

الحملة المغربية

وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي

Leçons N°1 درس رقم 1

Notions de logique *** مبادئ في المنطق

إعتبرات تربوية:

- عن التوجيهات التربوية العامة لتدريس مادة الرياضيات :
 - تزويد التلاميذ بمفاهيم ومبادئ أولية لتنظيم أفكارهم.
 - مداهم بتقنيات ونماذج تساعد على بناء وصياغة البراهين الرياضية على أسس واضحة و سليمة.
- ملاحظة:** بلوغ هذه الأهداف لا يتحقق مع إنتهاء هذا الفصل، لذا يجب إستعمال نتائجه كلما ساحت الفرصة لذلك في مختلف فصول البرنامج اللاحقة.

البرامج والقدرات المنتظرة والتوجيهات التربوية

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
<ul style="list-style-type: none"> • ينبغي تقريب العبارات و القوانين المنطقية وطرائق الإستدلال إنطلاقاً من أنشطة متنوعة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق التعامل معها. • تجنب البناء النظري و الإفراط في استعمال جداول الحقيقة. • يعتبر هذا الفصل فرصة لحل معادلات و متراجحات لا جذرية و بعض المتفاوتات. • إن درس المنطق لا ينتهي بإتهاء هذا الفصل بل ينبغي إستثمار نتائجه كلما ساحت الفرصة لذلك بمختلف فصول المقرر اللاحقة. 	<ul style="list-style-type: none"> • تحويل نص رياضي إلى كتابة ترميزية بإستعمال الروابط و المكلمات وعكس ذلك. • استعمال إستدلال مناسب حسب الوضعية المدروسة. • التمكن من صياغة براهين و إستدلالات رياضية واضحة و سليمة منطقياً. 	<p>(1) تعاريف ومصطلحات: النص الرياضي- العبارة - الدالة العبارة. المكلمات و العبارات المكلمة. العمليات المنطقية. النفي- العطف- الفصل- الإستلزام- التكافؤ</p> <p>(2) القوانين المنطقية و الإستدلالات الرياضية: جرد لقوانين منطقية أساسية. الإستدلال الإستنتاجي. الإستدلال بالتكافؤات المتتالية الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس الإستدلال بالخلف. الإستدلال بفصل الحالات. الإستدلال بالترجع.</p>

السنة الأولى من سلك البكالوريا علوم رياضية
Première année du bac Sciences maths
Le nouveau programme : 2006 – 2007

مبادئ في المنطق *** Notions de logique

(1) النص الرياضي - العبارة - الدالة العبارية:

تعريف 1:

نسمى نصا رياضيا، كل تجميع لكلمات و حروف ممزوجة برموز رياضية، و تشكل هذه النصوص لغة الرياضيات.

أمثلة:

$(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$ ، (2 عدد فردي) ، $(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$ ، $(\sqrt{3} > \sqrt{2})$ الخ.. تمثل نصوصا رياضية.

تعريف 2:

نسمى عبارة، كل نص رياضي له معنى ويكون إما صحيحا وإما خاطئا

أمثلة:

" مجموع عددين صحيحين متتاليين هو عدد فردي " هي عبارة صحيحة.
" $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ " هي عبارة خاطئة.

ملاحظات:

بتعبير آخر وبكيفية مبسطة، العبارة هي حشد من الكلمات والرموز، يكون جملة خبرية، تحمل معنى قد يكون خاطئا أو صحيحا، ولا يمكن أن يكون صحيحا وخاطئا في آن واحد.

و نرسم لقيمة صحيحة ب: (V أو 1) ونرمز لقيمة خاطئة ب: (F أو 0) ، و نمثل ذلك بأحد الجدولين: جدول الحقيقة

P		P
1	أو	V
0		F

تطبيقات: (1) أعط مثلا لعبارة صحيحة.
(2) أعط مثلا لعبارة خاطئة

تعريف 3:

نسمى دالة عبارية (أو خاصية لمتغير) كل نص رياضي له معنى ويحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E بحيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير (أو المتغيرات) بقيمة معينة .

أمثلة:

" $x \in \mathbb{Z} \quad x + 3 > 0$ " دالة عبارية ولدنا (0) صحيحة و(-7) خاطئة.

" $a^2 + b^2 = 4$ " حيث $P(a,b) \in \mathbb{R}^2$ دالة عبارية ولدنا $P(0,1)$ خاطئة و $P(0,2)$ صحيحة.

تطبيقات:

- حدد قيم المتغير (x,y) التي تكون من أجلها الخاصية $P(x,y): 2x - 3y = 7$ صحيحة حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- حدد قيم المتغير x التي تكون من أجلها الخاصية خاطئة حيث $x \in \mathbb{R}$.

(2) المكلمات - العبارات المكلمة:

تعريف:

لتكن $P(x)$ دالة عبارية لمتغير x من مجموعة غير فارغة E. انطلاقا من الدالة العبارية $(x \in E): P(x)$

نعرف العبارات التالية:

* $(\forall x \in E): P(x)$ وهي عبارة تكون صحيحة إذا كان كل عنصر x من E يحقق الخاصية $P(x)$.

