الدكتور
خضر حامد الأحمد
أستاذ في كلية العلوم
جامعة دمشق

التحليل «٤»

١٤٠٢ ـ ١٤٠٣ هـ
١٩٨٢ ـ ١٩٨٣ م

مطبعة رياض ـ دمشق

بسم الله الرحمن الرحيم

تصدير

يتألف الكتاب من خمسة فصول . أما الفصل الاول فيتناول طبولوجيا الفضاءات الاقليدية $\mathbb{R}^n$. وعلى وجه التحديد ، تعرف هذه الفضاءات ، وتعالج فيها المتتاليات المتقاربة ، والمجموعات المتراصة والمجموعات المترابطة . ثم تدرس النهايات والاستمرار للدوال الحقيقية على هذه الفضاءات .

وأما الفصل الثاني ، فانه مكرس لدراسة الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية على الفضاءات الاقليدية . وتعرف في هذا الفصل المشتقات الجزئية لهذه الدوال والمشتقات الاتجاهية لها ، وتفاضلاتها (أي مشتقات فريشيه) . ونورد في هذا الصدد أهم النظريات المتعلقة بهذه المواضيع ، وبخواص الدوال القابلة للاشتقاق. ونود أن ننوه في هذا المقام الى أن الخلاف بين أنصار البدء بدوال لمتغيرين فقط ، وأنصار البدء بالدوال لعدة متغيرات ، هو خلاف على الكم دون الكيف . ومع الاقرار بأن الطالب (بل والمدرس أحيانا !) يستسيغ معالجة الدوال لمتغيرين ، الا أنني أرى أنه في كثير من الحالات تكون المعالجة واحدة تقريبا ، حتى من الناحية الكمية . ولهذا الغرض ارتأيت المعالجة العامة أحيانا ، عندما لايشكل حجم العمليات عبئا على الطالب ووقته ، ومعالجة الدوال لمتغيرين فقط أحيانا

أخرى ، عندما تكون الحالة العامة مرهقة للطالب .

وقد أفردنا الفصل الثالث لدراسة أهم التطبيقات المألوفة للحساب التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات . وعلى وجه التحديد فقد درسنا نظرية القيمة الوسطى ، ونظرية تايلور، ونظرية القيم العظمى والصغرى لدالة .

وفي حين تناولنا في الفصلين الثاني والثالث معالجة الدوال الحقيقية لعدة متغيرات ، فاننا قصرنا الفصل الرابع على معالجة سريعة للحساب التفاضلي للدوال المتجهة لعدة متغيرات .
وقد عرفنا هنا تفاضل الدالة المتجهة على أنه تحويل خطي ، وافترضنا الطالب ملما بأسس نظرية التحويلات الخطية ونظرية المصفوفات . وقد أوردنا في خاتمة هذا الفصل نظرية الدوال العكسية .

وأما الفصل الخامس والأخير ، فيبحث باختصار في نظرية التكاملات المضاعفة . وقد انطلقنا هنا من تعريف هذه التكاملات على مستطيلات ، ومن ثم انتقلنا الى مجموعات أعم ، ليست مستطيلات بالضرورة . ونتيجة لتجربتي في تدريس هذا الموضوع ، فقد وجدت أن البدء بتدريس التكامل المضاعف لدالة لأكثر من متغيرين ، أمر يصعب على الطلاب تقبله ، لذا بدأت بمعالجة التكاملات الثنائية . ومرة

أخرى نقول بأن عملية الانتقال من هذه التكاملات الى التكاملات المضاعفة العامة ، هي ذات طبيعة كمية وليست نوعية . وقد اقتصرنا هنا على معالجة التكامل المضاعف لدالة ، مجموعة نقاط انقطاعها تشكل مجموعة جزئية صفرية السعة من ساحة الدالة . وتجدر بنا الاشارة في هذا الصدد الى أننا أوردنا نظرية تحويل المتغير في التكاملات المضاعفة دون برهان لصعوبته. كذلك ، فاننا لم نتعرض لبحث التكاملات الخطية ، والتكاملات السطحية ، ونظرية التغرق ، ونظريتي غرين وستوكس . ويعود السبب في هذا الى أن المعالجة (غير الدقيقة) لهذه المواضيع غالبا ماترد في مقرر التحليل المتجهي . كذلك ، فثمة شبه اجماع في الرأي لدى السادة الزملاء ، يتلخص في أن الثمن الذي على الطلاب في هذه المرحلة أن يدفعوه مقابل الدقة الصارمة في عرض هذه المواضيع ، أعلى بكثير من الفائدة التي قد يجنونها من دراستهم اها.لذا قررت تأجيل التصدي لهذه المواضيع الى مرحلة لاحقة .

وعند سردي لمواضيع الكتاب ، فقد جهدت في اختيار براهين مبسطة وواضحة للنظريات المدرجة ، دون أن يكون هذا التبسيط على حساب صرامة الدقة النظرية لهذه البراهين . ولا يضيرني أن أقول

بأنني تعمدت حذف بعض البراهين ، بقصد اشراك الطلاب في عملية البرهان ، التي تتطلب منهم أحيانا القيام ببعض الجهد ، مستعينين تارة بمراجع أخرى ، أو بارشادات أساتذتهم تارة أخرى. ومن المعروف أن طول وصعوبة البرهان قد تولد لدى الطالب في هذه المرحلة نوعا من الاحباط الذي ينفره من النظرية قيد الاثبات بل ومن المقرر ككل .

وتجدر الاشارة الى أن كل فصل من فصول الكتاب الخمسة مقسم الى بنود ، وكل بند مقسم الى فقرات مؤلفة من تعاريف ونظريات ونتائج وملاحظات وأمثلة . ويشار الى كل بند بكسر عشري ، يدل قسمه الصحيح على رقم الفصل ، والرقم الأيسر من قسمه العشري على ترتيب البند والرقم الأيمن ،أو الرقمان الأيمنان ، على ترتيب الفقرة .فالرمز ٣ر٢٥ ، مثلا ، يدل على الفقرة الخامسة من البند الثاني في الفصل الثالث . كذلك ، فان الرمز (٥ر١٧ — [١]) يعني الفقرة المناسبة ، ولكن في المرجع ذي الرقم [١] ، والموجود في قائمة المراجع المستعان بها لدى وضع الكتاب ،والواردة في آخر الكتاب . أما الصيغ والدساتير ، فقد أشرت لها في كل فصل بالأرقام الغبارية

(التي يطلق عليها عادة اسم الأرقام العربية) .

ورغبة منا في مساعدة القارئ لدى الرجوع الى المصادر المكتوبة باللغة الانجليزية ، فقد أوردت في آخر الكتاب ثبتا بالمصطلحات الواردة فيه ، مرتبة وفق حروف الهجاء العربية ، مع مقابل كل منها باللغة الانجليزية .

وفي الختام ، فانه يطيب لي أن أتوجه الى السادة الزملاء في قسمي الرياضيات بجامعتي دمشق والرياض بجزيل الشكر للنصائح القيمة التي أسدوها لي أثناء قيامي بتهيئة هذا الكتاب .

المؤلف

خضر الأحمد

الفصل الأول

مقدمة في طبولوجيا الفضاءات الاقليدية $\mathbb{R}^n$

نهايات واستمرار الدول الحقيقة على $\mathbb{R}^n$.

الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}$ هو مجموعة مزودة بعمليتين جبريتين، تجعلان منها فضاء متجها ، وبجداء داخلي ، يجعل من هذا الفضاء المتجه فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فضاء منظّما . لذا سنورد في هذا الفصل تعاريف الفضاءات المتجهة وفضاءات الجداء الداخلي ، والفضاءات المنظمة ، وبعضا من النظريات الأساسية المتعلقة بها . ولما كان كل فضاء منظم فضاء متريا ، فإن كل الحقائق المرتبطة بطبولوجيا الفضاءات المترية، والتي أوردناها في الفصل الثالث من كتاب " المدخل الى التحليل الرياضي [1] ، صحيحة في الفضاءات الاقليدية . وبما أن للفضاءات الاقليدية سمات خاصة تنفرد بها عن الفضاءات المترية العامة ، فأننا سندرس بشيء من الاقتضاب المتتاليات المتقاربة ، والمجموعات المتراصة ، والمجموعات المترابطة في $\mathbb{R}$. كذلك فقد سبق وأوردنا في الفصلين الرابع والخامس من [1] دراسة نهايات واستمرار الدوال من فضاء متري الى فضاء متري آخر، وأفردنا الفصل السادس لدراسة الدوال الحقيقية على الفضاءات المترية . لذا ،فان كل التعاريف والنظريات الواردة في الفصول المذكورة تسري بالطبع على

الدوال الحقيقية المعرفة على الفضاء الاقليدي . بيد أن هذه الدوال تتمتع بصفات خاصة بها . لذا سنسرد في هذا الفصل أهم تلك الخواص .

ا را – الفضاءات المتجهة

الفضاء المتجه هو مجموعة يمكن جمع عناصرها وضرب عناصرها بأعداد ، شريطة توفر بعض الشروط المألوفة .ونورد فيما يلي التعريف الدقيق للفضاء المتجه الحقيقي .

ا ار ا – تعريف

الفضاء المتجه الحقيقي هو مجموعة X ، تسمى عناصرها أحيانا متجهات ، ومزودة بعمليتين :

عملية داخلية تسمى جمعا ، ويرمز لها بـ + ، وعملية خارجية تسمى ضربا بعدد حقيقي .

فاذا كان x, y أي عنصرين من X ، فان مجموعهما $x+y$ هو عنصرمن X ، كما أن عملية الجمع هذه يجب أن تحقق المسلمات التالية :

(آ) أيا كان x, y من X فان

$$x+y=y+x$$

(ب) أيا كان x, y, z من X ، فان

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

(جـ) يوجد عنصر من X ، نرمز له بـ 0 ، بحيث يكون

$$x+0=0+x=x$$

أيا كان x من X .

(د) يقابل كل عنصر x من X عنصر ، نرمز له بـ $-x$ ، بحيث يكون :

$$x+(-x) = -x+x = 0$$

كذلك ، فان حاصل الضرب ax لأي عنصر x من X ، بأي عنصر a من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، هو عنصر من X ، كما أن عملية الضرب يجب أن تحقق المسلمات التالية :

(هـ) أيا كان x من X ، وأيا كان a,b من $\mathbb{R}$ ، فان

$$(ab)x = a(bx)$$

(و) أيا كان x,y من X ، وأيا كان a من $\mathbb{R}$ ، فان

$$a(x+y) = ax+ay$$

(ز) أيا كان x من X ، وأيا كان a,b من $\mathbb{R}$ ، فان

$$(a+b)x = ax+bx$$

(ح) أيا كان x من X ، فان $1x = x$.

١ر٢ – مثـال

لنرمز بـ $\mathbb{R}^n$ لمجموعة كل المرتبات n من الأعداد الحقيقية والتي تكتب بالشكل

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots$$

حيث y_i و x_i أعداد حقيقية . فاذا عرفنا عملية الجمع وعملية الضرب بعدد حقيقي α بالدستورين

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

$$ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

فمن السهل التحقق بأن $\mathbb{R}^n$ يشكل فضاء متجها حقيقيا بالنسبة لهاتين العمليتين . لاحظ هنا أن

$$0 = (0, 0, \dots, 0)$$

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

١٣ر١ مثـــال

لنرمز بـ $C[a,b]$ لمجموعة كل الدوال الحقيقيـــة المستمرة للمتغير الحقيقي t والمعرفة على المجال المغلق $J=[a,b]$. فاذا عرفنا مجموع الدالتين $x+y$ وحاصل الضرب ax لدالة x بعدد حقيقي a بالدستورين :

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(ax)(t) = ax(t)$$

فمن السهل التحقق بأن $C[a,b]$ يشكل فضاء متجهـــا حقيقيا بالنسبة لهاتين العمليتين . ان 0 هنا هو الدالـة الصفرية ، أي الدالة الحقيقية المعرفة على J ، والتـــي خيال كل عنصر من J وفقها هو العدد 0 ، كما أن $x-$ هـــي الدالة التي قيمتها في النقطة t من J هي $-x(t)$.

هذا ، وسنرمز للمجموع $x+(-y)$ بالشكل $x-y$ ، ونسميه حاصل طرح y من x .

٢ر١- فضاءات الجداء الداخلـــي والفضاءات المنظمـــة

من الواضح أن عملية الضرب بعدد ، التي استند اليهـا

تعريف الفضاء المتجه ، إنْ هي الا دالة معرفة على $\mathbb{R} \times X$ وتأخذ قيمها في X . وفضاء الجداء الداخلي هو فضاء متجه X ، مزود بدالة معرفة على $X \times X$ ، وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ ، وتحقق شروطا محددة ، الأمر الذي يفصله التعريف التالي :

١ر٢ تعريف

اذا كان X فضاء متجها حقيقيا ، فان الجداء الداخلي (أو الجداء العددي) على X هو دالة من $X \times X$ في $\mathbb{R}$ ، نرمز لها بـ $(x,y) \to \langle x,y \rangle$ ، وتحقق المسلمات التالية :

(أ) أيا كان x من X ، فان

$$\langle x,x \rangle \geq 0$$

(ب) الشرط اللازم والكافي كي يكون $\langle x,x \rangle = 0$ هو أن يكون $x = 0$.

(ح) أيا كان x,y من X ، فان

$$\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$$

(د) أيا كانت x,y,z من X ، فان

$$\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$$

$$\langle x,y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$$

(هـ) أيا كان x,y من X ، وأيا كان α من $\mathbb{R}$ ، فان

$$\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle = \langle x,\alpha y \rangle$$

ويدعى كل فضاء متجه ، عرف عليه جداء داخلي ، فضاء جداء داخلي.

هذا ومن الممكن أن نعرف أكثر من جداء داخلي على الفضاء المتجه نفسه .

