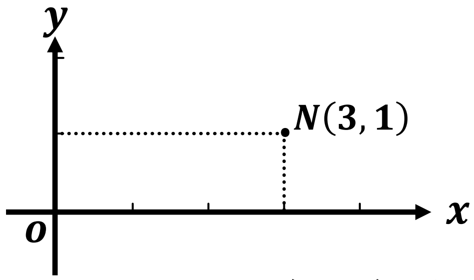
## مراجعة و أساسيات في الهندسة التحليلية

في مستو محدث بمعلم متجانس ليكن لدينا النقطة $N$ :




ندعو :

$x_N = 3$ : فاصلة النقطة $N$

$y_N = 1$ : تريب النقطة $N$ حيث أنّ :

✓ المحور $ox$ هو محور الفواصل .

✓ والمحور $oy$ هو محور التراتيب .

### المسألة الأولى :

في مستو محدث بمعلم متجانس لدينا النقاط ألآتية :

$A(-3\,,2)$ ، $B(5\,,-1)$ ، $C(5\,,2)$ والمطلوب :

1) احسب طول $AB$

" أو طول القطعة المستقيمة $[AB]$ "

البعد بين $A$ و $B$ يُعطى بالدستور :

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

ومنه :

$$AB = \sqrt{(-3-5)^2 + (2+1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-8)^2 + (3)^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$$

2) احسب طول $BC$ ( حالة خاصة )

عندما $x_B = x_C$ يكون : $BC = |y_B - y_C|$

أي $BC = |-1-2| = 3$

3) احسب طول $AC$ ( حالة خاصة )

عندما $y_A = y_C$ يكون : $AC = |x_A - x_C|$

أي $AC = |-3-5| = 8$

### المسألة الثانية :

في مستو محدث بمعلم متجانس ليكن لدينا :

$N(5,-2)$ ، $C(3,-1)$ والمطلوب :

1) اكتب معادلة المستقيم $d_1$ المار من $N(5,-2)$ والذي ميله $m = -4$

دستور :

إن معادلة مستقيم يمر بنقطة $N(x,y)$ وميله $(m)$ معلوم هي :

$\boxed{y - y_N = m(x - x_N)}$ نعوض :

$$y + 2 = -4(x-5)$$

$$y + 2 = -4x + 20$$

$$d_1 : 4x + y - 18 = 0$$

2) اكتب معادلة المستقيم $d_2$ المار من مبدأ الإحداثيات $O(0\,,0)$ والذي ميله $m = 3$ .

إنّ معادلة كل مستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات وميله معلوم هي من الشكل : $\boxed{y = mx}$

وبالتالي : $d_2 : y = 3x$

3) أوجد ميل المستقيم $d_3$ المار بالنقطتين $N(5,-2)$ ، $C(3,-1)$ ثم اكتب معادلته .

الحل :

إن ميل مستقيم يمر بنقطتين : $\boxed{m_{NC} = \dfrac{y_N - y_C}{x_N - x_C}}$

نعوض :

$$m_{NC} = \frac{-2+1}{5-3} = \frac{-1}{2}$$

نعوض $m = \frac{-1}{2}$ و $C(3,-1)$ أو $[N(5,-2)]$

في المعادلة : $y - y_C = m(x - x_C)$ فنجد :

$y + 1 = \frac{-1}{2}(\ x - 3)$ ومنه :

$$d_3 : x + 2y - 1 = o$$

## المسألة الثالثة :

في مستو محدث بمعلم متجانس ليكن لدينا :

النقطة $N(3\,,-1)$

والمستقيم : $d: 2x - 3y - 6 = 0$ والمطلوب :

**1)** أوجد ميل المستقيم $d$ .

الحل :

نلاحظ أن كلاً من $x$ و $y$ في طرف واحد لذا فإن :

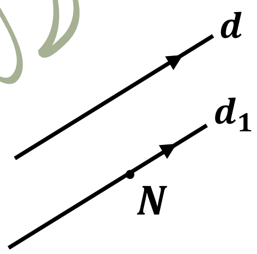
$$m_d = \frac{-(\text{أمثال } x)}{(\text{أمثال } y)} = \frac{-(2)}{-3} = \frac{2}{3}$$

ملاحظة :

لو كان $x$ في طرف و $y$ في الطرف الآخر لكان :

$$m_d = \frac{(\text{أمثال } x)}{(\text{أمثال } y)}$$

**2)** أوجد معادلة المستقيم $d_1$ المار من $N(3\,,-1)$ والموازي للمستقيم $d$ .



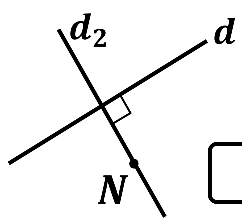

قاعدة

$$\boxed{m_1 = m \Leftrightarrow d_1 // d}$$

وبالتالي : $m_{d_1} = m_d = \frac{2}{3}$

ومعادلة $d_1$ : $y + 1 = \frac{2}{3}(x - 3)$

**3)** أوجد معادلة المستقيم $d_2$ المار من $N(3\,,-1)$ والعمودي على المستقيم $d$ .




قاعدة

$$\boxed{m_2 . m = -1 \Leftrightarrow d_2 \perp d}$$

وبما أنّ ميل $m_d = \frac{2}{3}$ فإنّ : $m_{d_2} = \frac{-3}{2}$

ومعادلة $d_2$ : $y + 1 = \frac{-3}{2}(x - 3)$

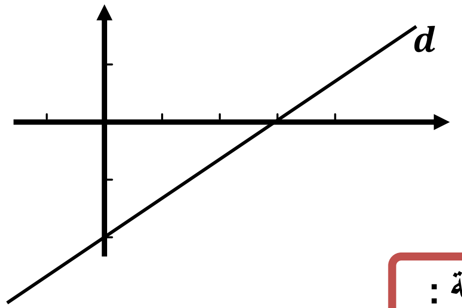
**4)** ارسم المستقيم $d$ .