- الرمز \forall يسمى المكلم الكوني ويقرأ " مهما يكن " أو " لكل "
* $(\exists x \in E): P(x)$ وهي عبارة تكون صحيحة إذا وجد على الأقل عنصرا x من E يحقق الخاصية $P(x)$.

- الرمز \exists يسمى المكلم الوجودي ويقرأ " يوجد على الأقل "
* $(\exists! x \in E): P(x)$ وهي عبارة تكون صحيحة إذا وجد عنصر وحيد x من E يحقق الخاصية $P(x)$.

- الرمز $\exists!$ يسمى مكلم الوجودية و الوجدانية ويقرأ " يوجد عنصر وحيد "

أمثلة:

نعتبر العبارات التالية:

$$[(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x + 1 = 0]^* (P_1) \quad \bullet$$

P_1 عبارة خاطئة (باعتبار $x = 0$)

$$[(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x + 1 = 0]^* (P_2) \quad \bullet$$

P_2 عبارة صحيحة (لأن العدد الحقيقي $x = -1/2$ يحقق

$$2x + 1 = 0$$

$$[(\exists x \in \mathbb{Z}) : 2x + 1 = 0]^* (P_3) \quad \bullet$$

P_3 عبارة خاطئة (إذا افترضنا وجود عدد نسبي x_0 يحقق

$$2x_0 + 1 = 0 \text{ فإن } 2x_0 + 1 = 0 \text{ زوجي وهذا غير ممكن)$$

$$[(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 1]^* (P_4) \quad \bullet$$

P_4 عبارة خاطئة (باعتبار $x = 1$ و $y = 2$)

تطبيقات:

حدد حقيقة كل من العبارات التالية:

$$(\exists x \in \mathbb{R}) : [x^2 + x + 1 = 0]^* (Q_1)$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}) : [x^2 + x + 1 > 0]^* (Q_2)$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : [x \leq y]^* (Q_3)$$

$$(\forall y \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) : [x \leq y]^* (Q_4)$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) : [x \leq y]^* (Q_5)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : [x^2 y^2 > xy]^* (Q_6)$$

ملاحظة:

a. إذا كانت عبارة مكتمة تحمل عدة مكتمات من نفس الطبيعة فإن ترتيب هذه الأخيرة ليس له أهمية في

تحديد معنى العبارة.

b. إذا كانت عبارة تحمل عدة مكتمات من طبيعة مختلفة فإن ترتيب هذه الأخيرة له أهمية في تحديد معنى

العبارة.

(3) العمليات على العبارات:

3-1 - نفي عبارة:

نفي العبارة P هي عبارة نرمز لها بأحد الرمزین: \bar{P} أو $\neg P$ و تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة. نعبر عن قيمة حقيقية العبارة \bar{P} بدلالة قيمة حقيقة العبارة P في الجدول التالي:

P	\bar{P}
V	F
F	V

a- نفي عبارة مكتمة:

* نفي العبارة " $(\forall x \in E) P(x)$ " هي العبارة " $(\exists x \in E) \bar{P}(x)$ "

* نفي العبارة " $(\exists x \in E) P(x)$ " هي العبارة " $(\forall x \in E) \bar{P}(x)$ "

* نفي العبارة: " $(\forall x \in E) (\forall y \in F) \bar{P}(x, y)$ " هي العبارة " $(\forall x \in E) (\exists y \in F) P(x, y)$ "

b- الاستدلال بالمثال المضاد

للبهتان على خطأ العبارة " $(\forall x \in E) P(x)$ " نبين صحة نفيها " $(\exists x \in E) \overline{P(x)}$ "
مثال:

لنبين خطأ العبارة: " $(Q) \in \mathbb{N}^{**} : \forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m} \in \mathbb{N}$ "

نفي (Q) هي العبارة: " $(\overline{Q}) \in \mathbb{N}^{**} : \exists (m, n) \in \mathbb{N}^{*} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m} \notin \mathbb{N}$ "

يأخذ $n = 1$ و $m = 2$ نحصل على $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} = \frac{11}{6} \notin \mathbb{N}$ إذن:

ومنه العبارة \overline{Q} صحيحة. إذن العبارة Q خاطئة.

تطبيقات:

باستعمال الاستدلال بالمثال المضاد بين أن العبارات التالية خاطئة:

$$(1) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathbb{R}) : 2x - 4y \neq 5 \quad (3) \quad (\forall x \in]0,1[) \quad \frac{2x}{x^2(1-x^2)} < 1$$

$$(2) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + (1/x) \geq 2 \quad (4) \quad (\forall a \in]0,1[) (\forall b \in]0,1[) : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 - ab$$

3-2- فصل عبارتين:

تعريف:

فصل عبارتين P و Q هي عبارة نرمر لها ب (Q أو P) والتي تكون خاطئة فقط في حالة P و Q وخاطبتين معا.