٢٢ر١ مثال

اذا أوردنا في $\mathbb{R}^n$ التعريف التالي

$$<(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)> = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

فان هذا التعريف يحدد جداء داخليا على $\mathbb{R}^n$

٢٣ر١ مثال

من السهل التحقق بأن الفضاء المتجه المؤلف من جميع الدوال الحقيقية المستمرة على $[a,b]$ بشكل فضاء جداء داخلي ، اذا زودناه بالجداء الداخلي المعرف كمايلي:

$$<x, y> = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$$

٢٤ر١ - تعريف

اذا كان X فضاء متجها حقيقيا ،فان النظيم على X هو دالة حقيقية على X نرمز لها بـ $x \to \|x\|$ ، وتحقق المسلمات التالية :

(آ) أيا كان x من X ، فان
$\|x\| \geq 0$

(ب) الشرط اللازم والكافي كي يكون $\|x\| = 0$ هو أن يكون $x = 0$.

(جـ) أيا كان x من X ، وأيا كان a من $\mathbb{R}$ ، فان

$$\|ax\| = |a| \, \|x\|$$

(د) أيا كان x, y من X ، فان

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ويدعى كل فضاء متجه عرف عليه نظيم فضاء منظما .

هذا ، ومن الممكن أن نعرف أكثر من نظيم على الفضاء المتجه نفسه .

٢٥ر١ – مثال

لنورد في $\mathbb{R}^n$ التعريف

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

من السهل التحقق من صحة المسلمات الثلاث الأولى في التعريف ٢٤ر١ . أما المسلمة الرابعة ، فان اثباتها يتطلب بعض الجهد ، الذي نترك القيام به للقارئ.

٢٦ر١ مثال

لنرمز بـ l^∞ لمجموعة كل المتتاليات الحقيقية المحدودة ، بمعنى أنه اذا كانت المتتالية $x = \{x_i\}$ عنصرًا من l^∞ فان :

$$|x_i| \leq C_x$$

حيث C_x عدد حقيقي قد يتبع x ، الا أنه لايتبع i .

من السهل التحقق بأنه اذا زودنا l^∞ بعملية جمع

وفق الدستور

$$x+y=\{x_i\}+\{y_i\}=\{x_i+y_i\}$$

وعملية ضرب بعدد حقيقي محددة بالمساواة

$$\alpha x=\alpha\{x_i\}=\{\alpha x_i\}$$

فان l^∞ تغدو فضاء متجها بالنسبة لهاتين العمليتين .
ونترك للقارئ التحقق من أن المساواة

$$\|x\| = \sup_{i\in N}|x_i|$$

تحدد نظيما على l^∞ .

٢٧را - مثال

لنأخذ فضاء كل الدوال الحقيقية والمستمرة المعرفة على $J=[a,b]$ ، والذي أوردناه في المثال ١٣را . من السهل التحقق من أن المساواتين

$$\|x\| = \max_{t\in J}|x(t)|$$

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$$

تحددان نظيمين مختلفين على هذا الفضاء .

سنورد الآن نظرية تبين أنه يمكن دوما الانطلاق من

الجداء الداخلي على فضاء متجه ، لتعريف نظيم على هذا الفضاء .

٢٨را – نظرية

اذا كان X فضاء جداء داخلي ، وعرفنا $\|x\|$ بالمساواة

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad (1)$$

أيا كان x من X ، فان الدالة $x \to \|x\|$ تحدد نظيما على X . وعندئذ يحقق هذا النظيم متراجحة شفارتز التالية :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \ \|y\| \qquad (2)$$

وفضلا عن ذلك ،فان الشرط اللازم والكافي كي تنقلب هذه المتراجحة الى مساواة صرفة ، هو أن يكون العنصران x, y مرتبطين خطيا .

البرهان. لما كان $\langle x, x \rangle \geq 0$ أيا كان x من X ،فان الجذر التربيعي لـ $\langle x, x \rangle$ موجود ،وبالتالي ، فان $\|x\|$ مقدار حقيقي محدد تماما . ان الخواص الثلاث الأولى للنظيم، والواردة في ٢٤را ، هي نتائج مباشرة للشروط (آ) ، (ب) (هـ) الواردة في التعريف ٢١را . بقي علينا اثبات الشق (د) من ٢٤را ، وقبل هذا سنثبت صحة (2).

اذا كان $x = 0$ ، فان(2) صحيحة ، ذلك أن $\langle 0, y \rangle = 0$ و $\|0\| = 0$.
لنفترض $x \neq 0$. عندئذ نجد أنه أيا كان العدد الحقيقي α ،فان

$$0 \leq \|\alpha x - y\|^2 = \langle \alpha x - y, \alpha x - y \rangle$$
$$= \alpha^2 \langle x, x \rangle - 2\alpha \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

فاذا اخترنا a مساوية للمقدار $\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$ ، فانـــــه

يترتب على المتراجحة الأخيرة أنه

$$0 \leq -\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle} + \langle y,y\rangle = -\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2$$

وبنقل الحد المسبوق باشارة ـ الى الطرف الأيسر ،ثـــم بضرب طرفي المتراجحة بـ $\|x\|^2$ ، ومن ثم بأخذ الجذرالتربيعي نجـد (2).

ان الشرط اللازم والكافي كي تنقلب المتراجحة الـــى مساواة هو أن يكون $x=0$ ، أو $\|ax-y\|^2=0$ ، أي $y=ax$ ، وهذا يعني كون العنصرين x,y مرتبطيـــن خطيا .

لننتقل بعد هذا كله الى تبيان صحة الشرط (د) من التعريف ٢٤را . لدينا

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y\,,\,x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$

واستنادا الى متراجحة شفارتز (2) نجد أن

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

الأمر الذي يترتب عليه صحة المطلوب . ■

هذا ، ونترك للقارئ التحقق من صحة مايلي :

١ر٢٩ – نتيجة

اذا كان X فضاء جداء داخلي ،فان الشرط اللازم والكافي كي تنقلب المتراجحة

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

الى مساواة صرفة (حيث $\|\cdot\|$ هو النظيم المولد من الجداء الداخلي) ، هو أن يكون $x=0$ ، أو أن يوجد عدد حقيقي موجب c بحيث يكون $y=cx$.

١ر٢٩١ – ملاحظة

من السهل التحقق بأنه أيا كان x,y في فضاء منظم ، فان

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

١ر٢٩٢ – ملاحظة

من الممكن للقارئ أن يستنتج ، بالحساب المباشر ، أن النظيم المولد من جداء داخلي يجب أن يحقق مساواة متوازي الأضلاع التالية

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

وذلك أيا كان العنصران x,y من فضاء الجداء الداخلي .

يترتب على هذا أنه اذا لم يحقق نظيمٌ هذه المساواة، فلا يمكن أن يكون ناتجا من جداء داخلي باستخدام (1).وبعبارة أخرى ، فليس من الضروري أن يكون كل فضاء منظم هو فضاء جداء

داخلي . ويبين المثال الآتي صحة هذه الدعوى :

٢٩٣ر١ – مثـــال

ليكن X هو الفضاء المتجه المؤلف من كل الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية . من السهل التحقق بأن المســاواة

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| \qquad [x = (x_1, x_2)]$$

تحدد نظيما على X . أن هذا النظيم لايمكن أن يكون مولدا من جداء داخلي على X ، ذلك أنه لو أخذنا العنصرين

$$x = (1, 1) \quad , \quad y = (1, -1)$$

من X ،فان

$$\|x\| = 2 \ , \ \|y\| = 2 \ , \ \|x+y\| = 2 \ , \ \|x-y\| = 2$$

وبالتالي فاننا نرى أن

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8 \neq 2(4+4) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

٢٩٤ر١ – ملاحظـة

كل نظيم على فضاء متجه يحدد متركاً D على X معرفـا بالمساواة

$$D(x, y) = \|x-y\| \qquad (3)$$

يسمى D متركا مولدا من نظيم .

وهكذا ،فان كل فضاء منظم هو فضاء متري . وهذا يعني أن كل الحقائق المتعلقة بالفضاءات المترية تسري علـــى

٢٩٥ر١ – نظرية

اذا كان D متركا مولدا من نظيم على فضاء متجه X ، فان

$$D(x+z, y+z) = D(x,y) \qquad (\text{أ})$$

$$D(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, D(x,y) \qquad (\text{ب})$$

وذلك أيا كان x, y, z من X ، وأيا كان العدد α.

البرهان . لدينا

$$D(x+z, y+z) = \|x+z-(y+z)\| = \|x-y\| = D(x,y)$$

$$D(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\, \|x-y\| = |\alpha|\, D(x,y)$$

وهو المطلوب ∎.

يترتب على هذه النظرية ، أنه اذا لم يحقق مترك احدى المساواتين (أ) أو (ب) من ٢٩٥ر١ ، فلا يمكن أن يكون هذا المترك ناتجا عن نظيم باستخدام (3) . وبعبارة أخرى ، فليس من الضروري أن يكون كل فضاء متجه متري فضاء منظما . ويبين المثال التالي صحة ماندعيه .

٢٩٦ر١ – مثال

لتكن S مجموعة كل المتتاليات الحقيقية (المحدودة أو غير المحدودة) . من الواضح أنه اذا زودنا S بعمليتي جمع

وضرب بعدد حقيقي كما في المثال ٢٦ر١ ، فان S تغدو فضاء متجها بالنسبة لهاتين العمليتين . ونترك للقارئ التحقق من أن المساواة

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

(حيث $x = \{x_i\}$ ، $y = \{y_i\}$) تعرف متركا على S . هذا المترك لايمكن أن يكون مولدا من نظيم ، ذلك أن الشرط (ب) من النظرية ٢٩٥ر١ غير محقق بالنسبة لهذا المترك .

٣ر١ الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$

٣١ر١ - تعريف

الفضاء الاقليدي ذو البعد n هو المجموعة $\mathbb{R}^n$ ، المزودة بعمليتي الجمع والضرب بعدد ، كما في المثال ٢ ار١ ، وبالجداء الداخلي ، كما في المثال ٢٢ر١ . وكما رأينا في ٢٥ر١ ، فان هذا الجداء يولد النظيم

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad [x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)] \quad (4)$$

يسمى العدد x_1 الاحداثي الأول (أو المركبة الأولى) للمتجه $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، والعدد x_2 الاحداثي الثاني (أو المركبة الثانية) لهذا المتجه ، وهلم جرا . ويسمى النظيم (4) النظيم الاقليدي (أو الديكارتي) على $\mathbb{R}^n$.

ولما كنا قد رأينا في ٢ر٢٩٤ أن النظيم على فضاء يحدد متركا D على هذا الفضاء ، فان المسافة بين نقطتين هي

$$D(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

واستنادا الى نظرية الفضاءات المترية ،فان الكرة المفتوحة في $\mathbb{R}^n$ ، التي مركزها x_0 ونصف قطرها العدد الموجب ع ، هي المجموعة

$$N(x_0, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon \}$$

كما أن الكرة المغلقة في $\mathbb{R}^n$ ، التي مركزها x_0 ونصف قطرها العدد غير السالب ع ، هي المجموعة

$$B(x_0, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon \}$$

واستنادا الى تعريف المجموعة المفتوحة في فضاء متري (٢ر٣ — [1]) ، فاننا نقول عن مجموعة جزئية U في $\mathbb{R}^n$ انها مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ ، اذا وجد لكل عنصر x من U كرة مفتوحة مركزها x ومحتواة في U . واذا كانت S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ ، فان الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية A من S مفتوحة في الفضاء الجزئي S (أي في المجموعة S المزودة بمقصور النظيم الاقليدي على S) هو أن توجد مجموعة مفتوحة U في $\mathbb{R}^n$ بحيث يكون $A = U \cap S$ (٢ر٣ — [1]) .

كذلك ، فكل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ (في S) تحوي النقطة x_0 تسمى جوارا للنقطة x_0 في $\mathbb{R}^n$ (في S).

تسمى متممة المجموعة المفتوحة في $\mathbb{R}^n$ (في S) مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^n$ (في S) .

١ر٣٢ – مثال

(١) المجموعة

$$\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} =]1,2[$$

مفتوحة في $\mathbb{R}$ ، والمجموعة

$$\{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 2\} = [1,2]$$

مغلقة في $\mathbb{R}$. أما المجموعة

$$\{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x < 2\} = [1,2[$$

فليست مفتوحة ولا مغلقة في $\mathbb{R}$.

(٢) المجموعة

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x < 0 , y > 0 , z < 0\}$$

مفتوحة في $\mathbb{R}^3$ ، والمجموعتان

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x = y = z\}$$

مغلقتان في $\mathbb{R}^3$. أما المجموعة

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 < 2\}$$

فليست مفتوحة ولا مغلقة في $\mathbb{R}^3$.

من المفيد، في كثير من الأحيان ، الحصول على علاقات بين نظيم متجه في $\mathbb{R}^n$ ، وبين القيم المطلقة لمركباته .

وتوفر النظرية التالية واحدة من هذه العلاقات .

١ر٣٣ - نظريـــة

اذا كان $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ أي عنصر من $\mathbb{R}^n$ ، فان

$$(5) \qquad |x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\, \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

أيا كان i في من المجموعة $J = \{1, 2, \dots, n\}$.

البرهان . لما كان

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

فمن الواضح أن $\|x\| \geq |x_i|$ أيا كان i من J . كذلـــك فاذا كان

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

فان $\|x\|^2 \leq n M^2$ ، ويكون بالتالي $\|x\| \leq \sqrt{n}\, M$. ∎

تسمى هاتان المتراجحتان مترا جحتي شفارتز .

بما أن $\mathbb{R}^n$ فضاء متري ، فاننا سنقدم الآن بعـــض التعاريف الطبولوجيه المتعلقة بهذا الفضاء ، التي ســبق ووردت في نظرية الفضاءات المترية ، بل وفي نظريــــــة الفضاءات الطبولوجيه العامة . وسنستخدم هذه التعاريـــف من حين لآخـــر .

١ر٣٤ - تعاريـــف

(آ) نقول عن نقطة x من $\mathbb{R}^n$ انها نقطة حديـــــة للمجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، اذا تقاطع كل جوار للنقطة x مع S في نقطة (واحدة على الاقل) مغايرة لـ x .