لرسم مستقيم يلزمني تعيين نقطتين (اختياريتين ) منه :

$$d: 2x - 3y - 6 = 0$$

عندما $x = 0$ نجد $y = -2$ ومنه : $(0,-2) \in d$

عندما $y = 0$ نجد $x = +3$ ومنه : $(+3,0) \in d$




## المسألة الرابعة :

في مستو محدث بمعلم متجانس ليكن لدينا :

$A(-2,-1)$ ، $B(3,0)$

والمستقيم : $\Delta: x - 7y - 3 = 0$ والمطلوب :

**1)** أوجد بعد النقطة $A$ عن المستقيم $\Delta$ " $d(A,\Delta)$ "

إن بعد نقطة عن مستقيم $\Delta: ax + by + c = 0$

يُعطى بالدستور :

$$d(A,\Delta) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نعوض :

$$d(A,\Delta) = \frac{|(1)(-2) + (-7)(-1) - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (-7)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{50}}$$

$$d(A,\Delta) = \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

**2)** أوجد بعد النقطة $B$ عن المستقيم $\Delta$

$$d(B,\Delta) = \frac{|(1)(3) + (-7)(0) - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (-7)^2}} = \frac{0}{\sqrt{50}} = 0$$

وبالتالي نستنتج أنّ : $B \in \Delta$

﴿بسم الله الرحمن الرحيم﴾

سندرس أبحاث القطوع المخروطية : القطع المكافئ ، القطع الناقص ، القطع الزائد ، بشكل مبسط وكل فقرة تتم دراستها هنا راجع الكتاب وادرس مالها من أمثلة محلولة وتدريبات غير محلولة وأسئلة نظرية فالكتاب هو الأصل. فعليك بالقلم والورقة وإتقان الفقرة بشكل ممتاز ثم الانتقال إلى التالية والله وليّ التوفيق.

## البحث الأول

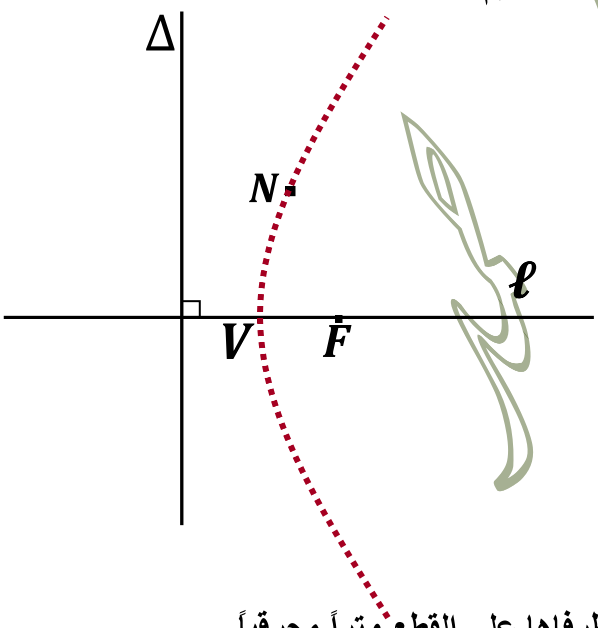
# القطع المكافئ

### تعريف القطع المكافئ :

ليكن $\Delta$ مستقيماً ما في المستوي ، ولتكن F نقطة لا تنتمي إلى $\Delta$ حيث $(F \notin \Delta)$ .

نسمي قطعاً مكافئاً محرقه F ودليله $\Delta$ ،

مجموعة نقاط المستوي التي تبعد عن F مسافة تساوي بعدها عن المستقيم $\Delta$ .




### مسميات:

- نرمز للقطع المكافئ بالرمز $\mathcal{P}$
- ونقول أن : $NF = d(N, \Delta) \Leftrightarrow N \in \mathcal{P}$
- ندعو $F$ محرق القطع المكافئ
- ندعو $V$ ذروة القطع المكافئ
- ندعو $\ell$ محور تناظر القطع المكافئ (محور القطع )
- نسمي كل قطعة مستقيمة تمر بمحرق القطع المكافئ ويقع طرفاها على القطع وتراً محرقياً.

### الوتر المحرقي الأساسي :

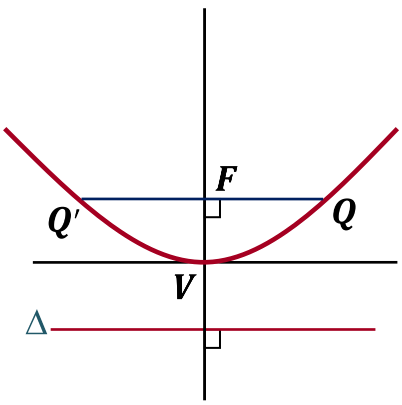
- هو الوتر المحرقي الذي يوازي الدليل .

ويقع المحرق $F$ في منتصفه . وطوله : $Q'Q = 4|P|$

في الشكل المجاور الوتر المحرقي الأساسي هو $[Q'Q]$

- ونسمي النقطتين $Q', Q$ طرفا الوتر المحرقي الأساسي .

