forall y\, \alpha(x,y) \longrightarrow \forall x\, \alpha(x,x)$

$L_{21}.\ \exists x\, \alpha(x,x) \longrightarrow \exists x \exists y\, \alpha(x,y)$

$L_{22}.\ \alpha \longrightarrow \forall x \alpha$ × معين

$L_{23}.\ \exists x \alpha \longrightarrow \alpha$ × معين

$L_{24}.\ \exists x p(x) \equiv p(x)$ × معين

$L_{25}.\ (\psi \wedge \forall x\, \phi(x)) \equiv \forall x(\psi \wedge \phi(x))$ × معين

$L_{26}.\ (\psi \wedge \exists x\, \phi(x)) \equiv \exists x(\psi \wedge \phi(x))$ × معين