ويطلق على مجموعة كل النقاط الحدية لـ S اسم المجموعة المشتقة لـ S ، ويرمز لها بـ S' أو بـ $D(S)$. ونقول عن x انها محيطية لـ S اذا تقاطع كل جوار لـ x مع S ومتممة S ،وتسمى مجموعة النقاط المحيطية لـ S محيط S ، ونرمز له بـ $\partial(S)$.

واذا تم تقاطع كل جوار لـ x مع S في عدد غير منته من النقاط ، فان x تسمى نقطة تراكم (أو نقطة تجمع) للمجموعة S.

ونترك للقارئ التحقق من أن الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة حدية لمجموعة في $\mathbb{R}^n$ (بل وفي أي فضاء متري) هو أن تكون x نقطة تراكم لهذه المجموعة .

(ب) تسمى النقطة x من $\mathbb{R}^n$ نقطة داخلية للمجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، اذا وجد جوار للنقطة x محتوي بكامله في S. ويطلق على مجموعة النقاط الداخلية لـ S اسم داخل S ،ويرمز لها بـ S° أو بـ $Int(S)$.

(ﺣ) نقول عن النقطة x من $\mathbb{R}^n$ انها ملاصقة للمجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ اذا تقاطع كل جوار للنقطة x مع S. وتسمى مجموعة النقاط الملاصقة اسم لصاقة S ، ويرمز لها بـ $\overline{S}$ ، أو بـ $Cl(S)$

(د) نقول عن مجموعة S من $\mathbb{R}^n$ انها محدودة ، اذا وجدت كرة مفتوحة $N(x_0, K)$ ، بحيث يكون $S \subseteq N(x_0, K)$.

٤ر١ ـ تقارب المتتاليات في الفضاءات الاقليدية

نستنتج من تعريف تقارب المتتاليات في الفضاء المتري (٥ر٣ ـ [1]) مايلي :

١٤ر١ – تعريف

لتكن $\{x_m\}, m \in N$ متتالية في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$. نقول عن هذه المتتالية انها تتقارب من x ، اذا قابل كلّ عدد موجب ε ، عددٌ صحيح موجب N_ε ، بحيث يكون $\|x_m - x\| < \varepsilon$ عندما $m \geq N_\varepsilon$. وفي هذه الحالة ،نقول عن x انها نهاية المتتالية $\{x_m\}, m \in N$ ، ونكتب $x_m \longrightarrow x$ ، أو $\lim\limits_{m \to \infty} x_m = x$.

لما كان $\mathbb{R}^n$ فضاء متريا ، فاننا نستنتج مباشرة من النظريات العامة لتقارب المتتاليات في الفضاءات المترية والواردة في (٥ر٣ – [1]) الأمور التالية :

٢٤ر١ – نتائج

(آ) لايمكنُ أن يكون لمتتالية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ أكثر من نهاية واحدة .

(ب) الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية في $\mathbb{R}^n$ من x ، هو أن يحوي أي جوار للنقطة x جميع عناصر المتتالية ، باستثناء عدد منته منها .

(حـ) الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة حدية للمجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ هو أن توجد متتالية من عناصر $S - \{x\}$ متقاربة من x.

(هـ) كل متتالية $\{x_m\}, m\in N$ متقاربة في $\mathbb{R}^n$ ، محدودة ، أي أن هنالك عددا موجبا K ، بحيث يكون $\|x_m\| \le K$ أيا كان m من N .

(و) الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ مغلقة في $\mathbb{R}^n$ هو أن تكون لكل متتالية متقاربة من عناصر S نهاية في S .

قد يظن بأن نظرية تقارب المتتاليات في الفضاء $\mathbb{R}^n$ أعقد من نظرية تقارب المتتاليات في $\mathbb{R}$. بيد أن الأمر ليس كذلك . وتكمن أهمية النظرية التالية ، في أنها تبين بأن مسائل التقارب في $\mathbb{R}^n$ ، يمكن ردها الى مسائل مماثلة في $\mathbb{R}$ لكل من احداثيات المتتاليات في $\mathbb{R}^n$.

٣ ٤ر١ – نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتتالية $\{x_m\}, m\in N$ حيث

$$x_m = (x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}), m \in N$$

من العنصر $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ في $\mathbb{R}^n$ ، هو أن تتقارب المتتاليات الحقيقية

$$\{x_{1m}\}, \{x_{2m}\}, \dots, \{x_{nm}\} \qquad (6)$$

من الأعداد

$$x_1, \quad x_2, \dots, x_n \qquad (7)$$

على الترتيب .

البرهان . لما كان $x_m \to x$ ، فان هذا يعني تعريفا أنه يقابل العدد الموجب ε عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث يكون $\|x_m - x\| < \varepsilon$ ، عندما $m \geq N_\varepsilon$. واستنادا الى النظرية ٣٣ر١ ، فان

$$|x_{im} - x_i| \leq \|x_m - x\| < \varepsilon$$

أيا كان العدد i من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$. وهذا يعني أن كلا من المتتاليات العددية $\{x_{im}\}$ تتقارب من x_i .

وبالعكس ، لنفترض أن المتتاليات (6) تتقارب من الأعداد (7) على الترتيب ، وليكن ε عددا موجبا . عندئذ يوجد عدد صحيح موجب K_ε ، بحيث أنه أيا كان العدد الطبيعي m ، الذي يحقق الشرط $m \geq K_\varepsilon$ ، فان

$$|x_{im} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

أيا كان i من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$. يترتب على هذا أنه عندما يكون $m \geq K_\varepsilon$ ، فان

$$\|x_m - x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_{im} - x_i|^2 < \varepsilon^2$$

الأمر الذي يعني أن $x_m \to x$. ∎

٤٤ر١ – ملاحظة

اذا كانت $\{x_m\}, m \in \mathbb{N}$ متتالية متقاربة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ، فانها تحقق الخاصة التالية :

أيا كان العدد الموجب ε ،فثمة عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث تتحقق المتراجحة $\varepsilon > \|x_k - x_l\|$ حيث l, k أي عددين صحيحين موجبين يحققان الشرطين $l \geq N_\varepsilon$ ، $k \geq N_\varepsilon$.
وفي الحقيقة اذا كان $x_m \to x$ ، فهنالك عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث يكون $\|x_k - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $k \geq N_\varepsilon$. يترتب على هذا أن :

$$k, l \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|x_k - x_l\| \leq \|x_k - x\| + \|x_l - x\| < \varepsilon$$

تسمى كل متتالية تحقق هذه الخاصة متتالية أساسية ، أو متتالية كوشي . وهكذا ، فانه ينجم عما سبق ، أن كل متتالية متقاربة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ متتالية أساسية .

ومن الممكن تعميم هذه النتيجة على الفضاءات المترية العامة ، إذ يمكن أن نثبت بأسلوب مماثل للبرهان الأخير أن كل متتالية متقاربة في فضاء متري ، لابد وأن تكون أساسية . ومن الجدير بالملاحظة ، أن العكس غير صحيح في الفضاءات المترية العامة ، اذ يمكن ايراد متتاليات أساسية في بعض الفضاءات المترية ، دون أن تكون هذه المتتاليات متقاربة .

ان الفضاءات المترية التي تكون كل متتالية أساسية فيها متقاربة ،تشغل مركزا مرموقا في التحليل الرياضي. وقد أطلق على هذه الفضاءات اسم الفضاءات التامة . ولما كان الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ تاما (ص٥٩ – [١]) ،فاننا

نستنتج أن الشرط اللازم والكافي كي تتقارب متتالية في $\mathbb{R}^n$ ، هو أن تكون هذه المتتالية أساسية .

لتكن $x = \{x_m\}$ متتالية في $\mathbb{R}^n$. ان هذا يعني أن x هي دالة ، ساحتها مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}^n$. لتكن k متتالية أخرى في $\mathbb{N}$ ، أي أن k دالة ساحتها $\mathbb{N}$ ، وتأخذ قيمها في $\mathbb{N}$ كذلك . سنفترض أن الدالة k متزايدة تماما . ان مركبة الدالتين $x \circ k$ هي دالة ساحتها $\mathbb{N}$ ، وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}^n$. وبالتالي فان $x \circ k$ متتالية في $\mathbb{R}^n$. تسمى هذه المتتالية متتالية جزئية من المتتالية $\{x_m\}$. وسنرمز لهذه المتتالية بـ $\{x_{k_m}\}$ ، $m \in \mathbb{N}$ أو اختصارا بـ $\{x_{k_m}\}$.

سنورد الآن البرهان على صحة النظرية التالية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ، علما بأنه يمكن القيام بخطوات البرهان نفسها ، لاثبات صحة هذه النظرية في الفضاء المتري العام .

٥٤را — نظرية

اذا كانت $\{x_m\}$ ، $m \in \mathbb{N}$ متتالية في $\mathbb{R}^n$ متقاربة من x ،وكانت $\{x_{k_m}\}$ ، $m \in \mathbb{N}$ متتالية جزئية من $\{x_m\}$ ،فان هذه المتتالية الجزئية لابد وأن تكون متقاربة من x .

البرهان : لما كانت $\{x_m\}$ ، $m \in \mathbb{N}$ متقاربة من x ، فانه يقابل العدد الموجب ε ، عدد صحيح موجب N_ε ، بحيث يكون $\|x_m - x\| < \varepsilon$ اذا حقق m الشرط $m \geq N_\varepsilon$. لكن اذا كان

$m \geq N_\varepsilon$ ، فان $k_m \geq N_\varepsilon$ ((لماذا ؟)) الأمر الذي يترتب عليه وقتئذ أن $\|x_{k_m} - x\| < \varepsilon$. وهكذا نكون قد وجدنا أنه يقابل العدد الموجب ε ، عدد صحيح موجب N_ε بحيث يكون $\|x_{k_m} - x\| < \varepsilon$ أيا كان العدد الصحيح الموجب m ، الذي يحقق الشرط $m \geq N_\varepsilon$. اذن فالمتتالية الجزئية $\{x_{k_m}\}, m \in N$ متقاربة ، كما أن $x_{k_m} \to x$. ∎

يترتب مباشرة على هذه المبرهنة النتيجة التالية :

١ر٤٦ – نتيجة

اذا كانت $\{x_m\}, m \in N$ متتالية متقاربة من عنصر x في $\mathbb{R}^n$ ، وكان p أي عدد طبيعي ، فان المتتالية $\{x_{p+m}\}, m \in N$ لابد وأن تتقارب من x .

١ر٥ المجموعات المتراصة في الفضاءات الاقليدية

يعتبر التراص في الفضاءات الاقليدية ، والذي كان أول من أورده فريشيه عام ١٩٠٦ ، من أهم المفاهيم الطبولوجية في هذه الفضاءات ، بل وفي الفضاءات الطبولوجية العامة .

١ر٥١ – تعريف

نقول عن جماعة من المجموعات الجزئية $\mathcal{U}$ في الفضاء $\mathbb{R}^n$ انها تغطي المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، أو انها

تغطية لِـ S ، اذا كان اجتماع عناصر $\mathcal{U}$ يحوي S . وتسمى هذه الجماعة تغطية مفتوحة لِـ S ، اذا كانت عناصرهــا مجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ وتغطي S .

١٫٥٢ - تعريف

نقول عن مجموعة جزئية S من الفضاء $\mathbb{R}^n$ انهــا متراصة ، اذا حوت كل تغطية مفتوحة $\mathcal{U}$ لِـ S جماعة جزئية منتهية من $\mathcal{U}$ تغطي S كذلك ، أي اذا حوت كل تغطية مفتوحة لِـ S ، تغطية جزئية منتهية لِـ S .

١٫٥٣ - مثال

لتكن $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ مجموعة جزئية منتهية مــن $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $\{U_i : i \in I\}$ تغطية مفتوحة اختيارية لـ A . اذن هنالك عناصر $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_m}$ (ليست مختلفة بالضرورة) بحيث يكون

$$a_1 \in U_{i_1}, \; a_2 \in U_{i_2}, \; \ldots, \; a_m \in U_{i_m}$$

ويعني هذا أننا استخلصنا من التغطية المفتوحة الاختيارية المعطاة لِـ A تغطية جزئية منتهية (عدد عناصرها m على الأكثر) هي $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_m}\}$. اذن A متراصة .

١٫٥٤ - مثال

لنأخذ المجال $]0,1[$ في $\mathbb{R}$. من السهل التحقــق أن الجماعة

$$\left\{ \left] \frac{1}{n+1}, 1 \right[\; : n \in \mathbb{N} \right\}$$

تشكل تغطية مفتوحة لـ $]0,1[$. ونترك للقارئ التحقق كذلك من أن هذه التغطية لايمكن أن تحوي تغطية منتهية . وبالتالي فالمجموعة $]0,1[$ ليست متراصـــة .

هذا ، ويمكن البرهان على أن المجال $[0,1]$ متراص في $\mathbb{R}$ ، الامر الذي يشكل نتيجة مباشرة للنظرية الشهيرة التالية (البرهان وارد في ٣ر٦٩٤ – [1] في الحالة $n=1$).

٥٥ر١ – نظرية (هاين – بوريل (Heine – Borel

كل مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ لابد وأن تكون متراصة في هذا الفضاء . ∎

سنبين الآن أن عكس هذه النظرية صحيح .

٥٦ر١ – نظريـــة

كل مجموعة جزئية متراصة S في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ لابد وأن تكون مغلقة ومحدودة .

البرهان . ليكن x عنصرا اختياريا مثبتا في $\mathbb{R}^n - S$ وليكن y عنصرا من S . من الواضح أن ثمة جـــوارا U_y لِـ x ، وجوارا V_y لِـ y، بحيث يكون $U_y \cap V_y = \emptyset$ (اذا رمزنا للعدد الموجب $\|x-y\|$ بـ 2ε ، فمن الممكن أخذ $U_y = N(x,\varepsilon), V_y = N(y,\varepsilon)$). ان الجماعة $\{V_y ; y \in S\}$ تشكل تغطية مفتوحة لِـ S . ولما كانت S متراصة ، فثمة عدد منته من النقاط في S ، ولتكن $y_1, \dots, y_m$ ، بحيث تشكل $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_m}\}$ تغطيـــة

مفتوحة لـ S . لنفرض أن

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i} \quad , \quad V = \bigcup_{i=1}^{m} V_{y_i}$$

من الواضح أن $x \in U$ و $S \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$.
وبالتالي ، نكون قد وجدنا أنه أيا كان x من $\mathbb{R}^n - S$ فثمة جوار لـ x ، هو U ، بحيث أن $U \subseteq \mathbb{R}^n - S$.
اذن $\mathbb{R}^n - S$ مفتوحة . أي أن S مغلقة .

