Subject: / /

Mathmatical Logic

المنطق الرياضي

Dr. Jamal Abullaban-Mohamad

in University of Science

at 2012-2013

by: Abdulmeeen + Ebrahim.

المنطق الكلاسيكي
Classic logic

توطئة: إذا صيغة F فإنه إما أن تكون قطعة ابتدائية فعلية من F أو يمكن أنه تشكل صيغة.

مثال: لدينا F صيغة حيث

1. $F = P$
إنه P ليست قطعة ابتدائية لوصفها لذلك سأدعى بصيغة (بكلمة)
2. $F = (pq \vee q)$
إذا أخذنا p قطعة ابتدائية ليست صيغة
pq قطعة ابتدائية ليست صيغة أيضاً

ملاحظة: إذا كانت W ليست صيغة فإنه نفي W $(\neg W)$ ليس صيغة

مثال: pq ليست صيغة
$\neg(pq)$ ليست صيغة

تنويه:
$F = (((A \Rightarrow B) \wedge (C \vee D)) \Rightarrow E)$
هذه صيغة ونفي صيغة
$F(A,B,C,D,E) = ((((A \Rightarrow B) \dots) \Rightarrow E)$
هل يمكن كتابة الشكل السابق هكذا:
$F(A,B,C,D,E,F) = (((A \Rightarrow \dots) \dots) \Rightarrow E)$
نفرد الفكرة الكتابية للتوضيح
A, B, C, D, E
هي متغيرات منطقية

إذا أضفنا متغير منطقي ليكن F (الذي أضفناه سابقاً) سيتغير بعض أو الدلالة على سبيل المثال

$F(x) = x+1$ على مستقيم
$F(x,y) = x+1$ مستوي
$F(x,y,z) = x+1$ فراغ

رياضياً: نفصل استخدام المتغيرات التي تظهر في الصيغة

مثال:
$F[A,B] = (A \Rightarrow B)$
$F(A,B,C) = ((A \vee B) \Rightarrow C)$

برهنة:
إذا كانت F صيغة وكانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ ملفوظات منطقية من Σ (Σ هي رمز للحروف) سنجد $F(A_1, A_2, \dots A_n)$ حيث A_i ; $i \in [1,n]$ تظهر مرة واحدة في F
$F(A,B,C) = ((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C)$

تنويه:
ليكن لدينا الصيغة
$F(A,B,C) = ((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C)$
لسبب ما أردنا تبديل كل C بـ D وكل A بـ $(A \wedge B)$
$F := (((A \wedge B) \Rightarrow B) \Leftrightarrow D)$
$F_{(A \wedge B / A \,;\, D / C)} = \dots$

Subject: / /

في السابقة بعد تبديل المتغيرات يجب توضيح ذلك وفق الطريقة ٢-(A∧B) / A , P ...)

وبعد التوضيح (في المسائل) يمكننا عدم كتابة التوضيح والاكتفاء بـ F

هام: إذا كان الحرف مكرر داخل الصيغة أكثر من مرة فعند طلب التبديل الحرف بالحرف آخر مكان، يجب تبديل العدد في كافة الأماكن المكررة

هام: إذا كانت F صيغة فإننا بعد تبديل الحارف (المتغيرات) نبقى مريضة

/ الأسبقية للأقواس

في السابقة (السؤال)

إذا كتبا الشكل في تبديل

A ✗ ، A∧B ✗ يمكن

A ✓ ، (A∧B) ✓ يمكن

كذلك في المثال السابق

التحليل الدلالي / المعنى /

نأخذ الأبجدية لـ A

$A = \{P, \neg, \wedge, \vee, \top, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$

يمكن أن يعطى أي دلالة

(اسم، حرف، رقم، عملية، ...)