وهما تفيدان في رسم القطع المكافئ كما سيمر معنا لاحقاً.





دمشق : 0988253189
Email: Mazen.Math@Gmail.Com

## معادلة القطع المكافئ الذي ذروته $O(0,0)$

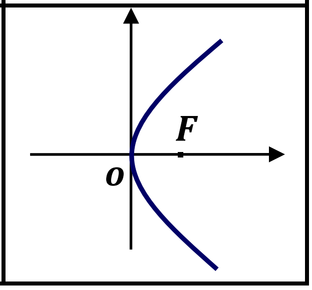
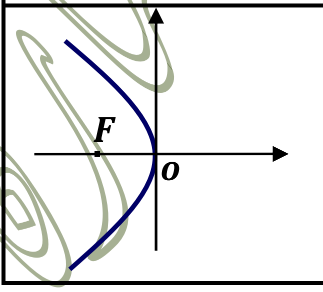
### أولاً

- ذروته $O(0,0)$ ومحوره التناظري $ox$
- شكل المعادلة : $y^2 = 4Px$

**أمثلة :**

$y^2 = 8x$ ، $y^2 = -2x$ ، $2y^2 - 5x = 0$

- المحرق : $F(P,0)$
- معادلة الدليل : $\Delta : x = -P$
- ولمعرفة جهة الفتحة نميز حالتين

| عندما $P > 0$ تكون الفتحة نحو $ox^+$ | عندما $P < 0$ تكون الفتحة نحو $ox^-$ |
|---|---|
|  |  |

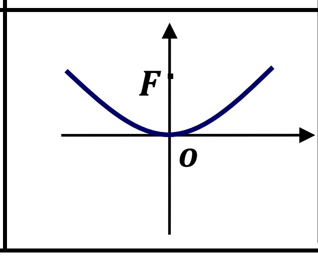
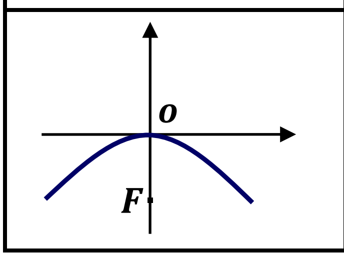
### ثانياً

- ذروته $O(0,0)$ ومحوره التناظري $oy$
- شكل المعادلة : $x^2 = 4Py$

**أمثلة :**

$x^2 = 6y$ ، $x^2 = -9y$ ، $x^2 - 10y = 0$

- المحرق : $F(0\,,P)$
- معادلة الدليل : $\Delta : y = -P$
- ولمعرفة جهة الفتحة نميز حالتين

| عندما $P > 0$ تكون الفتحة نحو $oy^+$ | عندما $P < 0$ تكون الفتحة نحو $oy^-$ |
|---|---|
|  |  |

## معادلة القطع المكافئ الذي ذروته ليست $O(0,0)$

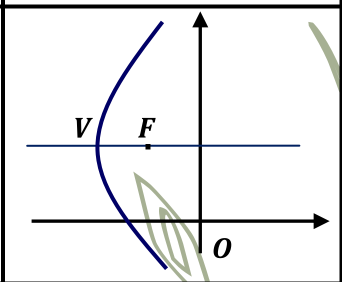
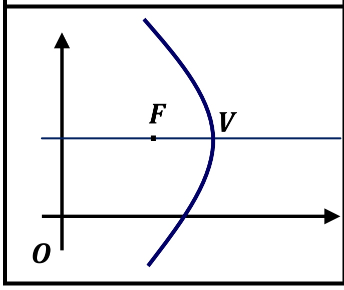
### أولاً

- ذروته $V(x_0, y_0)$ ومحوره التناظري يوازي المحور $ox$
- شكل المعادلة : $(y - y_0)^2 = 4P(x - x_0)$

**أمثلة :**

$(y-2)^2 = 6(x+3)$ ، $(y+4)^2 = -2x$

- المحرق : $F(x_0 + P, y_0)$
- معادلة الدليل : $\Delta : x = x_0 - P$
- ولمعرفة جهة الفتحة نميز حالتين

| عندما $P > 0$ تكون الفتحة نحو $ox^+$ | عندما $P < 0$ تكون الفتحة نحو $ox^-$ |
|---|---|
|  |  |

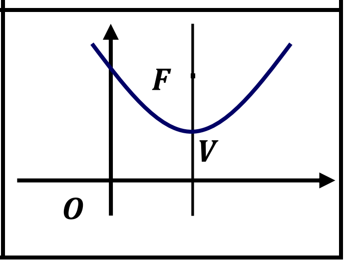
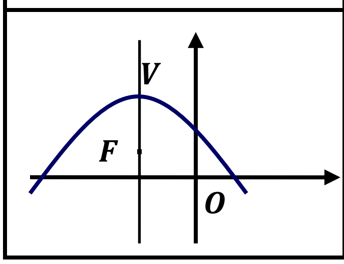
### ثانياً

- ذروته $V(x_0, y_0)$ ومحوره التناظري يوازي المحور $oy$
- شكل المعادلة : $(x - x_0)^2 = 4P(y - y_0)$

**أمثلة :**

$(x+1)^2 = -6(y+3)$ ، $x^2 = (y-5)$

- المحرق : $F(x_0\,, y_0 + P)$
- معادلة الدليل : $\Delta : y = y_0 - P$
- ولمعرفة جهة الفتحة نميز حالتين

| عندما $P > 0$ تكون الفتحة نحو $oy^+$ | عندما $P < 0$ تكون الفتحة نحو $oy^-$ |
|---|---|
|  |  |