جدول حقيقة العبارة (P أو Q):

P	Q	P أو Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

أمثلة:

* عبارة صحيحة $(\sqrt{3} \in \mathbb{Q})$ أو $(\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{9}})$

* عبارة صحيحة $(5 < 6)$ أو $(5 = 6)$

* عبارة خاطئة $((\sqrt{2} + 1)^2 = 3)$ أو $(\sqrt{2+3} = \sqrt{2} + \sqrt{3})$

ملاحظة:

العبارتان: (P أو Q) و (Q أو P) لهما نفس المعنى، " نقول إن عملية الفصل تبادلية ".
 العبارتان: (P أو Q) أو R و (Q أو R) أو P لهما نفس المعنى، " نقول إن عملية الفصل تجميعية ".

تطبيقات:

ليكن a و b من $]-4; +\infty[$ ونعتبر المعادلتين: $(E) : x^2 + ax + b = 0$ و $(F) : x^2 + bx + a = 0$

ليكن Δ_1 مميز (E) و Δ_2 مميز (F) ونعتبر العبارتين $(P) : \Delta_1 \geq 0$ و $(Q) : \Delta_2 \geq 0$.
 بين أن العبارة (P أو Q) صحيحة.

3-3 عطف عبارتين:

تعريف:

عطف عبارتين P و Q هي العبارة التي نرمز لها بالرمز (P و Q) والتي تكون صحيحة فقط في حالة P و Q صحيحتين معا.

جدول حقيقة العبارة (P و Q):

P	Q	P و Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

أمثلة:

* عبارة خاطئة $(\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \text{ و } \sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{9}})$

* عبارة صحيحة $(\sqrt{3} < 2 \text{ و } (\sqrt{3})^2 \in \mathbb{N})$

ملاحظة:

العبارتان (P و Q) و (Q و P) لهما نفس المعنى. " نقول إن عملية العطف تبادلية ".
العبارتان " R و (P و Q) و (Q و R) و P لهما نفس المعنى. " نقول إن عملية العطف تجمعية "

4-3 استلزم عبارتين:

تعريف:

انطلاقاً من عبارتين P و Q نحصل على العبارة " P أو Q " التي تكون خاطئة فقط إذا كانت P صحيحة وكانت Q خاطئة.

العبارة " P أو Q " تسمى استلزام العبارتين P و Q وتكتب $P \Rightarrow Q$ وتقرأ " P تستلزم Q ".

ملاحظة:

استلزام العبارتين P و Q هي العبارة التي نرمز لها بالرمز $P \Rightarrow Q$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة.

جدول حقيقة العبارة ($P \Rightarrow Q$):

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

أمثلة:

* عبارة صحيحة $(3 < 2 \Rightarrow 9 > 4)$

* عبارة خاطئة $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = 1.41$

* عبارة صحيحة $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} > 0$

* (I) منتصف $\overline{IA} = \overline{IB} = \overline{O} \Rightarrow [AB]$ عبارة صحيحة.

تطبيقات:

(1) a و b عدنان حقيقيان معلومان. بين أن: $|a| < 1$ و $|b| < 1 \Rightarrow |a+b| < |1+ab|$

(2) ليكن x و y من \mathbb{R}^* . ونعتبر العبارتين: $(q): \frac{1}{x^2+y^2} \leq 20$ و $(p): 2x+4y=1$. بين أن: $p \Rightarrow q$

ملاحظة:

- الإستلزام $q \Rightarrow p$ يسمى الإستلزام العكسي للإستلزام $p \Rightarrow q$
- العبارتان ($p \Rightarrow q$) و ($q \Rightarrow p$) ليس لهما نفس المعنى
- العبارتان $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ليس لهما نفس المعنى

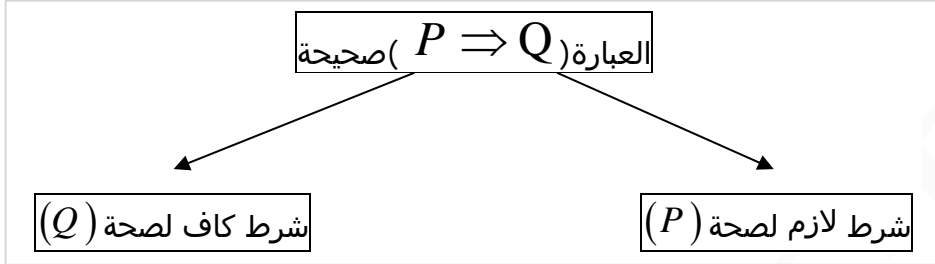
5-3- الشرط الكافي- الشرط اللازم

- إذا كان الإستلزام $[p \Rightarrow q]$ صحيحا فإنه يكفي أن تكون العبارة (p) صحيحة.