بقي علينا اثبات محدودية S . اذا كان x_0 عنصرا اختياريا من $\mathbb{R}^n$ ، فان الكرات المفتوحة $N(x_0, m)$ ، حيث $m = 1, 2, \ldots$ ، تشكل تغطية مفتوحة لـ $\mathbb{R}^n$ ، وبالتالي لـ S . ولما كانت S متراصة ، وكان $N(x_0, m+1) \supseteq N(x_0, m)$. أيا كان m من N ، فثمة عدد صحيح موجب m_0 بحيث يكون $S \subseteq N(x_0, m_0)$ ، وهذا يعني أن S محدودة . ∎

يترتب مباشرة على النظريتين ١٥ر١ ، ١٥٦ر١ النتيجة الهامة التالية :

١٥٧ر١ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ متراصة ، هو أن تكون S مغلقة ومحدودة . ∎

من أهم التطبيقات لنظرية هاين — بوريل النظرية التالية :

١٥٨ر١ — نظرية (بولزانو — فيرشتراس (Bolzano-Weierstrass

لكل مجموعة جزئية محدودة وغير منتهية في $\mathbb{R}^n$ نقطة حدية واحدة على الأقل .

البرهان . يكفي لاثبات صحة هذه النظرية أن نبرهن بأن كل مجموعة جزئية S في $\mathbb{R}^n$ محدودة وغير خالية وليس لها نقطة حدية ، لابد وأن تكون منتهية .

وفي الحقيقة ، فاذا لم يوجد للمجموعة S نقاط حدية ، فانها مجموعة مغلقة ، لكل نقطة x فيها جوار U_x ، لايحوي أي نقطة من S سوى x . وبالتالي فان الجماعة

$$\mathcal{U} = \{ U_x : x \in S \}$$

تشكل عندئذ تغطية مفتوحة لـ S . وبما أن S محدودة أيضا ، فانه يترتب على نظرية هاين - بوريل ٥٥را أنه يمكن تغطية S بجماعة جزئية منتهية من المجموعات المنتمية الى $\mathcal{U}$ ، ولتكن هذه المجموعات هي :

$$U_{x_1} , U_{x_2} , \dots , U_{x_m}$$

وبما أن هذه المجموعات تحوي فقط النقاط $x_1, x_2, \dots, x_m$ من S ، فان $S = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ، وبذا يكتمل البرهان . ∎

٦را - المجموعات المترابطة في الفضاءات الاقليدية

نستنتج من تعريف المجموعات المترابطة في الفضاءات الطبولوجيه العامة التعريف التالي للترابط في الفضاءات الاقليدية .

١٦را - تعريف

نقول عن مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ انها <u>غير مترابطة</u> ، اذا وجدت مجموعتان U, V ، مفتوحتان في $\mathbb{R}^n$ ، بحيث تكون المجموعتان $S \cap U$ ، $S \cap V$ منفصلتين وغير خاليتين ،

وبحيثيكون اجتماعهما مساويا S . تسمى المجموعتان V و U عندئذ فصلا للمجموعة S . واذا لم تتحقق هذه الشروط ، فاننا نقول عن S انها مجموعة مترابطة .

٦٢ر١ — مثال

ان أي مجموعة وحيدة العنصر في $\mathbb{R}^n$ والمجموعة الخالية لابد وأن تكونا مترابطتين في $\mathbb{R}^n$.

٦٣ر١ — مثال

ان المجموعة $A =]-1,0[\cup [2,3]$ غير مترابطة في $\mathbb{R}$.

وتبرز النظرية التالية (٧ر٣ — [١]) سمة مميزة للمجموعات المترابطة في $\mathbb{R}$.

٦٤ر١ — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية S من الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}$ مترابطة ، هو أن تكون S مجالا . ∎

يترتب مباشرة على هذه النظرية ، أن الفضاء $\mathbb{R}$ مترابط ، ذلك أن $\mathbb{R}$ هو المجال $]-\infty,\infty[$.وسنبين الآن أن الفضاء $\mathbb{R}^n$ مترابط أيا كان العدد الطبيعي n ، دون أن يكون n مساويا 1 بالضرورة .

٦٥ر١ — نظرية

الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ مترابط .

البرهان . لنفترض موءقتا أن الفضاء $\mathbb{R}^n$ غير مترابط . عندئذ هنالك مجموعتان مفتوحتان غير خاليتين ومنفصلتان

U , V ، بحيث يكون $U \cup V = \mathbb{R}^n$. لتكن $x \in U , y \in V$ ،
ولنرمز بـ I للمجموعة $[0, 1]$ ، وبـ I_1 , I_2 للمجموعتين

$$I_1 = \{ t \in I : x + t(y - x) \in U \}$$

$$I_2 = \{ t \in I : x + t(y - x) \in V \}$$

من الممكن التحقق بأن I_1 و I_2 مجموعتان مفتوحتان غير خاليتين ومنفصلتان في $\mathbb{R}$ ، وتشكلان فصلا للمجموعة $[0, 1]$ ، الأمر الذي يناقض النظرية ١٦٤ر ١ ∎

٦٦ر١ ـ نتيجة

المجموعتان الجزئيتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان في آن واحد هما $\mathbb{R}^n$ و $\emptyset$.

البرهان . لتكن S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ مفتوحة ومغلقة في آن واحد ، ولنفترض جدلا أن

$$\mathbb{R}^n \neq S \neq \emptyset$$

عندئذ تكون $\mathbb{R}^n - S$ مفتوحة ومغلقة معا ، كما يكون $\mathbb{R}^n - S \neq \emptyset$. يترتب على هذا مباشرة أن المجموعتين $\mathbb{R}^n - S$ و S تشكلان فصلا للفضاء $\mathbb{R}^n$ ، أي أن $\mathbb{R}^n$ غير مترابط ، وهذا مناقض للنظرية ٦٥ر١ ∎

للمجموعات المترابطة والمفتوحة دور هام في بعض فروع التحليل الرياضي . ويترتب مباشرة على التعريف ٦١ر١ أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية مفتوحة S من $\mathbb{R}^n$ مترابطة ، هو أن لا يكون بالامكان تمثيلها باجتماع

مجموعتين غير خاليتين منفصلتين ومفتوحتين في $\mathbb{R}^n$.
بيد أننا سنورد الآن معيارا مميزا للمجموعات المترابطة المفتوحة في $\mathbb{R}^n$ ، معبرا عنه بلغة الخطوط المضلعة ولهذا الغرض نقدم التعريف التالي؛

٦٧را — تعريف

اذا كانت x, y نقطتين من $\mathbb{R}^n$ ، فانه يطلق اسم القطعة المستقيمة الواصلة بين x, y على المجموعة

$$L = \{ x + t(y-x) \ ; \ 0 \leq t \leq 1 \}$$

واذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ نقاطا من $\mathbb{R}^n$ ، وكانت L_i القطعة المستقيمة الواصلة بين x_i و x_{i+1} ، حيث $i = 1, 2, \ldots, m-1$ فاننا نقول بأن الجماعة $\{ L_1, L_2, \ldots, L_{m-1} \}$ تشكل خطا مضلعا واصلا بين النقطتين x_1 ، x_m.

وتمثل النظرية التالية سمة مميزة للمجموعات المفتوحة المترابطة ، وسنقتصر على سرد هذه النظرية دون البرهان .

٦٨را — نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة المفتوحة S في $\mathbb{R}^n$ مترابطة ، هو أن يكون بالامكان وصل أي نقطتين x, y من S بخط مضلع محتوي بأكمله في S. ∎

٦٩ر١ – ملاحظة

لدى اثبات كفاية الشرط في النظرية ٦٨ر١ ، ليس من الضروري افتراض المجموعة S مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ ،وبعبارة أخرى ، فيمكن اثبات أن أي مجموعة تحقق شرط النظرية ، سواء أكانت هذه المجموعة مفتوحة أو غير مفتوحة ، لابد وأن تكون مترابطة . أما العكس فغير صحيح ، فقد تكون المجموعة غير المفتوحة S مترابطة ، الا أنها لاتحقق شرط النظرية . وعلى سبيل المثال ، لنأخذ الكرة

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

من الواضح أن هذه المجموعة (المغلقة وغير المفتوحة) في $\mathbb{R}^3$ مترابطة ، الا أنه لايمكن وصل أي نقطتين منهما بخط مضلع محتوي بأكمله في هذه المجموعة .

٧٠ر١ – نهايات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

من الممكن أن نستنتج من التعريف العام لنهاية دالة حقيقية على فضاء متري (٣ر٤ – [1]) مايلي :

٧١ر١ – تعريف

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ولتكن x_0 نقطة حدية لـ S و l عددا حقيقيا . نقول ان

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ، اذا قابل كل عدد موجب ε عدد موجب δ ،
بحيث أنه اذا كان x عنصرا من S ، وكان
$0 < \|x - x_0\| < \delta$ ، فان $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

سنورد الآن نصوص أهم النظريات المتعلقة بنهايات الدوال الحقيقية على $\mathbb{R}^n$. لن نورد براهين لهذه النظريات ، ذلك أن هذه البراهين موجودة في ١ ار٤– [١] بصورة أعم ، لأنها تتعلق بنهايات الدوال الحقيقية على أي مضاء متري.

٧٢ر١ – نظريـــة

اذا كانت النهاية $\lim_{x \to x_0} f(x)$ موجودة ، فانها وحيدة . ■

قد يكون التطبيق المباشر للتعريف ٧١ر١ لايجاد نهاية دالة ما ، غاية في الصعوبة في العديد من المسائل . وتوفر النظرية التالية أسلوبا آخر ، يتم باستخدام المتتاليات . ونستطيع القول بأنه في كثير من الأحيان ، التي نحاول فيها استخدام الأسلوب المباشر لايجاد نهاية دالة ، نجد أنفسنا مضطرين لتشكيل متتالية والانتقال الى الاسلوب الآخر ، الذي نجده في ثنايا المبرهنة التالية :

٧٣ر١ – نظريـــة

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن x_0 نقطة حدية لـ S ، و ℓ عنصرا من $\mathbb{R}$. ان الشرط اللازم والكافي كي يكون $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ، هو أن يقابل

كلّ متتالية $\{x_m\}_{m\in N}$ في S ، عناصرها مختلفة جميعا عن x_0 ، ومتقاربة من x_0 ، متتالية $\{f(x_m)\}_{m\in N}$ متقاربة من ℓ . ∎

سنبحث الا ّن في جبر النهايات ، الذي يتعلق بنهاية مجموع وحاصل ضرب وحاصل قسمة دالتين حقيقيتين . ورغم أن جمع وضرب وقسمة دالتين حقيقيتين عمليات مألوفة ، الا أننا نفضل تعريفها من جديد ، خشية نسيان القارئ لها

٧٤ر١ – تعاريف

لتكن f و g دالتين حقيقيتين ساحتاهما المجموعتان الجزئيتان S و T من $\mathbb{R}^n$ على الترتيب . عندئذ :

(آ) إن $f+g$ دالة حقيقية ساحتها $S\cap T$ ، بحيث أنه أيا كان x من هذه الساحة ، فان

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

(ب) ان fg دالة حقيقية ساحتها $S\cap T$ بحيث أنه أيا كان x من هذه الساحة ، فان

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$$

(حـ) ان $\frac{f}{g}$ دالة حقيقية ساحتها $S\cap T-\{x\in\mathbb{R}^n: g(x)=0\}$ ، بحيث أنه أيا كان x من هذه الساحة ،فان

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

بعد هذا التعريف ، نورد النظرية التالية ، التي نجد برهانا لها في (٤ر٢ – [1]) .

٧٥ر١ ـ نظرية

لتكن f, g دالتين حقيقيتين ، ساحتاهما المجموعتان الجزئيتان T, S من $\mathbb{R}^n$ على الترتيب ، ولتكن x_0 نقطة حدية للمجموعة $S \cap T$. (من الواضح أن x_0 تكون عندئذ حدية لكل من T, S) . فاذا افترضنا وجودالنهايتين $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ ، فان

(أ) $$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(ب) $$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(حـ) اذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ ، فان

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

٨ر١ - استمرار الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

نستنتج من التعريف العام لاستمرار الدالة من فضاء متري الى آخر (١ر٥ ـ [1]) مايلي :

٨١ر١ ـ تعريف

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$. نقول عن f انها مستمرة في النقطة x_0 من S ، اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد موجب δ ، بحيث أنه

اذا كان x عنصرا من S يحقق الشرط $\|x-x_0\|<\delta$ ، فان $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. واذا كانت f مستمرة في كل نقطة من S ، فاننا نقول ان f دالة مستمرة على S .

٢٨ر١ – نظرية

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن x_0 نقطة من S . عندئذ تكون الدعاوى التالية متكافئة :

(آ) f مستمرة في النقطة x_0 .

(ب) يقابل كلّ جوار V ، للنقطة $f(x_0)$ جوارٌ U للنقطة x_0 في $\mathbb{R}^n$ (U تابع لـ V) ، بحيث أنه اذا كان x أي عنصر من $U \cap S$ ، فان $f(x)$ عنصر من V .

(حـ) اذا كانت $\{x_m\}, m\in N$ أي متتالية من عناصر S متقاربة من x_0 ، فان المتتالية $\{f(x_m)\}, m\in N$ تتقارب من $f(x_0)$.