## ملاحظات عند حل مسائل القطع المكافئ

**1** ماذا يلزمني لكتابة معادلة القطع المكافئ ؟؟؟

- وضعية محور التناظر : يوازي $x'x$ أم يوازي $y'y$
- الذروة $V(x_0, y_0)$
- قيمة $4P$

**2** محور تناظر القطع عمودي على الدليل

على سبيل المثال :

- إذا كان $\Delta: y = -1 \Longleftarrow$ محور تناظر القطع يوازي $Oy$
- إذا كان $\Delta: x = 2 \Longleftarrow$ محور تناظر القطع يوازي $Ox$

وبشكل مبسط نقول : محور تناظر القطع يوازي الحرف الموجود في معادلة الدليل .

**3**

عندما $x_0 = x_F \Leftrightarrow$ محور تناظر القطع يوازي $Oy$

عندما $y_0 = y_F \Leftrightarrow$ محور تناظر القطع يوازي $Ox$

**4**

| | عندما محور تناظر القطع $Ox$ // | عندما محور تناظر القطع $Oy$ // |
|---|---|---|
| معادلة المماس في الذروة | $x = x_0$ | $y = y_0$ |
| معادلة محور تناظره | $y = y_0$ | $x = x_0$ |
| طرفا الوتر المحرقي الأساسي | $(x_F, y_F + \|2p\|)$<br>$(x_F, y_F - \|2p\|)$ | $(x_F + \|2p\|, y_F)$<br>$(x_F - \|2p\|, y_F)$ |

**5** لرسم القطع المكافئ .....

نعين الذروة والمحرق وطرفي الوتر المحرقي الأساسي ثم نصل بين الذروة وطرفي الوتر المحرقي الأساسي.

## الطريقة العامة لإيجاد معادلة المماس لقطع مكافئ (ناقص ، زائد ) في نقطة معلومة منه $N(x , y)$

1) نوجد احداثيي نقطة التماس $N$ والتي غالباً ما تكون معلومة الفاصلة $x$ أو الترتيب $y$ على الأقل.

2) نشتق معادلة القطع مع التذكير بأنّ :

$$(y)' = y' \quad , \quad (3y)' = 3y' \quad , \quad (y^2)' = 2yy'$$

$$(5y^2)' = 10yy' \quad , \quad [(y-4)^2]' = 2(y-4)y'$$

3) نعوض $N(x , y)$ في المعادلة الناتجة عن الاشتقاق فنجد ميل المماس حيث : $m = y'_{(N)}$

4) نعوض قيمة الميل و $N(x , y)$ في المعادلة :

$y - y_N = m(x - x_N)$ وهي معادلة المماس المطلوبة.

**ملاحظة :**

في حالة $m = 0$ تكون معادلة المماس في $N$ : $y = y_N$

في حالة $m = \frac{0 \neq \text{عدد}}{0}$ تكون معادلة المماس في $N$ : $x = x_N$

## إيجاد معادلة مماس ميله معلوم لقطع مكافئ (ناقص ، زائد )

**توضيح :** المعلوم في هذه الحالة هو الميل $m = y' = \lambda$ والمجهول احداثيي نقطة التماس $K(?,?)$ مثلاً.

**عندئذ :**

1) نشتق معادلة القطع

2) نعوض $y' = \lambda$ في المعادلة الناتجة فنحصل على $x_K$ أو $y_K$ .

3) نعوض الاحداثي الناتج في معادلة القطع فنحصل على الآخر.

{ في حالة القطع الناقص أو الزائد نعوض $y' = \lambda$ في المعادلة الناتجة فنحصل على علاقة بين $x$ و $y$ نحلها حلاً مشتركاً مع معادلة القطع فنحصل على $x_K$ و $y_K$ }

4) نعوض $m = \lambda$ ، $K(x , y)$ في المعادلة :

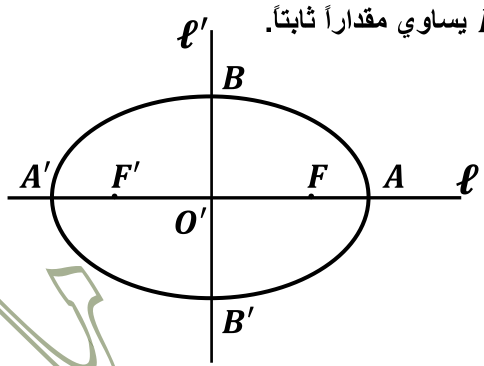
$y - y_K = m(x - x_K)$ وهي معادلة المماس المطلوبة.

## البحث الثاني

# القطع الناقص $(\varepsilon)$

### تعريف القطع الناقص :

لتكن $F,\ F'$ نقطتين في المستوي ، نسمي قطعاً ناقصاً محرقاه $F$ و $F'$ مجموعة جميع نقاط المستوي التي مجموع بعديها عن $F$ و $F'$ يساوي مقداراً ثابتاً.




### مسميات

- ❖ ندعو النقطتين الثابتتين $F, F'$ محرقي القطع الناقص.

والبعد بين المحرقين : $FF' = 2c$ وندعوه البعد المحرقي.