صحة p شرط كاف لصحة q

- إذا كانت العبارة q صحيحة فإن العبارة p تكون إما صحيحة أو خاطئة ونعبر عن ذلك بقولنا:

صحة q شرط لازم لصحة p



أمثلة:

نعلم أن الإستلزام التالي صحيح:

$ABC \Rightarrow (ABC \text{ مثلث متساوي الساقين})$

- الشرط ABC مثلث متساوي الأضلاع كاف ليكون ABC متساوي الساقين.
- الشرط ABC مثلث متساوي الساقين لازم ليكون ABC متساوي الأضلاع.
- ونلاحظ أن هذا الشرط اللازم إذا توفر فإنه يتيح الإمكانية كون ABC متساوي الأضلاع، دون أن يضمن ذلك، غير أن عدم توفره بلغي هذه الإمكانية تماما.

خاصية

العبارتان التاليتان صحيحتان.

$$\left[(\forall x \in E) : A(x) \Rightarrow B(x) \right] \Rightarrow \left[(\forall x \in E) : A(x) \Rightarrow (\forall x \in E) : B(x) \right]$$

$$\left[(\exists x \in E) (\forall y \in F) : A(x, y) \right] \Rightarrow (\forall x \in F) (\exists x \in E) : A(x, y)$$

ملاحظة:

يمكنك ملاحظة أن الإستلزام العكسي :

$$\left[(\forall x \in E) A(x) \Rightarrow B(x) \right] \Rightarrow \left[(\forall x \in E) : A(x) \Rightarrow (\forall x \in E) : B(x) \right]$$

مثلا : العبارة: " يوجد تلميذ لا يفضل الرياضيات أو جمع التلاميذ يفضلون الفيزياء"

لا تستلزم العبارة " جميع التلاميذ لا يفضلون الرياضيات أو يفضلون الفيزياء "

ويمكنك ملاحظة أيضا أن الاستلزام العكسي:

$$(\forall y \in F) (\exists x \in E) : A(x, y) \Rightarrow (\exists x \in E) (\forall y \in F) A(x, y)$$

مثلا : العبارة: " $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists n \in \mathbb{N}) : x < n$ " صحيحة، ولكن العبارة: " $(\exists n \in \mathbb{N}) (\forall x \in \mathbb{R}) : x < n$ " خاطئة.

6-3- تكافؤ عبارتين :

تعريف

انطلاقا من عبارتين p و q نحصل على العبارة " $(p \Rightarrow q)$ و " $(q \Rightarrow p)$ " التي تكون صحيحة فقط إذا كانت p و q لهما نفس قيم الحقيقة.

العبارة " $(p \Rightarrow q)$ و " $(q \Rightarrow p)$ " تسمى تكافؤ العبارتين p و q ونكتب " $(p \Leftrightarrow q)$ " وتقرأ p تكافؤ q

جدول حقيقة العبارة $(P \Leftrightarrow Q)$:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ملاحظة:

تكافؤ العبارتين p و q هي العبارة التي نرمز لها بالرمز $P \Leftrightarrow Q$ وتكون صحيحة إذا كانت P و Q صحيحتين معا أو P و Q خاطئتين معا.

أمثلة: * $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (|1-\pi| = \pi - 1)$ عبارة خاطئة .

* $12 < 0 \Leftrightarrow |1-\pi| = \pi - 1$ عبارة صحيحة

تطبيقات:

(1) * x و y عدنان معلومان. بين أن: $y = 8$ و $x = 2 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4}$

(2) a و b عدنان حقيقيان. بين أن: $(a^2-1)(b^2-1) > 0 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab|$

(3) بين أن: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$

ملاحظة:

- العبارتان $p \Leftrightarrow q$ و $q \Leftrightarrow p$ لهما نفس جدول الحقيقة (التكافؤ عملية تبادلية)
- العبارتان $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow R)$ و $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow R$ لهما نفس جدول حقيقة (التكافؤ عملية تجمعية)

• لدينا: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow R) \Rightarrow (p \Leftrightarrow R)$ (التكافؤ عملية تعدية)

بصفة عامة:

لتكن p و r_1 و r_2 و و r_n عبارات.

إذا كانت p عبارة صحيحة و

$$\left\{ \begin{array}{l} p \Leftrightarrow r_1 \\ R_1 \Leftrightarrow r_2 \\ \vdots \\ r_n \Leftrightarrow q \end{array} \right. \text{ فإن } q \text{ عبارة صحيحة.}$$

عمليا:

للبهان على صحة عبارة ما q ، نبرهن على صحة التكافؤات المتتالية $p \Leftrightarrow r_1$ و $r_1 \Leftrightarrow r_2$ و و $r_n \Leftrightarrow q$ حيث p عبارة صحيحة ثم نستنتج أن التكافؤ $p \Leftrightarrow q$ صحيح إذن q عبارة صحيحة . هذا النوع من الاستدلال يسمى، الاستدلال بالتكافؤات المتتالية.