البرهان . سنبرهن أولا أن (آ) تقتضي (ب) . ليكن V أي جوار للنقطة $f(x_0)$. اذن هنالك عدد موجب ε ، بحيث يكون $N(f(x_0),\varepsilon)\subseteq V$. واستنادا الى استمرار f في النقطة x_0 ، فانه يقابل ε عدد موجب δ ، بحيث أنه اذا كان x عنصرا من S يحقق الشرط $\|x-x_0\|<\delta$ ، فان $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. وبالتالي ، فاذا كان x عنصرا من $N(x_0,\delta)\cap S$ ، فان $f(x)\in N(f(x_0),\varepsilon)$.

نستخلص من هذا أنه يقابل كلّ جوار V للنقطة $f(x_0)$ جوار U (هو $N(x_0,\delta)$) للنقطة x_0 في $\mathbb{R}^n$، بحيث أنه اذا كان x أي عنصر من $U \cap S$، فان $f(x)$ عنصر من $N(f(x_0),\varepsilon)$، وبالتالي عنصرمن V.

سنثبت الآن أن (ب) تقتضي (جـ). نستنتج مباشرة من الفرض (ب) أنه يقابل الكرةً المفتوحةً الاختيارية $N(f(x_0),\varepsilon)$ للنقطة $f(x_0)$، كرةٌ مفتوحة $N(x_0,\delta)$ في $\mathbb{R}^n$ (محتواة في U)، بحيث أنه اذا كان x أي عنصر من S ينتمي الى $N(x_0,\delta)$، فان $f(x) \in N(f(x_0),\varepsilon)$. يعني هذا أنه يقابل العدد الموجب الاختياري ε، عدد موجب δ، بحيث أنه اذا كان x عنصرا من S يحقق الشرط $\|x-x_0\|<\delta$، فان $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. وبما أن $x_m \to x_0$ فهناك عدد صحيح موجب M، بحيث أن $m \geq M$ تقتضي $\|x_m-x_0\|<\delta$. يترتب على هذا، أنه يقابل العددَ الموجبَ الاختياري ε عدد صحيح موجب M، بحيث أنه اذا كان $m \geq M$، فان $|f(x_m)-f(x_0)|<\varepsilon$، وهذا يعني أن $f(x_m) \to f(x_0)$.

لننتقل بعد هذا الى اثبات أن (جـ) تقتضي (آ). لنفترض موءقتا صحة (جـ) دون أن تكون f مستمرة في x_0. اذن ثمة عدد موجب ε_0، بحيث أنه أيا كان العدد الطبيعي m، فهنالك عنصر x_m من S يحقق الشرطين $\|x_m-x_0\|<\frac{1}{m}$ و $|f(x_m)-f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. من السهل أن نرى عندئذ بأن المتتالية الناتجة

$m \in \mathbb{N}$ ، $\{x_m\}$ من عناصر S متقاربة من x_0 ،في حين أن المتتالية $\{f(x_m)\}, m \in \mathbb{N}$ لاتتقارب من $f(x_0)$.
ولما كان هذا مناقضا للفرض (حـ) ، فان f مستمرة في x_0 ، أي أن (حـ) لابد وأن تقتضي (آ) . ∎

٨٣ر١ – نظرية

لتكن f دالة حقيقية معرفة على ساحة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن x_0 نقطة من S وحدية لـ S . فاذا كانت f مستمرة في x_0 ، فان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

البرهان : يترتب على كون الدالة الحقيقية f مستمرة في النقطة x_0 من S ، أنه يوجد لكل عدد موجب ε عدد موجب δ ، بحيث أنه اذا كان x عنصرا من S يحقق الشرط $\|x - x_0\| < \delta$ ، فان $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. يتعين على هذا ، أنه اذا كان x عنصرا من S يحقق الشرط $0 < \|x - x_0\| < \delta$ (وهذا العنصر موجود، لأن x_0 نقطة حدية لـ S فرضا) ، فان $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,وهذا يعني استنادا الى ٧١ر١ أن $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ∎

٨٤ر١ – نظرية

لتكن f دالة حقيقية معرفة على ساحة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن x_0 نقطة حدية لـ S وتنتمي الى S . فاذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ، فان f دالة مستمرة في x_0 .

البرهان . ليكن ε عددا موجبا ما . عندئذ نجد استنادا الى التعريف ١٧را أنه يقابل ε عدد موجب δ ، بحيث أنه اذا كان x عنصرا من S يحقق الشرط $0 < \|x-x_0\| < \delta$ فان $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. ليكن x عنصرا من S يحقق الشرط $\|x-x_0\| < \delta$. فاذا كان $x = x_0$ ، فان $|f(x)-f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. واذا كان $x \neq x_0$ ، فان $0 < \|x-x_0\| < \delta$ ، وبالتالي فان $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ أيضا (لأن $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ فرضا) . وهذا يعني أنه اذا كان x عنصرا من S يحقق الشرط $\|x-x_0\| < \delta$ ، فان $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. لذا فان f مستمرة في النقطة x_0 .

١٥ر٨ ملاحظة

تجدر الاشارة الى أن كل نقطة x_0 من S ، ليست حدية لـ S ، لابد وأن تكون نقطة استمرار لـ f ، ذلك أنه اذا لم تتحقق هذه الدعوى ، لوجدنا ، استنادا الى ١٨را ، عددا موجبا ε_0 ، بحيث أنه اذا كان δ أي عدد موجب ، فهنالك عنصر x من S يحقق الشرط $\|x-x_0\| < \delta$ ، بحيث يكون $|f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. ومعنى هذا أنه أيا كانت الكرة المفتوحة $N(x_0;\delta)$ التي مركزها x_0 ، فثمة عنصر x من S مغاير لـ x_0 ، بحيث $x \in N(x_0;\delta)$ ، أي أن x_0 نقطة حدية لـ S ، وهذا خلاف الفرض .

يترتب على ماسبق مايلي :

١٨٦ر١ – نتيجة

لتكن f دالة حقيقية معرفة على ساحة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن x_0 نقطة حدية لـ S ومنتمية الى S . عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كي تكون f مستمرة في x_0 ، هو أن يكون $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

وهكذا فاذا كانت f دالة مستمرة في النقطة x_0 ، فتَصِحُّ المبادلة بين موضعي رمز النهاية $\lim$ ورمز الدالة f .

يترتب على جبر النهايات ، الممثل بالنظرية ١٧٥ر١ ، وعلى النتيجة السابقة ، النظرية التالية :

١٨٧ر١ – نظرية

اذا كانت g و f دالتين حقيقيتين مستمرتين على المجموعتين الجزئيتين T و S من $\mathbb{R}^n$ على الترتيب ، فان كلا من $f+g$ و fg دالة مستمرة على $S \cap T$. واذا كان $g(x) \neq 0$ أيا كان x من $S \cap T$ ، فان الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة كذلك على $S \cap T$.

البرهان .

لتكن x_0 نقطة ما من $S \cap T$.

(ا) فاذا كانت x_0 حدية لـ $S \cap T$ (من الواضح عندئذ أن x_0 تنتمي الى كل من S و T ، وأنها حدية لكل من هاتين المجموعتين) ، فاننا نجد ، استنادا الى ١٨٣ر١ ، أن

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad , \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

وبالرجوع الى المبرهنة ٧٥ر١ نجد

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = f(x_0)\, g(x_0) = (fg)(x_0)$$

وهذا يعني استنادا الى ٨٤ر١ أن $f+g$ و fg دالتان مستمرتان في x_0 .

واذا افترضنا الآن أن $g(x) \neq 0$ أيا كان x من $S \cap T$ فان $g(x_0) \neq 0$. وعندها نجد استنادا الى (٣)من ٧٥ر١ أن

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

الأمر الذي يعني ،استنادا الى ٨٤ر١ ، أن $\frac{f}{g}$ مستمرة في x_0.

(٢) أما اذا كانت النقطة x_0 غير حدية للمجموعة $S \cap T$ ، فاننا نجد أيضا استمرارهذه الدوال الثلاث ، ذلك أن أي نقطة x_0 من ساحة دالة ليست حدية لهذه الساحة ، هي بالضرورة نقطة استمرار للدالة (راجع الملاحظة ٨٥ر١) . ∎

٨٨ر١ - تعريف

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $T = f(S)$ مدى الدالة f ($f(S) \subseteq \mathbb{R}$).

لنفترض g دالة حقيقية لمتغير حقيقي معرفة* على T. عندئذ يمكن استحداث دالة حقيقية h ،معرفة على S ، ومحددة بالدستور

$$h(x) = g\left(f(x)\right)$$

تدعى هذه الدالة مركبة الدالتين f و g ، ونكتب

$$h = g \circ f$$

٨٩را - نظرية

لتكن الدالتان f و g كما في التعريف السابق ،ولنفترض أن f مستمرة في النقطة x_0 من S ، وأن g مستمرة في النقطة $f(x_0)$ من T . عندئذ تكون مركبة الدالتين $g \circ f$ مستمرة في x_0 .

البرهان. لما كانت g مستمرة في النقطة $f(x_0)$ ، فانه يترتب على (د) من ٨٢را ، أنه اذا كان V جوارا للنقطة $g\left(f(x_0)\right)$ ، فان $g^{-1}(V)$ جوار للنقطة $f(x_0)$ في الفضاء T . وبما أن f مستمرة في النقطة x_0 ، فاننا نجد أن $f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$ جوار للنقطة x_0 في الفضاء S . لكن

$$f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) = (g \circ f)^{-1}(V)$$

اذن فانه يترتب على ماسبق ، أنه اذا كان V جواراً للنقطة $(g \circ f)(x_0)$ ،فان $(g \circ f)^{-1}(V)$ جوار للنقطة x_0 في الفضاء S ، وهذا يعني ، استنادا الى (د) من ٨٢را ، أن الدالة $g \circ f$ مستمرة في النقطة x_0. ∎

من المعلوم أن الاستمرار يحفظ الترابط (١٩٤ر٥–[1])
بمعنى أنه اذا كانت f دالة مستمرة من فضاء متري X الى آخر ، وكانت S مجموعة جزئية مترابطة في X ، فان $f(S)$ مجموعة مترابطة . نستنتج من هذا مايلي :

١٨٩١ر١ – نظريـــة (بولزانو في القيمة المتوسطة)

اذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجموعة الجزئية المترابطة S من $\mathbb{R}^n$ ، وكانت y و x نقطتين من S ، وكان η عددا حقيقيا محصورا بين $f(y)$ ، $f(x)$ ، فهنالك عنصر (واحد على الأقل) من S بحيث يكون $f(\xi)=\eta$.

البرهان . لما كانت $f(S)$ مجموعة جزئية مترابطة في $\mathbb{R}$ ، كما سبق وذكرنا قبل قليل ، وكانت كل مجموعة جزئية مترابطة في $\mathbb{R}$ مجالا (١٦٤ر١) ، فان $f(S)$ مجال . ولما كانت x,y نقطتين من S ، فان $f(y)$ ، $f(x)$ تنتميان الى هذا المجال . وبالتالي ، فان η نقطة من المجال كذلك ، أي أن $\eta \in f(S)$. لذا ، فثمة نقطة (واحدة على الأقل) ξ ، بحيث أن $f(\xi)=\eta$. ∎

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $n=1$ ، فاننا نجد النتائج التالية :

١٨٩٢ر١ – نتيجة

اذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجال I من $\mathbb{R}$ ، وكانت x,y نقطتين من I ، وكان η عددا حقيقيا محصورا بين $f(y)$ ، $f(x)$ ، فهنالك عدد حقيقي ξ محصور بين x,y

بحيث $f(\xi)=\eta$.

البرهان . لنفترض مثلا أن $x<y$. عندئذ يكون $[x,y]$ مجالا ، أي مجموعة مترابطة . اذا رمزنا بـ g لمقصور f على $[x,y]$ ، فان g دالة مستمرة . عندئذ تبين النظرية ١٫٨٩١ أنه اذا كان η عددا حقيقيا محصورا بين $g(x)$ و $g(y)$ فهنالك عنصر ξ من $[x,y]$ بحيث $g(\xi)=\eta$. واذا لاحظنا أنه لافرق بين $g(\xi)$ ، $g(y)$ ، $g(x)$ وبين $f(x),f(y),f(\xi)$ على الترتيب (لأن g مقصور f على $[x,y]$)، فاننا نتيقن من صحة النتيجة قيد البرهان . ∎

١٫٨٩٣ - نتيجة

اذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة حقيقية مستمرة ، وكان $f(a)<0<f(b)$ ، فثمة عدد حقيقي ξ محصوربين a و b بحيث $f(\xi)=0$.

١٫٨٩٤ - نتيجة

اذا كانت $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة حقيقية مستمرة ، فلها نقطة ثابتة ،بمعنى أنه ثمة عددا حقيقيا ξ بحيث يكون $f(\xi)=\xi$.

البرهان . لنأخذ الدالة $\varphi(x)=f(x)-x$. فاذا كان أحد العددين $\varphi(a)$ أو $\varphi(b)$ مساويا للصفر ، أي اذا كان $f(a)=a$ أو $f(b)=b$ ، فان a أو b نقطة ثابتة للدالة f . لنفترض أن $\varphi(a)\neq 0$ و $\varphi(b)\neq 0$.