- ❖ ندعو المستقيم $\ell$ المار من $F$ و $F'$ المحور المحرقي

(المحور الأساسي)

- ❖ ندعو المستقيم $\ell'$ محور القطعة $[F\,F']$ المحور اللامحرقي

(المحور الثانوي)

- ❖ ندعو النقطة $(o')$ منتصف $[FF']$ مركز القطع الناقص.
- ❖ ندعو كلاً من $B', B, A', A$ ذرا القطع الناقص
- ❖ القطع الناقص متناظر بالنسبة لكل من

مركزه ، محوره المحرقي ، محوره اللامحرقي

- ❖ وسطاء القطع الناقص : $a\ ,b\ ,c$

(أعداد حقيقية موجبة تماماً )

ويكون :

$A'A = 2a$ و $o'A = o'A' = a$

$B'B = 2b$ و $o'B = o'B' = b$

$F'F = 2c$ و $o'F = o'F' = c$

## معادلات القطع الناقص

### أولاً : المعادلة القياسية لقطع ناقص مركزه في المبدأ

- ❖ مركز القطع : $O(0,0)$
- ❖ شكل المعادلة : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$
- ❖ الذرا : $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$

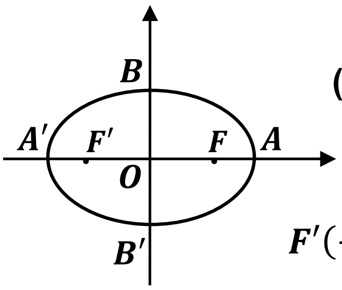
$B(0,b)$ ، $B'(0,-b)$

و بعدئذٍ نميز حالتين :

#### حالة $a > b$

- ❖ المحور المحرقي :

(منطبق على المحور $Ox$ )




- ❖ المحرقان :

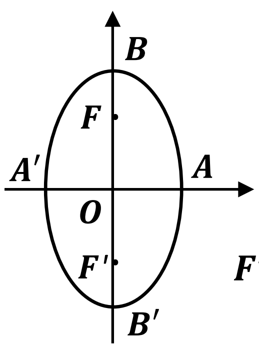
$F(c,0)$ ، $F'(-c,0)$

- ❖ $c^2 = a^2 - b^2$
- ❖ القطر الكبير : $A'A = 2a$
- ❖ القطر الصغير : $B'B = 2b$

#### حالة $b > a$

- ❖ المحور المحرقي :

(منطبق على المحور $Oy$ )




- ❖ المحرقان :

$F(0,c)$ ، $F'(0,-c)$

- ❖ $c^2 = b^2 - a^2$
- ❖ القطر الكبير : $B'B = 2b$
- ❖ القطر الصغير : $A'A = 2a$

## ثانياً :المعادلة القياسية لقطع ناقص مركزه ليس في المبدأ

❖ مركز القطع : $O'(x_0, y_0)$

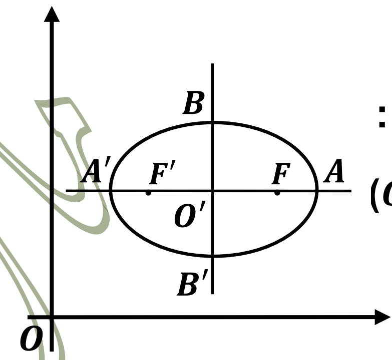
❖ شكل المعادلة : $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$

❖ الذرا : $A(x_0+a, y_0)$ ، $A'(x_0-a, y_0)$

$B(x_0, y_0+b)$ ، $B'(x_0, y_0-b)$

و بعدئذٍ نميز حالتين :

### حالة $a > b$




❖ المحور المحرقي :

(يوازي المحور $Ox$)

❖ المحرقان :

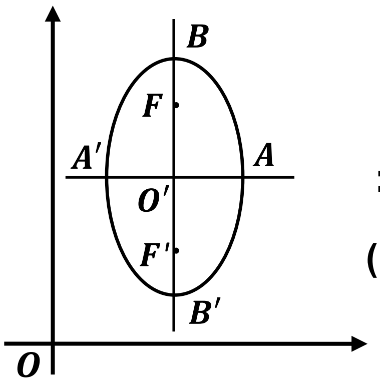
$F(x_0+c, y_0)$ ، $F'(x_0-c, y_0)$

❖ $c^2 = a^2 - b^2$

❖ القطر الكبير : $A'A = 2a$

القطر الصغير : $B'B = 2b$

### حالة $b > a$




❖ المحور المحرقي :

(يوازي المحور $Oy$)

❖ المحرقان :

$F(x_0, y_0+c)$ ، $F'(x_0, y_0-c)$

❖ $c^2 = b^2 - a^2$

❖ القطر الكبير : $B'B = 2b$

القطر الصغير : $A'A = 2a$

## فوائد وملاحظات هامة عند حل مسائل القطع الناقص

☺ ماذا يلزمني لكتابة معادلة قطع ناقص

1) تعيين مركز القطع

2) حساب $a$ , $b$

☺ $x_{F'} = x_0 = x_F \Leftrightarrow$ المحور المحرقي يوازي $Oy$

$y_{F'} = y_0 = y_F \Leftrightarrow$ المحور المحرقي يوازي $Ox$

☺ ما الفوائد من معرفة $F$ , $F'$ :

1) تعيين مركز القطع حيث :

$$O'\left(\frac{x_F + x_{F'}}{2} \quad , \quad \frac{y_F + y_{F'}}{2}\right)$$

2) تحديد وضعية المحور المحرقي

( فهو يوازي الإحداثي المتغير بينهما )