أمثلة:

(1) لنبين أن $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$

ليكن (x, y) عنصرا من \mathbb{R}^2 لدينا:

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-1) + (\sqrt{y^2+1}-1) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+1}-1 = 0 \quad (\sqrt{x^2+1}-1 \geq 0) \\ \sqrt{y^2+1}-1 = 0 \quad (\sqrt{y^2+1}-1 \geq 0) \end{array} \right. \text{ لأن}$$

$$\Leftrightarrow (x^2=0) \text{ و } (y^2=0) \Leftrightarrow (x=y=0)$$

(3) ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين قطعاً. لنبين أن:

$$\boxed{x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x}}$$

لدينا :

$$\frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 < \frac{xy(2x+5y)}{5x+2y} < y^2 \Leftrightarrow 5x^3 + 2x^2y < 2x^2y + 5xy^2 \text{ و } 2x^2y + 5xy^2 < 5xy^2 + 2y^3$$

$$\Leftrightarrow 5x^3 < 5xy^2 \text{ و } 2x^2y < 2y^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 < y^2 \text{ و } x^2 < y^2 \quad (\text{لأن } x > 0 \text{ و } y > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 < y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{y^2} \Leftrightarrow |x| < |y| \Leftrightarrow x < y$$

$$x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x} \quad \text{وبالتالي:}$$

خاصية: لتكن $p(x)$ و $q(x)$ خاصيتين للمتغير x و E مجموعة غير فارغة. العبارتان التاليتان صحيحتان:

$$[(\forall x \in E): p(x) \text{ و } q(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in E: p(x)) \text{ و } (\forall x \in E: q(x))]$$

$$[(\exists x \in E): p(x) \text{ أو } q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x \in E: p(x)) \text{ أو } (\exists x \in E: q(x))]$$

ملاحظة هامة: العبارة: " كل عدد صحيح طبيعي هو زوجي أو فردي " لا تستلزم العبارة:

" كل عدد صحيح هو زوجي أو كل عدد صحيح طبيعي هو فردي "

$$\text{ومنه فالعبارة: } [(\forall x \in E): A(x) \text{ أو } B(x)] \Rightarrow [(\forall x \in E): A(x) \text{ أو } (\forall x \in E): B(x)]$$

لا تكون دائما صحيحة.

تطبيق:

أعط مثلا تكون فيه العبارة:

$$[(\exists x \in E): A(x) \text{ و } B(x)] \Rightarrow [(\exists x \in E: A(x)) \text{ و } (\exists x \in E: B(x))]$$

ملاحظة هامة:

في بعض الحالات، للبرهان على التكافؤ $(p \Leftrightarrow q)$ يكفي أن نبرهن على الإستلزامين $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$.

هذا النوع من البرهان يستعمل غالبا لأن من مميزاته أنه:

(1) يبين لنا ما هي العبارات الصحيحة التي نحن في حاجة إليها لكي تكون عبارة q إلى أن يظهر دور العبارة p (مع الملاحظة أننا في بعض الحالات لا نحتاج إلى p)

مثال:

$$a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان معلومان غير منعدمين. نبين أن: } (a+b=0) \Leftrightarrow (a^2=b^2 \text{ و } ab < 0)$$

$$\text{أي لنبين أن: } [(a+b=0) \Rightarrow (a^2=b^2 \text{ و } ab < 0)] \text{ و } [(a^2=b^2 \text{ و } ab < 0) \Rightarrow (a+b=0)]$$

• إذا كان $a+b=0$ (أو نفترض أن $a+b=0$) فإن $a = -b$ إذن $a^2 = b^2$ و $ab < 0$

$$\text{لنبين أن: } [(a^2=b^2 \text{ و } ab < 0) \Rightarrow (a+b=0)]$$

• إذا كان $ab < 0$ و $a^2 = b^2$ فإن $a = b$ أو $a = -b$ وبما أن $ab < 0$

فإن $a = -b$ أي $a + b = 0$

$$\text{وبالتالي: } (a+b=0) \Leftrightarrow (a^2=b^2 \text{ و } ab < 0)$$

(4) القوانين المنطقية

1.4- قانون منطقي

تعريف

لتكن p عبارة مكونة من عدة عبارات Q_1 و Q_2 و Q_3 ... و Q_n ومرتبطة فيما بينها بروابط منطقية. نقول إن p قانون منطقي إذا كانت p صحيحة مهما تكن قيمة صحة العبارات Q_1 و Q_2 و Q_3 ... و Q_n .

أمثلة: العبارات التالية هي قوانين منطقية، (تحقق من ذلك بواسطة جدول حقيقة)

$$(1) (p \text{ و } q) \Leftrightarrow (q \text{ و } p) \quad (2) ((p \text{ أو } q) \Leftrightarrow (q \text{ أو } p))$$

$$(3) (r \text{ و } (p \text{ و } q)) \Leftrightarrow ((p \text{ و } q) \text{ و } r) \quad (4) ((p \text{ أو } q) \text{ أو } r) \Leftrightarrow (p \text{ أو } (q \text{ أو } r))$$

$$(p \text{ و } q) \Rightarrow p \quad (6)$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ أو } q) \quad (8)$$

$$(p \text{ أو } (q \text{ و } r)) \Leftrightarrow (p \text{ أو } q) \text{ و } (p \text{ أو } r) \quad (10)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ و } (q \Rightarrow p)] \quad (5)$$

$$[p \Rightarrow (q \text{ أو } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ و } q) \Rightarrow r] \quad (7)$$

$$(p \text{ و } r) \Leftrightarrow (p \text{ و } q) \text{ أو } (q \text{ و } r) \quad (9)$$