لما كان $f(a) \geq a$ و $f(b) \leq b$ ،فاننا نستنتج عندئذ أن $\varphi(a) > 0$ و $\varphi(b) < 0$. وبما أن φ مستمرة على $[a,b]$ ، فاننا نجد استنادا الى ١٨٩١ر١ ، أن ثمة عددا ξ محصورا بين a و b بحيث $\varphi(\xi) = 0$ ، أي $f(\xi) = \xi$ ، الأمر الذي يعني أن ξ نقطة ثابتة للدالة f . ∎

لننتقل الآن الى دراسة خواص الدوال الحقيقية المستمرة على مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}^n$. لقد ذكرنا في ١٥٧ر١ أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ متراصة ،هو أن تكون مغلقة ومحدودة . وقبل التطرق الى بعض الحقائق المتصلة بالدوال الحقيقية على مجموعات جزئية متراصة من $\mathbb{R}^n$ ، نذكّر بالتعريف التالي :

١٨٩٥ر١ - تعريف

نقول عن دالة حقيقية f على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ انها محدودة من الأعلى، اذا كان مداها $f(S)$ محدودا من الأعلى . ونقول عن f انها محدودة من الأدنى ، اذا كان مداها $f(S)$ محدودا من الأدنى . واذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى ، قلنا انها محدودة . وعندما تكون f غير خالية ومحدودة من الأعلى ، فان مسلمة التمام تؤكد أن لـ $f(S)$ حدا أعلى $\sup f(S)$. يدعى هذا الحد الحد الأعلى لـ f ، ويرمز له بـ $\sup f$ أو $\sup\limits_{x \in S} f(x)$. ويعرف الحد الأدنى لـ f ، الذي نرمز له

بـ $\inf f$ أو بِ $\inf_{x \in S} f(x)$ بصورة مماثلة . وتجدر بنا ملاحظة أن $\sup f$ (في حالة وجوده) هو عدد مثبت مستقل عن x . كذلك فقد يكون $\sup f$ قيمة لِ f ، وقد لايكون ، بمعنى أنه قد نجد نقطة x_0 من S ، بحيث يكون $f(x_0) = \sup f$ ، وقد لاتكون هذه النقطة موجودة . وفي الحالة الأولى ، نقول ان $\sup f$ هو القيمة الأكبر للدالة f على S ، أو نقول ان f تدرك حدها الأعلى على S . ونجد ملاحظات مماثلة فيما يتعلق بـ $\inf f$.

ولما كان $\mathbb{R}^n$ فضاء متريا ، فاننا نستنتج مباشرة صحة النظرية الشهيرة التالية (٦ر٢٤ – [1]) :

٨٩٦ر١ – نظرية (القيمة الأكبر والقيمة الأصغر)

لتكن f دالة حقيقية مستمرة على المجموعة الجزئية S المتراصة في الفضاء $\mathbb{R}^n$. عندئذ نجد أن :

(ا) الدالة f محدودة ، بمعنى أن هنالك عددا موجبا L ، بحيث يكون $|f(x)| < L$ أيا كان x من S .

(ب) الدالة تدرك كلا من حدها الأعلى وحدها الأدنى . ∎

يترتب على هذه النظرية ، وعلى كون خيال أي مجال وفق دالة حقيقية مستمرة لمتغير حقيقي مجالا كذلك ، واحدة من أهم نظريات الدوال الحقيقية المستمرة لمتغير حقيقي ، يُنص عليها فيما يلي :

٨٩٧ر١ – نظرية

اذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجال المغلق

والمحدود $[a, b]$ ، فان مدى هذه الدالة هو المجال المغلق المحدود [ك ، ن] ، حيث ك ، ن هما الحد الأعلى والحد الأدنى للدالة f على $[a, b]$. ∎

لتكن f دالة حقيقية على المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$. من المعلوم أنه اذا كانت f مستمرة ، فانه يقابل كلّ نقطة x_0 من S ، وكلّ عدد موجب ε ، عددٌ موجبٌ δ (تابع لـ x_0 و ε) ، بحيث أنه اذا كان x عنصرا من S يحقق الشرط $\|x - x_0\| < \delta$ ، فان $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. ويرد في هذا المقام السؤال التالي : اذا كان ε عددا موجبا اختياريا ، فهل يمكن ايجاد عدد موجب δ ، تابع لـ ε فقط ، بحيث يتحقق الشرط السابق أيا كان x_0 من S ؟

من الممكن ايراد أمثلة على دوال يتحقق فيها المطلب السابق ، ودوال آخر لايتحقق فيها هذا المطلب . ان صف الدوال من النمط الأول تدعى الدوال منتظمة الاستمرار .

١٫٨٩ – تعريف

نقول عن دالة حقيقية معرفة على المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ انها منتظمة الاستمرار على S ، اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد موجب δ ، بحيث أنه اذا كان x ، x' أي عنصرين من S يحققان الشرط $\|x - x'\| < \delta$ فان $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

ونترك للقارئ التحقق من أن الدالة الحقيقية $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ المعرفة بالدستور $f(x) = x^2$ منتظمة الاستمرار على $[0, 1]$ ، في حين أن الدالة $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

المعرفة بالدستور $g(x) = x^2$ ليست منتظمة الاستمرار على $\mathbb{R}$.

نستنتج من التعريف ١٫٨٩٨ أن كلَّ دالةٍ منتظمةِ الاستمرار مستمرةٌ، بيد أن العكس غير صحيح، فالدالة g في المثال السابق مستمرة، وليست منتظمة الاستمرار.

سنبين الآن أن مركبة دالتين منتظمتي الاستمرار دالة منتظمة الاستمرار.

١٫٨٩٩ – نظرية

لتكن f و g دالتين كما في التعريف ١٫٨٨. فاذا كانت f منتظمة الاستمرار على S، وكانت g منتظمة الاستمرار على $T = f(S)$، فان $g \circ f$ منتظمة الاستمرار على S.

البرهان. ليكن ε عددا موجبا ما. لما كانت g منتظمة الاستمرار على T، فثمة عدد موجب η، بحيث أنه اذا كان y, y' أي عنصرين من T يحققان الشرط $|y-y'|<\eta$، فان $|g(y)-g(y')|<\varepsilon$. وبما أن f منتظمة الاستمرار على S، فثمة عدد موجب δ، بحيث أنه اذا كان x و x' أي عنصرين من S يحققان الشرط $\|x-x'\|<\delta$، فان $|f(x)-f(x')|<\eta$. يترتب على ماسبق أنه يوجد لكل عدد موجب ε عدد موجب δ، بحيث أنه اذا كان x, x' أي عنصرين من S يحققان الشرط $\|x-x'\|<\delta$، فان $|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x')|<\varepsilon$، أي أن $g \circ f$ منتظمة الاستمرار على S. ∎

على الرغم من أن الدالة المستمرة ليست بالضرورة منتظمة الاستمرار ، الا أنه ثمة نظرية هامة (٦ر٢٥ – [١]) تقرر أنّ لافرق بين الاستمرار والاستمرار المنتظم على الفضاءات المتراصة . ويمكن أن نستنتج مباشرة من هذامايلي:

٨ر١٩٩١ – نظرية

اذا كانت f دالة حقيقية مستمرة على المجموعة الجزئية المتراصة S من $\mathbb{R}^n$ ،فان f منتظمة الاستمرار على S . ∎

لقد رأينا في (هـ) من ٨٢ر١ أن الدالة الحقيقية المستمرة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ تحفظ تقارب المتتاليات، بمعنى أنه اذا كانت $\{x_m\}, m\in N$ متتالية في S ،متقاربة من x_0 ، فان المتتالية $\{f(x_m)\}, m\in N$ لابد وأن تتقارب من $f(x_0)$. وسنبين الآن أن الدالة المنتظمة الاستمرار على S تحفظ أيضا المتتاليات الأساسية (متتاليات كوشي) ، بغض النظر من كون هذه المتتاليات متقاربة أو متباعدة .

٨ر١٩٩٢ – نظرية

اذا كانت f دالة حقيقية منتظمة الاستمرار على المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ ، وكانت$\{x_m\}, m\in N$ متتالية أساسية في S ، فان $\{f(x_m)\}, m\in N$ لابد وأن تكون متتالية أساسية في $\mathbb{R}$.

البرهان . انظر(٢٨ر٥ – [١])

تمـاريـــــــــن

(١-١)

اذا كان a_1 و a_2 عددين موجبين ، فأثبت أن التعريف

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 a_1 + x_2 y_2 a_2$$

يحدد جداء داخليا على $\mathbb{R}^2$. عم هذا على $\mathbb{R}^n$.

(١-٢)

ليكن X الفضاء المتجه المؤلف من كل المرتبات n من الأعداد الحقيقية من النمط

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

أثبت أن كلا من التعاريف التالية يحدد نظيما على X

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

(١-٣)

برهن أنه يمكن أن نضع بدلا على الشرط (ب) في التعريف ١ر٢٤ الشرط التالي :

$$\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$$

دون المساس بمفهوم النظيم. بين كذلك أن الشرط (آ) في التعريف المذكور ينتج من الشرطين (حـ) و (د) .

(١-٤)

نقول عن مجموعة A في فضاء متجه X انها محدبة ، اذا ترتب على كون x, y أي عنصرين من A أن كان

$$M = \{ z \in X : z = \alpha x + (1-\alpha) y , 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \} \subseteq A$$

تسمى M قطعة مستقيمة مغلقة طرفاها x, y ، كما تسمى كل نقطة أخرى z من M نقطة داخلية.

برهن أن الكرة الواحدية المغلقة

$$B'(0,1) = \{ x \in X : \|x\| \leqslant 1 \}$$

في فضاء منظم X هي مجموعة محدبة .

(١-٥)

نقول عن نظيم $\|\cdot\|$ على فضاء متجه X انه مكافئ لنظيم آخر $\|\cdot\|_0$ على X ، اذا وجد عددان $a, b > 0$ بحيث أنه اذا كان x أي عنصر من X ، فان

$$a \|x\|_0 \leqslant \|x\| \leqslant b \|x\|_0$$

برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية $\{x_m\}$
هي متتالية كوشي في الفضاء $(X, \|\cdot\|)$
هو أن تكون هذه المتتالية متتالية كوشي في الفضاء $(X, \|\cdot\|_0)$.

(١ـ٦)

اذا كان D متركا على الفضاء المتجه X، وكان D مولدا من نظيم وعرفنا $\tilde{D}$ كالتالي

$$\tilde{D}(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y \text{ عندما}) \\ D(x,y)+1 & (x \neq y \text{ عندما}) \end{cases}$$

فبين أن $\tilde{D}$ مترك على X ، وأن هذا المترك لايمكن أن يولد من نظيم .

(١ـ٨)

لقد رأينا في ٢٧را أن الفضاء $C[a,b]$ المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على $J = [a,b]$ هو فضاء منظم ، حيث النظيم محدد بالمساواة :

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$$

أثبت أن هذا النظيم لايمكن أن يكون مولدا من جـــــداء داخلـــــي .

(١ـ٩)

نتكن A, B مجموعتين جزئيتين من R^n و

برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية $\{x_m\}$ هي متتالية كوشي في الفضاء $(X, \|\cdot\|)$ هو أن تكون هذه المتتالية متتالية كوشي في الفضاء $(X, \|\cdot\|_0)$.

(١-٦)

اذا كان D متركا على الفضاء المتجه X، وكان D مولدا من نظيم وعرفنا $\tilde{D}$ كالتالي

$$\tilde{D}(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y \text{ عندما}) \\ D(x,y)+1 & (x \neq y \text{ عندما}) \end{cases}$$

فبين أن $\tilde{D}$ مترك على X ، وأن هذا المترك لايمكن أن يولد من نظيم .

(١-٨)

لقد رأينا في ٢٧را أن الفضاء $C[a,b]$ المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على $J = [a,b]$ هو فضاء منظم ، حيث النظيم محدد بالمساواة :

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$$

أثبت أن هذا النظيم لايمكن أن يكون مولدا من جـــداء داخلـــي .

(١-٩)

نتكن A, B مجموعتين جزئيتين من R^n و

نقطة حدية لـ $A \cap B$. بين أن x لابـد وأن تكون نقطة حدية لكل من A, B .

ثم أثبت أنه اذا كانت y نقطة حدية لـ $A \cap B$ ، فان y نقطة حدية لـ A أو لـ B .

(١-١٠)

لتكن $\{a_m\}$ متتالية محددة في $\mathbb{R}$ (أي أنه يوجد عدد M بحيث يكون $|a_m| \leqslant M$ أيا كان m من N) ، ولتكن $\{x_m\}$ متتالية في $\mathbb{R}^n$ بحيث أن $x_m \to 0$. برهن أن

$$a_m x_m \to 0$$

(١-١١)

أثبت أنه اذا كانت $\{x_m\}$ متتالية في $\mathbb{R}^n$ متقاربة من x ، و $\{a_m\}$ متتالية في $\mathbb{R}$ متقاربة من a ، فان المتتالية $\{a_m x_m\}$ متقاربة في $\mathbb{R}^n$ من ax .

(١-١٢)

اذا كانت $\{x_m\}$ و $\{y_m\}$ متتاليتين في $\mathbb{R}^n$ بحيث أن المتتالية $\{x_m + y_m\}$ متقاربة ، فهل من الضروري أن تتقارب المتتاليتان $\{x_m\}$, $\{y_m\}$ ؟

وهل من الضروري أن يكون

$$\lim_{m\to\infty} (x_m + y_m) = \lim_{m\to\infty} x_m + \lim_{m\to\infty} y_m$$

(١-١٣)

بين انطلاقا من التعريف ٢ر٥ا (ودون الاعتماد على نظرية ها ين – بوريل) ، أن الكرة المفتوحة

$$N(0,1) = \{ (x,y) : x^2+y^2 < 1 \}$$

ليست متراصة في الفضاء $\mathbb{R}^2$.

(١-١٤)

أثبت من التعريف ٢ر٥ا مباشرة أن الفضاء $\mathbb{R}^2$ ليس متراصا .

(١-١٥)

برهن مباشرة أنه اذا كانت A مجموعة متراصة في $\mathbb{R}^n$ ،وكانت B مجموعة جزئية مغلقة في A ، فان B متراصة في $\mathbb{R}^n$.

(١-١٦)

برهن أنه اذا كانت A مجموعة جزئية متراصة في $\mathbb{R}$ ،فان A لابد وأن تكون متراصة لدى اعتبارها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$.

(١-١٧)

اذا كانت A, B مجموعتين حزئيتين مترابطتين في $\mathbb{R}^n$ ، فأعط أمثلة تبين فيها أن $A \cap B$ ، $A \cup B$ و $A - B$ قد تكون مترابطة أو غير مترابطة .

(١-١٨)

اذا كانـــت A مجموعة جزئية مترابطة في $\mathbb{R}^n$ ، وكانت

x نقطة ملاصقة لـ A ، فأثبت أن $A \cup \{x\}$ مجموعة مترابطة .

(١-١٩)

اذا كانت A مجموعة جزئية محدبة (كما في التمرين ١-٤) في $\mathbb{R}^n$ ، فبرهن أنها لابد وأن تكون مترابطة .