<u>مثال</u>

بفرض $F(2, 5)$ و $F'(2, -3)$

بما أنّ $x_F = x_{F'} = 2$

فالمحور المحرقي يوازي المحور $Oy$

3) حساب $c$ حيث : $F'F = 2c$

أو $o'F = o'F' = c$

☺ إذا كانت $N$ نقطة من قطع ناقص عندئذ :

$NF + NF' = 2a$ في حالة $a > b$

$NF + NF' = 2b$ في حالة $b > a$

😊 ما الفوائد من معرفة $A$ , $A'$ :

1) تعيين مركز القطع حيث :

$$O'\left(\frac{x_A + x_{A'}}{2} \quad , \quad \frac{y_A + y_{A'}}{2}\right)$$

2) حساب $a$ حيث : $\left\{ \begin{array}{l} A'A = 2a \\ o'A = o'A' = a \end{array} \right.$ أو

❖ الذروتان $A , A'$ تقعان دائماً على مستقيم أفقي


😊 ما الفوائد من معرفة $B$ , $B'$ :

1) تعيين مركز القطع حيث :

$$O'\left(\frac{x_B + x_{B'}}{2} \quad , \quad \frac{y_B + y_{B'}}{2}\right)$$

2) حساب $b$ حيث : $\left\{ \begin{array}{l} B'B = 2b \\ o'B = o'B' = b \end{array} \right.$ أو

❖ الذروتان $B , B'$ تقعان دائماً على مستقيم شاقولي


😊 في المعادلة التالية

$$n(x - x_0)^2 + k(y - y_0)^2 = \lambda$$

حيث $n > 0$ , $k > 0$ , $n \neq k$

✓ نميز الحالات الثلاث :

$\lambda > 0$ فالمعادلة تمثل قطع ناقص مركزه $(x_0, y_0)$

$\lambda = 0$ فالمعادلة تمثل نقطة وحيدة $(x_0, y_0)$

$\lambda < 0$ فالمعادلة تمثل مجموعة خالية.

## مماس القطع الناقص

### ميل المماس

إن ميل المماس لقطع ناقص مركزه $O'(x_0, y_0)$ في نقطة منه معلومة مثل $N(x, y)$

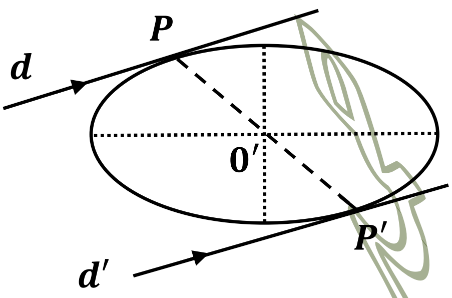
يُعطى بالعلاقة :

$$m = \frac{-b^2}{a^2} \cdot \frac{x_N - x_0}{y_N - y_0}$$

أو نحصل على الميل عن طريق الاشتقاق كما أوضحنا سابقاً

في القطع المكافئ حيث $m = y'_{(N)}$

### المماس الموازي




ليكن $d$ مماس معلوم لقطع ناقص في نقطة معلومة منه مثل $P(x, y)$

لإيجاد معادلة $d'$ المماس للقطع الناقص الموازي للمماس $d$

نفرض أن نقطة تماس المماس $d'$ هي $P'(x, y)$ عندئذ :

❖ $m_{d'} = m_d$ ( لأن $d'$ يوازي $d$ )

❖ $\left\{ \begin{array}{l} x_{P'} = 2x_0 - x_P \\ y_{P'} = 2y_0 - y_P \end{array} \right.$ ( لأن $P'$ نظيرة $P$ بالنسبة لـ $O'$ )

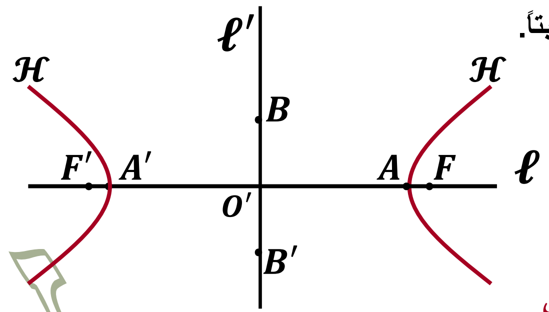
وتكون معادلة $d'$ هي : $y - y_{P'} = m(x - x_{P'})$

# البحث الثالث

# القطع الزائد $(\mathcal{H})$

## تعريف القطع الزائد :

لتكن $F'$ و $F$ نقطتين في المستوي ، نسمي قطعاً زائداً محرقاه $F'$ و $F$ مجموعة جميع نقاط المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعديها عن $F'$ و $F$ تساوي مقداراً موجباً ثابتاً.




## مسميات

❖ ندعو النقطتين الثابتتين $F, F'$ محرقي القطع الزائد. والبعد بين المحرقين : $FF' = 2c$ وندعوه البعد المحرقي.

❖ ندعو المستقيم $\ell$ المار من $F'$ و $F$ المحور المحرقي (المحور الأساسي)

❖ ندعو المستقيم $\ell'$ محور القطعة $[F\,F']$ المحور اللامحرقي (المحور الثانوي)

❖ ندعو النقطة ( $o'$ ) منتصف $[FF']$ مركز القطع الزائد.