تطبيق: بين أن العبارات التالية قوانين منطقية:

$$A \Rightarrow (\bar{A} \Rightarrow B) \quad (2) \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \quad (1)$$

2-4- قانون مورغان (MORGAN)

خاصية:

لتكن p و q عبارتين. العبارتان التاليتان قانونان منطقيان:

$$(\overline{p \text{ أو } q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ و } \bar{q})$$

$$(\overline{p \text{ و } q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ أو } \bar{q})$$

أمثلة: (1) لنحدد $(\overline{p \Rightarrow q})$

$$\text{لدينا: } (\overline{p \Rightarrow q}) \Leftrightarrow (\overline{p \text{ أو } q})$$

$$\Leftrightarrow p \text{ و } \bar{q}$$

(2) لنحدد $(\overline{p \text{ و } q})$

$$\text{لدينا: } q \text{ أو } \bar{p} \Leftrightarrow (\overline{p \text{ و } q})$$

تطبيق: حدد نفي العبارات التالية: (1) $p \text{ أو } \bar{q}$ (2) $\bar{p} \text{ أو } q$ (3) $p \Rightarrow \bar{q}$

3-4- قانون الاستلزام المضاد للعكس:

خاصية:

لتكن p و q عبارتين. العبارة التالية قانون منطقي: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

البرهان:

باستعمال جدول الحقيقة يمكن البرهان على هذا القانون المنطقي.

ملاحظة:

الاستلزامان $(p \Rightarrow q)$ و $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ متكافئان.

الإستلزام $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ يسمى الإستلزام المضاد للعكس للإستلزام $(p \Rightarrow q)$

لاحظ أن العبارة $(\bar{p} \Rightarrow \bar{q}) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ يمكن أن تكون خاطئة.

مثلا العبارة (8 زوجي) $\Rightarrow (5 < 2)$ صحيحة، لكن العبارة (8 فردي) $\Rightarrow (5 > 2)$ خاطئة.

نتيجة:

(الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس).

إذا كان في بعض الوضعيات يصعب البرهان مباشرة على صحة الاستلزام $p \Rightarrow q$,

فإنه يمكن أن نبرهن على صحة الاستلزام المضاد للعكس $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ ثم نستنتج $p \Rightarrow q$.

عمليا:

نفترض أن العبارة q صحيحة ونبين أن العبارة \bar{p} صحيحة أيضا ثم نستنتج أن $p \Rightarrow q$ صحيحة. هذا النوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس.

مثال: ليكن a و b عددين حقيقيين غير متقابلين. لنبين أن: $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$

باستعمال الاستللال بالاستلزام المضاد للعكس، يكفي أن نبين أن: $\frac{a-b}{a+b} = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}b$

$$\frac{a-b}{a+b} = -3 \Rightarrow a-b = -3a-3b \Rightarrow a+3a = -3b+b \Rightarrow 4a = -2b \Rightarrow a = -\frac{1}{2}b \quad \text{لينا:}$$

وبالتالي فإن: $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$

تطبيق

بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \neq 1 + \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \neq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \neq 1 \quad (2)$$

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad 4y \neq -3x \Rightarrow x - y \neq 7(x + y) \quad (3)$$

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad (xy - 1)(x - y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2 + y + 1) \neq y(x^2 + x + 1) \quad (4)$$

$$(\forall (x, y) \in]1; +\infty[^2) \quad x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y \quad (5)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} \neq 1 - \sqrt{x} \quad (6)$$

3.4- الاستللال بالخلف.

خاصية:

لتكن P و Q عبارتين. العبارة التالية قانون منطقي: $P \Rightarrow [(\bar{P} \Rightarrow Q) \text{ و } (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q})]$

البرهان:

نضع $[(\bar{P} \Rightarrow Q) \text{ و } (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q})]$ \mathbb{R} .

نفترض أن العبارة R صحيحة. لدينا:

$$R \Leftrightarrow (P \text{ أو } Q) \text{ و } (P \text{ أو } \bar{Q}) \Leftrightarrow (P \text{ و } P) \text{ أو } (P \text{ و } \bar{Q}) \text{ أو } (Q \text{ و } P) \text{ أو } (Q \text{ و } \bar{Q})$$

$$\Leftrightarrow P \text{ أو } (P \text{ و } \bar{Q}) \text{ أو } (Q \text{ و } P) \text{ أو } (Q \text{ و } \bar{Q})$$

لدينا $(Q \text{ و } \bar{Q})$ عبارة خاطئة

ومنه فإن: $(P \text{ و } Q)$ أو $(P \text{ و } \bar{Q})$ أو P صحيحة أي: $(P \text{ أو } Q)$ أو P صحيحة.

لدينا: \bar{Q} أو Q عبارة صحيحة ومنه P أو P صحيحة أي P صحيحة.