* مراعاة معنى دلالة الروابط

P	Q	P∧Q	P∨Q	¬P	P⇒Q
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

توضيح هام للعلاقة ⇒

P	Q	P⇒Q
1	1	1
0	0	1
1	0	0
0	1	1

نفرض أنه P هي حالة شرب الدواء

هنا P=1 يشرب الدواء

P=0 ✗ يشرب الدواء

ونفرض أنه Q هي حالة الشخص

Q=0 صحيحي (غير مريض)

Q=1 مريض

الحل

نعني أنه يشرب الدواء وهو مريض / صحيحة /

1 ⇒ 1

نعني أنه لا يشرب الدواء وهو ليس مريض / صحيحة /

0 ⇒ 0

نعني أنه لا يتناول الدواء وهو مريض / صحيحة /

0 ⇒ 1

نعني أنه يشرب الدواء وهو ليس مريض / خطأ /

1 ⇒ 0

Subject: / /

العبارة المكافئة ($\Leftrightarrow$):

ليكن لدينا الطرف الثاني

$$(p \wedge \neg p) \Rightarrow [(p \Rightarrow \neg q) \vee (r \Rightarrow s)] \Leftrightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow t)$$

الآن علينا نتائج جدول مؤلف من $64 = 2^6$ سطر على الطريقة التقليدية (جداول الحقيقة)

أما باستخدام المنطقة الكلاسيكي المصنوي للعلاقة ($\Rightarrow$) نلاحظ أنه مهما كانت قيمة الطرف الثاني (١ أو ٥) فإن الطرف الأول دوماً هو ٥

لذا فإن العلاقة $(p \wedge \neg p)$ ليست استدلال أي قيمتها ٥ بالتالي

$$\begin{cases} 0 \Rightarrow 1 \\ 0 \Rightarrow 0 \end{cases}$$

دون الحاجة لدراسة الطرف الثاني.

وبالتالي العلاقة صحيحة أي أن الاستدلال أي $(r \Rightarrow s)$ قانون أي $(r \Rightarrow s)$

(ذلك بالرغم من التناقض بين الفرضية والاستدلال)

مثال

اثبت أن العلاقة هي استدلال

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p))$$

الحل:

نستفيد من الرابط ($\Rightarrow$) نفرض أن هذا الاحتمال في حال كان صحيحاً (لكونه ليست استدلال) وإذا كانت الصحيحة (أي استدلال) بالتالي

① $(p \Rightarrow q) = 1 \Rightarrow p = 0$

② $(\neg q \Rightarrow \neg p) = 0 \Rightarrow \neg p = 0$

وذلك لكون $0 \Rightarrow 1$ خاطئة

لدينا من ① $p = 0$

ومن ② $\neg p = 0 \Leftarrow p = 1$

وهذا تناقض بالتالي تكون الفرضية هي استدلال أي صحيحة دوماً

وكل صيغة صحيحة دوماً تستخدم كقانون.

Subject:

مثال 1 (56) من الورقة

هل الصيغتين متكافئتين

$((A \wedge B) \Rightarrow C) \iff ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C))$

كما قلنا سابقاً نأخذ الطرف الأبسط والذي يحوي ⇒ أيضاً

نأخذ الطرف $((A \wedge B) \Rightarrow C)$

ونفرض أنه خاطئ (0)

بالعكس أي أنه

$((A \wedge B) \Rightarrow C) = 0$

بالتالي $(A \wedge B) = 1 \Rightarrow A = B = 1$

$C = 0$

نعوض في الطرف الآخر

$((1 \Rightarrow 0) \vee (1 \Rightarrow 0))$

$(0 \vee 0) = 0$

بالتالي $0 \iff 0$

هذا تكافئ $= 1$

أي صحيحة

ملاحظة: كل سلسلة معارف تقابل شجرة هي صيغة

$\alpha = (p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q))$

ثم اكتب هذه الصيغة بدلالة (⇒)

الحل:

$\alpha = (p \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

برهنة: من أجل جمع الصيغ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ وبمتغيرات قضوية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ المختلفة مثنى مثنى، فإن الطالبة F استدلال عندئذ الصيغة

استدلال: $F_{G_1/A_1, G_2/A_2, \ldots, G_n/A_n}$

برهنة: كما في المثال السابق

برهنة: F صيغة و G صيغة جزئية من F، والصيغة H مكافئة منطقياً لـ G، عندئذ الصيغة F' التي نحصل عليها من F بتعويض H بدلاً من الصيغة الجزئية G تكون مكافئة منطقياً لـ F

تمارين (محاضرة + دورات)

تمرين 11):

نفرض $(p \Rightarrow q)$ خاطئة

اهتم الصيغة، المتغيرة للصيغة:

* $((q \wedge p) \Rightarrow (q \vee \sim p))$

الحل:

$(p \Rightarrow q)$ خاطئة

بالتالي $(p \Rightarrow q) = 0$

أي أنه $p = 1$ و $q = 0$

الآن نعوض في *

$((0 \wedge 1) \Rightarrow (0 \vee 0))$

$(0 \Rightarrow 0) = 1$

أي أنه الصيغة صحيحة 1

أي أنه العلاقة صحيحة وهكذا نكون (الاستدلال)

Subject:

تمرين (1):

ناقش صحة العقول التالي:

$(\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B))$

هل هي استدلال أم لا ؟

الحل:

الطريقة الأولى: لبرهنة أن استدلال نقوم بما يلي

نختار الحالة الخاطئة أي نفرض جدلا أن الصيغة صادقة (أنه الصيغة خاطئة)

بإذا حصلنا على تناقض خلال الحل، تكون القضية صحيحة وإلا فهي خاطئة

نعود للحل:

نفرض أنه

$(\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) = 0$

أي أنه $0 = 1 \Rightarrow 0$

بالتالي $\neg A = 1 \Rightarrow \boxed{A = 0}$

كما أنه $(A \Rightarrow B) = 0$

أي أنه $\boxed{A = 1}$ $\boxed{B = 0}$

وهنا نلاحظ أنه

$A = 1 = 0$

وهذا خاطئ منطقيا

بالتالي الصيغة صحيحة

أي أنه استدلال.

تمرين (2):

ناقش صحة العقول التالي:

$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$

هل هي استدلال أم لا

الحل:

توضيح هام: ؟!

لحل السؤال السابق أو ما شابهه ويحوي على دالة الربط ($\Leftrightarrow$) نقوم بما يلي:

1. نفرض جدلا أنه العلاقة خاطئة وبالتالي فإن تحتمل واحدة من

أما $1 \Leftrightarrow 0$

أو $0 \Leftrightarrow 1$

2. نختار إحدى الحالتين السابقة ونعوض في العلاقة

3. فإذا لم نجد تناقض مع الفرض الجدلي، بالتالي يكون الفرض صحيح وهي ليست استدلال

وإذا حصلنا على تناقض مع الفرض الجدلي نأخذ الحالة الثانية ونعوض

فإذا لم نجد تناقض يكون الفرض صحيح وبالتالي الخطأ موجود أي أنه ليست استدلال

وإذا وجدنا تناقض فهي استدلال.

Subject: / /

الحل: نفرض جدلاً أن صائبة

ولنأخذ الوجهة $1 \Leftarrow 0$

من الطرف الأول

$(\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = 0$

*) $(A \Rightarrow B) = 0$
$(B \Rightarrow A) = 1$

نختار $(A \Rightarrow B) = 0$

$A = 1 \quad B = 0$

**) $(A \Rightarrow B) = 1$
$(B \Rightarrow A) = 0$

نختار $(B \Rightarrow A) = 0$

$B = 1 \quad A = 0$

إذاً لدينا حالتين

*) $A = 1 \quad B = 0$

**) $A = 0 \quad B = 1$

الطرف الثاني (نفرض ونثبت)

⊛

حسب الفرض $(\sim A \Rightarrow \sim B) = 1$

نفرض $(0 \Rightarrow 1) = 1$

نعم * الفرض محقق

بالتالي يوجد إمكانية لوجود خطأ

وبالتالي ليست استدلال صحيحة

* والتي كان نحاول نكمل كونه الخطأ محقق.

ملاحظة:

لدينا تكافؤاً

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$

إذاً بناءً على التكافؤ السابق والحل المنطقي نستطيع أنه وبوضوح وبسهولة أنه العلاقة السابقة هي بالمثال ليست استدلال.

تمرين (٤) / دورة تكميلية 2012/

اكتب الصيغة:

$\neg((\neg B \Rightarrow \neg A) \vee ((A \wedge B) \Leftrightarrow A))$

١) اكتب الصيغة السابقة بدلالة $(\neg, \Rightarrow)$

٢) اكتبها بدلالة $(\vee, \Leftrightarrow)$

الحل:

---

* سيتم حل التمارين في المحاضرة.

هام:

لم تتم كتابة المحاضرات الدورتين الثانية والثالثة والرابعة

اشتريوها

1+2+3+4

يفضل شراء المحاضرات من (ميمو زين) لأن الدقة من كل العلوم.