❖ القطع الزائد متناظر بالنسبة لكل من مركزه ، محوره المحرقي ، محوره اللامحرقي

❖ وسطاء القطع الزائد : $a , b , c$ (أعداد حقيقية موجبة تماماً)

ويكون :

$A'A = 2a$ و $o'A = o'A' = a$

$B'B = 2b$ و $o'B = o'B' = b$

$F'F = 2c$ و $o'F = o'F' = c$

❖ في القطع الزائد دائما يكون : $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

## معادلات القطع الزائد

### أولاً : المعادلة القياسية لقطع زائد مركزه في المبدأ

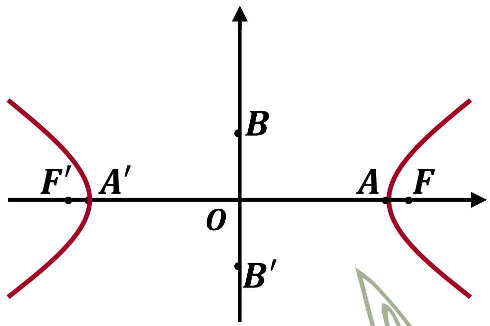
**1** المركز $O(0,0)$ والمحور المحرقي منطبق على المحور $ox$

❖ شكل المعادلة : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

❖ الذروتان : $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$

❖ الذروتان المرافقتان $B(0,b)$ ، $B'(0,-b)$

❖ المحرقان : $F(c,0)$ ، $F'(-c,0)$



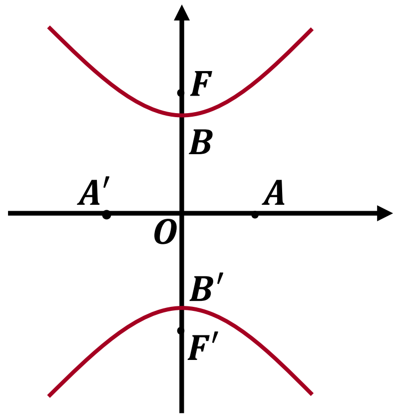

**2** المركز $O(0,0)$ والمحور المحرقي منطبق على المحور $oy$

❖ شكل المعادلة : $\boxed{\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1}$

❖ الذروتان : $B(0,b)$ ، $B'(0,-b)$

❖ الذروتان المرافقتان $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$

❖ المحرقان : $F(0,c)$ ، $F'(0,-c)$




❖ وعندما يكون المركز $O(0,0)$ فإنّ : للقطع الزائد مستقيمان مقاربان معادلتهما :

$$\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x \quad , \quad \Delta_2 : y = \frac{-b}{a}x$$

## ثانياً :المعادلة القياسية لقطع زائد مركزه ليس في المبدأ

**1** مركز القطع : $O'(x_0, y_0)$

❖ المحور المحرقي : ( يوازي المحور $Ox$)

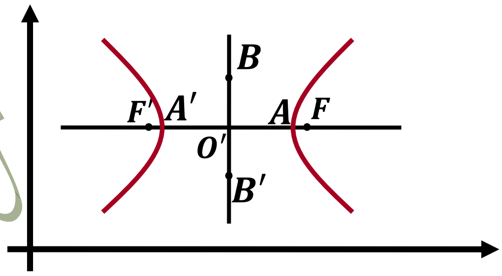
❖ شكل المعادلة :
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

❖ الذروتان : $A(x_0+a, y_0)$ ، $A'(x_0-a, y_0)$

❖ الذروتان المرافقتان :

$B(x_0, y_0+b)$ ، $B'(x_0, y_0-b)$

❖ المحرقان : $F(x_0+c, y_0)$ ، $F'(x_0-c, y_0)$




**2** مركز القطع : $O'(x_0, y_0)$

❖ المحور المحرقي : ( يوازي المحور $Oy$)

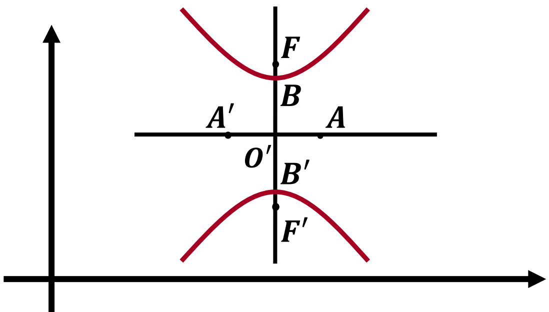
❖ شكل المعادلة :
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$$

❖ الذروتان : $B(x_0, y_0+b)$ ، $B'(x_0, y_0-b)$

❖ الذروتان المرافقتان :

$A(x_0+a, y_0)$ ، $A'(x_0-a, y_0)$

❖ المحرقان : $F(x_0, y_0+c)$ ، $F'(x_0, y_0-c)$




❖ وعندما يكون المركز $O'(x_0, y_0)$ فإنّ :

للقطع الزائد مستقيمين مقاربين معادلتهما :

$$\Delta_1 : y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0) \ , \ \Delta_2 : y-y_0=\frac{-b}{a}(x-x_0)$$

## فوائد وملاحظات هامة عند حل مسائل القطع الزائد

**ماذا يلزمني لكتابة معادلة قطع زائد ؟؟؟؟**

1) تعيين وضعية المحور المحرقي.

2) تعيين مركز القطع.

3) حساب $a$ , $b$

❖ إذا كانت $A$ أو $A'$ ذروة فالمحور المحرقي يوازي $Ox$

❖ إذا كانت $B$ أو $B'$ ذروة فالمحور المحرقي يوازي $Oy$

❖ أما الفوائد من معرفة $F$ و $F'$ ، $A$ و $A'$ ، $B$ و $B'$

فهي كما في القطع الناقص.