ملاحظة:

لكي نبين أن عبارة P صحيحة:

نفترض أن \bar{P} صحيحة ونبين أن $q \Rightarrow \bar{p}$ استلزام صحيح وأن \bar{q} عبارة صحيحة.

وتكون $(q \text{ و } \bar{q})$ صحيحة ونحصل على تناقض.

مثال:

ليكن a و b عنصرين من \mathbb{R} بحيث $|a-b| < \varepsilon$ ($\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$) (1)

لنبين أن $a = b$ (مستدلا بالخلف)

نفترض أن $a \neq b$ إذن: $|a-b| > 0$

$$\text{نأخذ } \varepsilon = \frac{|a-b|}{2} \text{ وحسب (1) } |a-b| > \frac{|a-b|}{2}$$

4-4. الاستدلال بفضل الحالات :

تعريف

تكن P و Q و R عبارات منطقية.
العبرة: $[(P \Rightarrow R) \text{ و } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P \text{ أو } Q) \Rightarrow R]$ قانون منطقي.

نستنتج أنه:

إذا كانت العبرة (P أو Q) صحيحة، فإنه للبرهان على صحة العبرة R ، نبين أن الاستلزامين ($P \Rightarrow R$) و ($Q \Rightarrow R$) صحيحان، ثم نستنتج أن العبرة R صحيحة. وهذا النوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بفضل الحالات.
عملية:

نطبق هذا الاستدلال في حالة Q هي العبرة \bar{P} ، فنحصل على القانون المنطقي التالي:
 $[(P \Rightarrow R) \text{ و } (\bar{P} \Rightarrow R)] \Rightarrow R$ (لأن العبرة \bar{P} أو P صحيحة)

مثال:

حل في \mathbb{R} المعادلة: $(E) \quad |x-1| + |2x-3| = 6$

باعتبار الجدول التالي سنقيم الدراسة إلى ثلاثة أجزاء بفضل الحالات:

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$ 2x-3 $	$-2x+3$	$-2x+3$	$2x-3$	$2x-3$
$ x-1 $	$-x+1$	$x-1$	$x-1$	$x-1$
$ 2x-3 + x-1 $	$-3x+4$	$-x+2$	$3x-4$	$3x-4$

$$I_3 = \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[\text{ و } I_2 = \left] 1; \frac{3}{2} \right[\text{ و } I_1 =]-\infty; 1]$$

نرمز ب S_i لمجموعة حلول المعادلة (E) على المجال I_i ($i \in \{1, 2, 3\}$)

$$x \in S_1 \Leftrightarrow -3x+4=6 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} : x \in I_1 \text{ الحالة (1)}$$

$$S_1 = \left\{ -\frac{2}{3} \right\} \text{ وبما أن: } -\frac{2}{3} \in I_1 \text{ فإن}$$

$$x \in S_2 \Leftrightarrow -x+2=6 \Leftrightarrow x=-4 : x \in I_2 \text{ الحالة (2)}$$

$$S_2 = \emptyset \text{ وبما أن } -4 \notin I_2 \text{ فإن}$$

$$x \in S_3 \Leftrightarrow 3x-4=6 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3} : x \in I_3 \text{ الحالة (3)}$$

$$S_3 = \left\{ \frac{10}{3} \right\} \text{ وبما أن } \frac{10}{3} \in I_3 \text{ فإن}$$

تتكون مجموعة حلول المعادلة (E) من حلول مختلفة ناتجة عن الحالات الثلاث، الشيء الذي يعطى: $S = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{10}{3} \right\}$.

نقول إننا استدللنا بفضل الحالات. لقد قسمنا \mathbb{R} إلى اتحاد مجالات وبحسنا عن الحلول في كل من هذه المجالات.

مثال:

حل في \mathbb{R} المتراجحة (I): $\sqrt{2x^2+1} > 2x - 4$

نلاحظ أنه مهما يكن x من \mathbb{R} لدينا $2x^2 + 1 > 0$. نستنتج أن التعبير $\sqrt{2x^2+1}$ معرف على \mathbb{R} .

عوض أن نشتغل مباشرة على \mathbb{R} . سنقسم الدراسة إلى جزئين، حسب إشارة $2x-4$

الحالة الأولى: $x < 2$

إذن $2x-4 < 0$ وبما أن $\sqrt{2x^2+1} > 0$ ، فإن كل عنصر من المجال $]-\infty, 2[$ يعتبر حلاً للمتراجحة (I).