(١-٢٠)

لتكن الدالة $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

(أ) ادرس وجود النهاية

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

(ب) أثبت أنه يوجد للدالة f نهاية L_a عندما يسعى (x,y) الى $(0,0)$ على طوال منحنى معادلته $y = g(x)$ يمر بالنقطة $(0,0)$ ويحقق الشرط $g'(0) = a$. أوجد قيمة L_a .

(١-٢١)

لتكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{(عندما } (x,y) = (0,2)) \\ \dfrac{[x^2+(y-2)^2+1]^{\frac{1}{2}} - 1}{x^2+(y-2)^2} & \text{(عندما } (x,y) \neq (0,2)) \end{cases}$$

(آ) أثبت أن $\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$

(ب) هل الدالة f مستمرة في النقطة $(0,2)$،
ولماذا ؟

(١-٢٢)

لتكن $f,g: \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ دالتين محددتين كالتالي:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$$

$$g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

(آ) أثبت أن النهاية $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ موجودة وتساوي 0.

(ب) بيد أن لاتوجد نهاية للدالة g في النقطة $(0,0)$.

(١-٢٣)

ادرس استمرار الدوال التالية:

(آ) الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0) \text{ عندما}) \\ 0 & ((x,y)=(0,0) \text{ عندما}) \end{cases}$$

في النقطة $(0,0)$

(ب) الدالة

$$g(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2} & \text{عندما } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{عندما } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

في النقطة $(0,0,0)$.

(حـ) الدالة

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x} & \text{عندما } x\neq 0\\ y & \text{عندما } x=0\end{cases}$$

على $\mathbb{R}^2$.

(١-٢٤)

لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{عندما } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{عندما } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن أن f دالة مستمرة عن كل مستقيم مار من مبدأ الاحداثيات ، دون أن تكون مستمرة في هذه النقطة .

(١-٢٥)

اذا كانت $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالتين مستمرتين ، فان الدالة $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ المحددة بالدستور

$$h(x)=\big(f(x),g(x)\big)$$

مستمرة على $\mathbb{R}$.

(١-٢٦)

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ عندما}) \\ 1-x & (x \in \mathbb{Q} \text{ عندما}) \end{cases}$$

بين أن f مستمرة في النقطة $\frac{1}{2}$ ، وليست مستمرة في سواها .

(١-٢٧)

أورد مثالا تبين فيه أن الاستمرار غير المنتظم لايحفظ المتتاليات الاساسية .

(١-٢٨)

برهن أن دالة دير يخليه $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ عندما}) \\ 0 & (x \in \mathbb{Q} \text{ عندما}) \end{cases}$$

غير مستمرة في أية نقطة من $\mathbb{R}$.

(١-٢٩)

اذا كانت $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ دالة محددة بالدستور

$$f(x, y) = (x+y, x-y)$$

فبين أن f مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

(١ — ٣٠)

لتكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ دالة محددة بالدستور

$$f(x, y) = (2x + y , x - 3y)$$

أثبت أن هذه الدالة مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

(١ — ٣١)

اذا كانت $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}^n$ ، وكان $f(x) \geq 0$ أيا كان x من $\mathbb{R}^n$ ،فبين أن $\sqrt{f}$ مستمرة على $\mathbb{R}^n$.

الفصل الثاني

مشتقات وتفاضلات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

سنورد في هذا الفصل نظرية اشتقاق ومفاضلة الدوال الحقيقية المعرفة على جزء من الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ ، حيث نفترض $n \geq 2$. ورغم وجود بعض الشبه بين هذه النظرية ونظرية اشتقاق ومفاضلة الدوال الحقيقية لمتغير حقيقي ، الا أن ثمة أوجها للخلاف بينهما ، يأتي في مقدمتها امكان الاقتراب من نقطة في $\mathbb{R}^n$ "باتجاهات مختلفة" ، وهذا أمر غير وارد في حالة الدوال الحقيقية لمتغير حقيقي .

وسنقتصر أحيانا على التعامل مع الدوال الحقيقية المعرفة على جزء من $\mathbb{R}^2$ ، وذلك بقصد اختصار الصيغ ، ومن السهل ، بعد الاستيعاب الجيد لهذه الدوال ، الانتقال الى نظريات مماثلة تماما للدوال الحقيقية المعرفة على جزء من $\mathbb{R}^n$ ، حيث $n \geq 2$.

١ر٢ – مشتقات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

١١ر٢ – تعريف

لتكن $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ دالة حقيقية ، ساحتها D جزء من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ نقطة داخلية في D . فاذا وجدت النهاية

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(c_1+h_1,c_2,\dots,c_n)-f(c_1,c_2,\dots,c_n)}{h_1} \quad (1)$$

فاننا نقول بأنه يوجد للدالة f مشتق جزئي بالنسبة للمتغير الأول x_1 في النقطة c . وعندئذ يرمز لهذه النهاية ، التي تسمى المشتق الجزئي للدالة f بالنسبة لـ x_1 في النقطة c ، بأحد الرموز التالية :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)\ ,\quad f_{x_1}(c)\ ,\quad D_1 f(c)$$

ومن الواضح أن هذا المشتق الجزئي ليس الا مشتق الدالة الحقيقية $f(x_1,c_2,\dots,c_n)$ للمتغير الحقيقي x_1 في النقطة $x_1=c_1$.

وتُعرّف المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة لـ $x_2,\dots,x_n$ في النقطة c بصورة مماثلة ، أي أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(c)=\lim_{h_2\to 0}\frac{f(c_1,c_2+h_2,\dots,c_n)-f(c_1,c_2,\dots,c_n)}{h_2}$$

. . . .

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(c) = \lim_{h_n \to 0} \frac{f(c_1, c_2, \ldots, c_n + h_n) - f(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{h_n}$$

وذلك في حال وجود هذه النهايات .

سنرمز للدالة

$$c \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)$$

ب $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ (أو ب f_{x_1} ، أو ب $D_1 f$) ، ومن الواضح أن هذه الدالة معرفة على مجموعة تلك النقاط الداخلية من $\mathcal{D}$ ، حيث تكون النهاية (1) موجودة . هذا ، ونعرف الدوال $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ (أو f_{x_2} ، أو $D_2 f$) و . . . و $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ (أو f_{x_n} أو $D_n f$) بصورة مماثلة . وتسمى الدوال

$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ المشتقات الجزئية الأولى ، أو اختصارا ، المشتقات الأولى للدالة f بالنسبة لـ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ على الترتيب .

٢ر١ر٢ – أمثلة

(١) لنأخذ الدالة $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالمساواة

$$f(x, y) = x^y$$

عندئذ تكون $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ دالتين لهما نفس ساحة f ، كما أن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\, x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \log x$$

(٢) اذا أخذنا الدالة $f: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالمساوة

$$f(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

فاننا نرى أن $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ، هي دوال لها نفس ساحة f ،ومعرفة بالمساويات:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

لنفرض الانّ أنه يوجد للدالة f المشتقات الجزئية الأولى

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ان كلا من هذه المشتقات الجزئية دالة حقيقية ، ساحتها جزء من $\mathbb{R}^n$. وبالتالي ، فمن الممكن أن يكون لكل من هذه الدوال (التي عدد ها n) مشتقات جزئية عددها n .

فمثلا ، اذا وجد لـ $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ مشتق جزئي بالنسبة لـ x_1 ، فاننا نرمز له بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ ، أو بـ $f_{x_1 x_1}$ ، أو بـ $D_1^2 f$.

واذا وجد لـ $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ مشتق جزئي بالنسبة لـ x_2 ، فاننا نرمز له بـ $f_{x_1 x_2}$ ، أو بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ أو بـ $D_2 D_1 f$.

وبصورة مماثلة ، فاننا نرمز بـ $f_{x_2 x_1}$ ،أو بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ أو بـ $D_1 D_2 f$ ، للمشتق الجزئي لـ f_{x_2} بالنسبة لـ x_1.

كما نرمز بـ $f_{x_2 x_2}$ أو بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ ، أو بـ $D_2^2 f$ ،للمشتق الجزئي لـ f_{x_2} بالنسبة لـ x_2 ، وهكذا .

وبالاضافة الى هذه المشتقات الجزئية الثانية ، فمن الممكن تعريف المشتقات الجزئية الثالثة على النحو التالي :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$$

كذلك ، فاننا نستعمل الرموز

$$D_1 D_2^2 f = f_{x_2 x_2 x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \quad D_1^3 f = f_{x_1 x_1 x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}, \ldots$$

هذا ، وتعرف المشتقات من مراتب أعلى بصورة مماثلة .

وهكذا ففي حالة الدالة $f(x, y)$ لمتغيرين ، فاننا نرمز لمشتقاتها من المرتبة m على النحو التالي :

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m}, \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y}, \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-2} \partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^m f}{\partial x^2 \partial y^{m-2}}, \frac{\partial^m f}{\partial x \partial y^{m-1}}, \frac{\partial^m f}{\partial y^m}$$

وواضح أن عدد هذه المشتقات هو $m+1$.

أما في حالة الدوال $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ لأكثر من

متغيرين ، فان المشتقات الجزئية من أي مرتبة تعرف بصورة مماثلة .

يطلق على المشتقات الجزئية من الشكل $\frac{\partial^m f}{\partial x_1^m}, \frac{\partial^m f}{\partial x_2^m}, \dots, \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}$ اسم المشتقات الجزئية <u>الصرفة</u> . أما المشتقات الجزئية التي يتم فيها الاشتقاق بالنسبة لأكثر من متغير ، فتسمى مشتقات جزئية <u>مختلطة</u> .

١٣ر٢ — أمثلة

(١) لنأخذ الدالة $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$f(x,y,z) = x^4 y^3 z^2$$

نلاحظ هنا أن

$$f_x = 4x^3y^3z^2,\quad f_{xy} = 12x^3y^2z^2,\quad f_{xyz} = 24x^3y^2z,\quad f_{xyzx} = 72x^2y^2z$$

$$f_y = 3x^4y^2z^2,\quad f_{yx} = 12x^3y^2z^2,\quad f_{yxx} = 36x^2y^2z^2,\quad f_{yxxz} = 72x^2y^2z$$

$$f_z = 2x^4y^3z,\quad f_{zx} = 8x^3y^3z,\quad f_{zxy} = 24x^3y^2z,\quad f_{zxyx} = 72x^2y^2z$$

(كان من المفروض أن نضع بعد رمز كل من المشتقات الجزئية السابقة القوس (x,y,z) ، الا أننا لم نفعل بقصد الاختصار) .

نلاحظ في المثال (١) تطابق المشتقات الجزئية ، المأخوذة بالنسبة لنفس المتغيرات . ويبين المثال

التالي عدم تحقق هذا التطابق بالضرورة .

٢) لتكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة محددة كالتالي :

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{(عندما } (x,y) = (0,0)) \\ \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{(عندما } (x,y) \neq (0,0)) \end{cases}$$

نلاحظ أن

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

كذلك ، نجد أنه في كل نقطة (x,y) مغايرة للنقطة $(0,0)$ ، فان

$$f_x(x,y) = y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$f_y(x,y) = x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

وبالتالي فان

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = +1$$

لذا نجد أن .

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$$

ان التساوي بين المشتقات الجزئية المختلطة ، والتي

تختلف في ترتيب الاشتقاق فقط ، (كما في المثال (١)) ، ليس أمرا حدث بالصدفة ، بل انه ينطبق على مجموعة واسعة من الدوال.

وما مهمة النظرية التالية الا البحث في هذا الموضوع.

١٤ر٢ — نظرية

لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة $\mathfrak{D}$ من $\mathbb{R}^2$ ، ولنفترض تحقق الشرطين التاليين:

(أ) المشتقات الجزئية f_x ، f_y ، f_{xy} ، f_{yx} موجودة في كل نقطة من $\mathfrak{D}$.

(ب) المشتقان المختلطان f_{xy} ، f_{yx} مستمران في نقطة (a,b) من $\mathfrak{D}$.

عندئذ يكون

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

البرهان : لما كانت النقطة (a,b) تنتمي الى الساحة المفتوحة $\mathfrak{D}$ ، فهنالك عدد موجب δ بحيث تكون النقطة $(a+h, b+k)$ واقعة في الساحة $\mathfrak{D}$ ، شريطة أن يكون $|h|<\delta$ و $|k|<\delta$. لنرمز بـ Δ للمقدار

$$\Delta = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$$

وبـ φ للدالة المساعدة المعرفة بالدستور

$$\varphi(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$$

عندئذ يكون

$$\Delta = \varphi(a+h) - \varphi(a)$$

ان الدالة φ قابلة للاشتقاق في المجال $]a-\delta, a+\delta[$
وذلك استنادا الى الشرط (آ) ،لذا فان المشتق

$$\varphi'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x, b) \qquad (2)$$

موجود في أي نقطة من المجال المذكور .

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة ، فاننا نجد أنه
يمكن التعبير عن Δ على النحو التالي :

$$\Delta = h\varphi'(a+\theta h) = h\,[\,f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)\,]$$

حيث θ عدد يحقق الشرط $0<\theta<1$ ، وهذا العدد هو
في الحالة العامة دالة لـ h, k . ولما كان المشتق
الثاني f_{xy} موجودا في $\mathcal{D}$ ، فاننا نجد بتطبيق
نظرية القيمة الوسطى ثانية ، لكن هذه المرة على
الدالة $f_x(a+\theta h, y)$ للمتغير y ، أن العبارة
الأخيرة لـ Δ يمكن أن تكتب على الشكل

$$\Delta = hk\,f_{xy}(a+\theta h, b+\theta_1 k) \qquad (3)$$

حيث θ_1 عدد يحقق الشرط $0<\theta_1<1$ ، وهذا العدد هو
في الحالة العامة دالة لـ h, k .

اذارمزنا الآن بـ ψ للدالة المساعدة المحددة بالدستور

$$\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

فاننا نجد ،بالقيام بخطوات مماثلة لتلك التي سلكناها
للحصول على العبارة (3) انطلاقا من φ ، أن

$$\Delta = hk\,f_{yx}(a+\theta_2 h, b+\theta_3 k) \qquad (4)$$

حيث θ_2, θ_3 عددان يحققان الشروط $0<\theta_2, \theta_3<1$ ، كما
أنهما في الحالات العامة دالتان لـ h, k .