## ما الفائدة من معرفة معادلة مقارب أو معادلتي المقاربين ؟

➕ من مقارب واحد فائدة واحدة ....

وهي إيجاد علاقة بين $a$ و $b$ حيث أنّ:

ميل المقارب : $|m_\Delta|=\frac{b}{a}$ مثال :

<u>لدينا المقارب</u>

$\Delta : 4x+3y-1=0$ ومنه :

$$|m_\Delta|=\left|\frac{-4}{3}\right|=\frac{4}{3}=\frac{b}{a}\Longrightarrow b=\frac{4a}{3}$$

➕ من مقاربين فائدتين ....

1) تعيين مركز القطع فهو نقطة تقاطع المقاربين

2) إيجاد علاقة بين $a$ و $b$ كما سبق. مثال :

<u>قطع زائد مقارباه</u> :

1) $\Delta_1 : 2y-3x+14=0$

2) $\Delta_2 : 2y+3x-10=0$

✓ بجمع 1) مع 2) نجد :

$4y=-4$ ومنه : $y_0=-1$

نعوض في 1) فنجد :

$x_0=4$ ومنه : $O'(4,-1)$

✓ وكما في الفائدة الأولى :

$$|m_\Delta|=\left|\frac{-3}{2}\right|=\frac{3}{2}=\frac{b}{a}\Longrightarrow b=\frac{3a}{2}$$

# مماس القطع الزائد

## ميل المماس

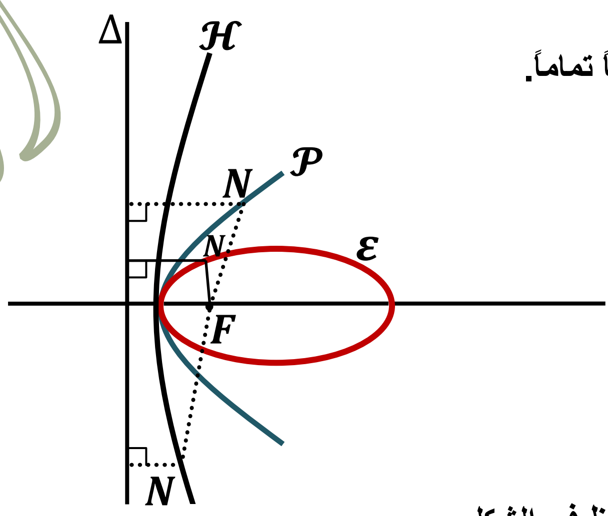
إن ميل المماس لقطع زائد مركزه $O'(x_0,y_0)$ في نقطة منه معلومة مثل $N(x,y)$ يُعطى بالعلاقة :

$$m=\frac{+b^2}{a^2}\cdot\frac{x_N-x_0}{y_N-y_0}$$

أو نحصل على الميل عن طريق الاشتقاق كما أوضحنا سابقاً في القطع المكافئ حيث : $m=y'_{(N)}$

## التعريف المشترك للقطوع

ليكن لدينا المستقيم $\Delta$ والنقطة $F$ وليكن $(e)$ عدداً موجباً تماماً.




ونلاحظ في الشكل

$\frac{NF}{d(N,\Delta)}=e=1 \Leftrightarrow N\in\mathcal{P}$ (مكافئ)

$\frac{NF}{d(N,\Delta)}=e<1 \Leftrightarrow N\in\mathcal{E}$ (ناقص)

$\frac{NF}{d(N,\Delta)}=e>1 \Leftrightarrow N\in\mathcal{H}$ ( زائد )

❖ نسمي العدد $(e)$ التباعد المركزي للقطع

❖ وفي القطع الناقص والزائد التباعد المركزي يساوي : $\frac{\text{طول البعد المحرقي}}{\text{طول القطر الرئيسي}}$ أي عندما :

- المحور المحرقي $Ox\ //$ يكون : $e=\frac{c}{a}$
- المحور المحرقي $Oy\ //$ يكون : $e=\frac{c}{b}$

**ما الفائدة من معرفة نسبة التباعد المركزي ؟؟؟؟**

1) معرفة نوع القطع .

2) ايجاد علاقة بين $a$ و $c$ كما في المثال الآتي :

❖ قطع فيه $e=\frac{3}{2}$ ومحوره المحرقي يوازي محور الفواصل ماذا تستنتج ؟؟؟؟؟

1) بما أن $e=\frac{3}{2}>1$ فالقطع زائد.

وبما أنّ المحور المحرقي يوازي المحور $ox$ فإنّ :

2) $e=\frac{3}{2}=\frac{c}{a}$ ومنه : $c=\frac{3a}{2}$

## حالة خاصة في بعد نقطة عن مستقيم

ليكن لدينا النقطة $P(x,y)$ والمستقيمان

$$\Delta_1: x=\lambda_1$$
$$\Delta_2: y=\lambda_2$$

عندئذ :

$$d(P,\Delta_1)=|x-\lambda_1|$$
$$d(P,\Delta_2)=|y-\lambda_2|$$

**ملاحظة :**

- في القطع الزائد من الممكن أن نجد : $a=b$ وفي هذه الحالة نقول عن القطع أنه قطع زائد متساوي الساقين.
- وأيضاً كل معادلة من الشكل $x.y=\lambda\neq 0$ هي معادلة قطع زائد متساوي الساقين منسوب لمقاربيه.