الحالة الثانية: $x \geq 2$:

طرفا المتراجحة موجبان وباعتبار الدالة المربع تزايدية قطعاً على \mathbb{R}^+ ، نستنتج أن المتراجحة (I) تكافئ: $(2x-4)^2 > (\sqrt{2x^2+1})^2$ الذي يعطى بعد الاختزال: $-2x^2+16x-15 > 0$

هذه المتراجحة محققة بالنسبة لـ x في المجال $x \in [2, +\infty[$ و $\left] \frac{16-\sqrt{136}}{4}; \frac{16+\sqrt{136}}{4} \right[$

نستنتج أن حلول المتراجحة (I) في $[2, +\infty[$ هي العناصر من المجال $\left[2; \frac{16+\sqrt{136}}{4} \right[$

وأخيراً، فغن مجموعة حلول المتراجحة هو اتحاد المجالات التي تم الحصول عليها في كلتا الحالتين، الشيء الذي يعطى:

$$S = \left] -\infty; \frac{8+\sqrt{34}}{2} \right[$$

مثال:

ليكن a عدداً صحيحاً نسبياً. برهن أن $a(a^2-1)$ مضاعف لـ 3
سنستدل من جديد بفصل الحالات، حسب الباقي r للقسمة الإقليدية لـ a على 3.

الحالة الأولى: $r = 0$: يوجد عدد صحيح نسبي k بحيث: $a = 3k$ إذن
$$a(a^2-1) = 3[k(9k^2-1)]$$

الحالة الثانية: $r = 1$: يوجد عدد صحيح نسبي k بحيث $a = 3k+1$
$$a(a^2-1) = (3k+1)(9k^2+6k) = 3(3k+1)(3k^2+2k)$$

الحالة الثالثة: $r = 2$: يوجد عدد صحيح نسبي k بحيث: $a = 3k+2$
إذن:
$$a(a^2-1) = (3k+2)(9k^2+12k+3) = 3(3k+2)(3k^2+4k+1)$$

في كل من الحالات الثلاث، يوجد عدد صحيح نسبي k بحيث $a(a^2-1) = 3k$

تكون إذن قد برهننا في الحالات الثلاث أن $a(a^2-1)$ مضاعف لـ 3.

ملاحظة: يعود الاستدلال بفصل الحالات على مجموعة A إلى إنجاز تجزئة لـ A والاستدلال على كل من أجزاء هذه التجزئة.

6-4- الاستدلال بالترجع :

خاصية: لتكن $P(n)$ دالة عبارية لمتغير n من \mathbb{N} .

إذا كان:
(1) يوجد عنصر n_0 من \mathbb{N} بحيث $P(n_0)$ عبارة صحيحة.
(2) لكل $n \geq n_0$ الاستلزام $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ صحيح.
فإن $P(n)$ عبارة صحيحة لكل $n \geq n_0$ من \mathbb{N} .

البرهان:

نعتبر المجموعة $A = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \text{ صحيحة } p(n)\}$

نلاحظ أن: $A \subset \mathbb{N}$ و $A \neq \emptyset$ و $A = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$

نستدل بالخلف ونفترض أنه يوجد $n \geq n_0$ بحيث $P(n)$ عبارة خاطئة.

نضع: \mathbb{N} أصغر قيمة (أكبر من n_0) بحيث $P(N)$ عبارة خاطئة.
لدينا: $P(N-1)$ صحيحة ونعلم أن: $P(N-1) \Rightarrow P(N)$ ومنه فإن $P(N)$ صحيحة وهذا تناقض.

أمثلة:

(1) ليكن $a \in \mathbb{R}^+$ نبين أن: $(1+a)^n \geq 1+an$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

لتكن $P(n)$ الخاصية المعرفة على \mathbb{N}^* : $P(n): (1+a)^n \geq 1+an$

من أجل $n = 1$ لدينا: $(1+a)^1 \geq 1+a \cdot 1$ صحيحة. ومنه $P(1)$ صحيحة.

نفترض أن $P(n)$ صحيحة أي نبين: $(1+a)^n \geq 1+an$
 ونبين أن العبارة $P(n+1)$ صحيحة أي نبين: $(1+a)^{n+1} \geq 1+a(n+1)$
 لدينا: $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a)$ و $(1+a)^n \geq 1+an$
 أي: $(1+a)^{n+1} \geq (1+an)(1+a)$ (لأن $1+a > 0$)
 نقارن $(1+an)(1+a)$ و $1+a(n+1)$
 لدينا: $1+a(n+1) - (1+an)(1+a) = 1+an+a-1-a-an-a^2n$
 $= -a^2n$

وبما أن $-a^2n < 0$ فإن $(1+an)(1+a) \geq 1+a(n+1)$ ومنه: $(1+a)^{n+1} \geq 1+a(n+1)$
 أي: $P(n+1)$ صحيحة
 وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (1+a)^n \geq 1+an$

(2) لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$
 لنبين أن: $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

لتكن $P(n)$ الخاصية المعرفة على \mathbb{N}^* ب: $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

من أجل $n = 1$ لدينا: $S_1 = 1^3 = 1$ و $\frac{1(1+1)^2}{4} = 1$ إذن: $S_1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ ومنه $P(1)$ صحيحة.

نفترض أن $P(n)$ صحيحة أي $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ونبين أن: $P(n+1)$ صحيحة أي $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

لدينا: $S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2$

$S_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي فإن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

تطبيقات:

(1) بين بالترجع أنه لكل n من \mathbb{N}^* :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (a)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (b)$$

(2) بين بالترجع أنه لكل n من \mathbb{N}^* العدد $7^n - 2^n$ يقبل القسمة على 5.