نستنتج من (3) و (4) أن

$$f_{xy}(a+\theta h, b+\theta_1 k) = f_{yx}(a+\theta_2 h, b+\theta_3 k) \qquad (5)$$

لنأخذ المتتاليتين $\{h_m\}, \{k_m\}$ بحيث يكون $h_m \to 0, k_m \to 0$ عندما $m \to \infty$. عندئذ نجد عددا صحيحا موجبا M، بحيث أنه اذا كان $m \geq M$ ، فان $|k_m| < \delta$ و $|h_m| < \delta$.

وبالتالي فان المساواة التالية تكون صحيحة أيا كان m بحيث $m \geq M$:

$$f_{xy}(a+\theta h_m, b+\theta_1 k_m) = f_{yx}(a+\theta_2 h_m, b+\theta_3 k_m) \qquad (5)'$$

لما كانت المتتاليات

$$\{\theta(h_m, k_m)\}, \{\theta_1(h_m, k_m)\}, \{\theta_2(h_m, k_m)\}, \{\theta_3(h_m, k_m)\}$$

محدودة ، فمن السهل أن نلاحظ عندئذ أن

$$\theta h_m \to 0, \quad \theta_1 k_m \to 0, \quad \theta_2 h_m \to 0, \quad \theta_3 k_m \to 0$$

واستنادا الى المبرهنة ٤٣را ،فان

$$(a+\theta h_m, b+\theta_1 k_m) \to (a,b)$$

$$(a+\theta_2 h_m, b+\theta_3 k_m) \to (a,b)$$

ولما كانت الدالتان f_{xy}, f_{yx} مستمرتين في النقطة (a,b) ، فانه يترتب على الشق (حـ) من المبرهنة ٧٢را ، لدى أخذ نهايتي طرفي المساواة $(5)'$ عندما $m \to \infty$ ، أن

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

وهو المطلوب . ∎

وفي الحالة العامة ، فانه ترد النظرية التالية ، التي يتم اثباتها استنادا الى النظرية السابقة ١٤ر٢، الا أننا لن نتوقف عند اقامة البرهان عليها .

١٥ر٢ — نظرية

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^n$ ، ولنفترض تحقق الشرطين التالين :

(آ) كل المشتقات الجزئية الممكنة حتى المرتبة $m-1$ (بما فيها المرتبة $m-1$)، والمشتقات المختلطة من المرتبة m، موجودة جميعا في كل نقطة من $\mathcal{D}$.

(ب) المشتقات المختلطة من المرتبة m مستمرة جميعا في نقطة c من $\mathcal{D}$.

عندئذ تكون قيمة أي مشتق مختلط من المرتبة m في النقطة c مستقلة عن الترتيب الذي نجري به الاشتقاقات . ∎

وهكذا ،فاذا كانت $f(x,y)$ دالة لمتغيرين تحقق شروط : النظرية ١٥ر٢ ،فان

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^j \partial x^p \partial y^q} = \frac{\partial^m f}{\partial x^{i+p} \partial y^{j+q}}$$

وهكذا ،فان كل المشتقات الجزئية لهذه الدالة من المرتبة m هي التالية :

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^{m-i}} \qquad (0 \leq i \leq m)$$

كذلك ،فان كل المشتقات الجزئية من المرتبة m للدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ،يمكن أن تكتب،عند تحقق شــــروط النظرية السابقة،على الشكل

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^i \, \partial x_2^j \ldots \partial x_{n-1}^k \, \partial x_n^{m-(i+j+\cdots k)}}$$

حيث $0 \leqslant i + j + \cdots + k \leqslant m$.

١٦ر٢ – تعريـف

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية ساحتها $\mathcal{D}$ جزء من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن c نقطة داخلية للساحة $\mathcal{D}$. لنفترض u نقطـــة من $\mathbb{R}^n$ تحقق الشرط $\|u\| = 1$. فاذا وجدت النهاية

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h}$$

فاننا نسمي هذه النهاية المشتق الاتجاهي للدالة f في النقطة c ، أو مشتق الدالة f في النقطة c باتجاه u ، ونرمز لها بـ

$$\frac{\partial f}{\partial u}(c)$$

١٧ر٢ – مثـال

لتكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{(عندما } (x,y) = (0,0)\text{)} \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{(عندما } (x,y) \neq (0,0)\text{)} \end{cases}$$

لنأخذ النقطة $c=(0,0)$ والنقطة $u=(\alpha,\beta)$ ، حيث $\alpha^2+\beta^2=1$. نلاحظ أن $c+hu=hu=(h\alpha,h\beta)$ ،
وأن

$$f(c+hu)-f(c)=f(h\alpha,h\beta)=\frac{h^3\alpha\beta^2}{h^2(\alpha^2+\beta^2)}=h\alpha\beta^2$$

اذن

$$\frac{\partial f}{\partial u}(c)=\lim_{h\to 0}\frac{h\alpha\beta^2}{h}=\alpha\beta^2$$

٢ر٢ – تفاضلات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

١ر٢ر٢ – تعريف

لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية ساحتها $\mathcal{D}$ جزء من $\mathbb{R}^2$ ،
ولتكن (a,b) نقطة داخلية في $\mathcal{D}$. عندئذ توجد كرة
مفتوحة مركزها (a,b) ونصف قطرها δ محتواة في $\mathcal{D}$.
لنفرض h,k عددين حقيقيين يحققان الشرط
$\|(h,k)\|=\sqrt{h^2+k^2}<\delta$. فاذا وجد عددان A,B بحيث
يكون

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\eta\sqrt{h^2+k^2} \tag{6}$$

حيث $\eta(h,k)$ دالة لـ h,k تحقق الشرط

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\eta(h,k)=0 \tag{7}$$

فاننا نقول ان الدالة f قابلة للاشتقاق (أو مُفاضلة) في النقطة (a,b) . اذا وضعنا $k=0$ في (6) فاننا نجد

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=A\pm\eta$$

نستنتج من هنا أن $f_x(a,b)$ موجود ويساوي A . ونجد بصورة مماثلة أن $f_y(a,b)$ موجود ويساوي B . وهكذا فاذا كانت f قابلة للاشتقاق في (a,b) ، فاننا نجدأن

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+\eta\sqrt{h^2+k^2} \qquad (8)$$

حيث تحقق الدالة η الشرط (7) . وعندئذ يطلق اسم تفاضل f في (a,b) ، أو مشتق فريشيه للدالة f في النقطة (a,b) ، على الدالة الخطية $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$(d_{(a,b)}f)(h,k)=f_x(a,b)h+f_y(a,b)k \qquad (9)$$

٢٢ر٢ – أمثلة

(١) لنأخذ الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة كالتالي

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & ((x,y)=(0,0)\ \text{عندما}) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)\ \text{عندما})\end{cases}$$

من السهل التوصل الى أن

$$f_x(0,0)=0 \quad , \quad f_y(0,0)=0$$

لو كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة $(0,0)$ ، لوجب وجود دالة η تحقق الشرط (7) بحيث يكون

$$f(h,k)-f(0,0)=\eta\sqrt{h^2+k^2}$$

أو

$$\frac{hk}{h^2+k^2}=\eta\sqrt{h^2+k^2}$$

ولما كان واضحا عدم وجود نهايةٍ للدالة η عندما $(h,k)\to(0,0)$، فاننا نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $(0,0)$.

(٢) لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة بالمساواة

$$f(x,y)=x^2+2xy$$

سنبين أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق في أي نقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$.

في الحقيقة ،لدينا

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=(a+h)^2+2(a+h)(b+k)-a^2-2ab$$

$$f_x(a,b)=2a+2b$$

$$f_y(a,b)=2a$$

ونجد بعد التعويض في (8)، واجراء الاختصارات اللازمة، أن

$$h^2+2hk=\eta\sqrt{h^2+k^2}$$

وبالتالي ، ولما كان

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\eta=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

فان f قابلة للاشتقاق في النقطة الاختيارية (a,b) من $\mathbb{R}^2$.

ان تعميم التعريف ٢١ر٢ على الدوال الحقيقية التي ساحاتها أجزاء من $\mathbb{R}^n$ ، دون أن يكون $n=2$ بالضرورة، يتم على النحو التالي:

٢٣ر٢ – تعريف

لتكن $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ دالة حقيقية ساحتها $\mathcal{D}$ جزء من $\mathbb{R}^n$ ، لتكن $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ نقطة داخلية في $\mathcal{D}$. عندئذ توجد كرة مفتوحة ، مركزها c ، ونصف قطرها δ ، محتواة في $\mathcal{D}$. فاذا كانت $h=(h_1,h_2,\dots,h_n)$ نقطة في $\mathbb{R}^n$ تحقق الشرط $\|h\|<\delta$ ،ووجدت النقطة $A=(A_1,A_2,\dots,A_n)$ بحيث يكون

$$f(c+h)-f(c)=\langle A,h\rangle+\eta\,\|h\|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}A_ih_i+\eta\sqrt{h_1^2+h_2^2+\dots+h_n^2} \qquad (10)$$

بافتراض η دالة لـ h تحقق الشرط $\lim_{\|h\|\to 0}\eta(h)=0$ ، فاننا نقول ان الدالة f قابلة للاشتقاق (أو مفاضلة) في النقطة c .

نلاحظ أنه اذا وضعنا $h_2=\dots=h_n=0$ في (10)، فاننا نجد أن

$$\frac{f(c_1+h_1,c_2,\dots,c_n)-f(c_1,c_2,\dots,c_n)}{h_1}=A_1\pm\eta$$

نستنتج من هنا أن المشتق الجزئي $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)$ موجود ،ويساوي

A_1 . ونجد بصورة مماثلة ، أن المشتقات الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x_2}(c), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c)$ موجودة ، وتساوي $A_2, \dots, A_n$ بالترتيب .

نستنتج من هذا بأن المساواة (10) يمكن أن تكتب على الشكل

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) + \eta \|h\|$$

وعندما تكون f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة c ، فانه يطلق اسم تفاضل f في c ، أو مشتق فريشيه للدالة f في c ، على الدالة الخطية $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$(d_c f)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \qquad (11)$$

هذا ، ولتحقيق الانسجام بين الرموز المستعملة حاليا ، والرموز التي كانت تستعمل في الماضي ، فاننا نورد الدالة $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ المعرفة بالدستور

$$dx_i(x) = x_i$$

أي أن dx_i هي الدالة التي تقابل وفقها كل نقطة x من $\mathbb{R}^n$ ، الاحداثي الـ i لهذه النقطة .

عندئذ يمكن كتابة (11) بالشكل

$$(d_c f)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(c)}{\partial x_i} dx_i(h)$$

الأمر الذي يترتب عليه أن

$$d_c f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(c)}{\partial x_i} dx_i$$

٢ر٢٤ – نظرية

لتكن f دالة حقيقية ساحتها $\mathbb{D}$ جزء من $\mathbb{R}^n$ ،ولتكن c نقطة داخلية في $\mathbb{D}$. فاذا كانت f قابلة للاشتقاق في c ، فهنالك عددان موجبان K, δ ، بحيث أنه اذا تحقق الشرط $\|x-c\| < \delta$، فان

$$|f(x) - f(c)| < K \|x-c\| \qquad (12)$$

البرهان . لما كانت f قابلة للاشتقاق في c ، فانه يوجد عدد موجب δ_1، بحيث أنه اذا كانت $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ نقطة في $\mathbb{R}^n$ تحقق الشرط $\|h\| < \delta_1$ ، فهنالك نقطة $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ في $\mathbb{R}^n$ بحيث يكون

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta \|h\|$$

بافتراض η دالة لِـ h تحقق الشرط $\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h) = 0$.

نستنتج من هذا أنه اذا كان $\|h\| < \delta_1$ فان

$$\begin{aligned} |f(c+h) - f(c)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta \|h\| \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |A_i| |h_i| + |\eta| \|h\| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i| + |\eta| \right) \|h\| \end{aligned}$$

ولما كان $\lim_{\|h\|\to 0} \eta(h) = 0$ ،فانه يقابل العدد الموجب 1 ، عدد موجب δ_2 ، بحيث أنه اذا كان $0 < \|h\| < \delta_2$ ، فان $|\eta(h)| < 1$. ولو وضعنا $c+h=x$ و $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ فانه يترتب على ماسبق ، أنه اذا كان $\|x-c\| < \delta$ ، فاننا نجد

$$|f(x) - f(c)| < K \; \|x - c\|$$

حيث $K = \sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1$ ، وواضح أن $K > 0$. ∎

يترتب على هذه النظرية النتيجة الهامة التالية :

٢ر٢٥ – نظرية

لتكن f دالة حقيقية ساحتها $\mathcal{D}$ جزء من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن c نقطة داخلية في $\mathcal{D}$. فاذا كانت f قابلة للاشتقاق في c ، فانها مستمرة في هذه النقطة .

البرهان : ليكن ε عددا موجبا ما . عندئذ يترتب على النظرية ٢ر٢٤ أنه يوجد عددان موجبان K ، δ ، بحيث أنه اذا كان x عنصرا من $\mathcal{D}$ يحقق الشرط $\|x-c\| < \delta$ فان (12) تكون صحيحة . من الممكن دوما افتراض $\delta < \frac{\varepsilon}{K}$ ، ويترتب عندئذ على (12) أنه اذا كان x عنصرا من $\mathcal{D}$ يحقق الشرط $\|x-c\| < \delta$ ، فان $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ ، أي أن f مستمرة في النقطة c . ∎

٢ر٢٦ – مثال

سنبين بأن الدالة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المحددة بالمساواة

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (\text{عندما } y=0) \\ \dfrac{x}{y} & (\text{عندما } y\neq 0) \end{cases}$$

غير قابلة للاشتقاق في النقطة (0,0) . ويكفي لهذا الغرض، استنادا الى النظرية الأخيرة ، اثبات عدم استمرار الدالة f في هذه النقطة .

في الحقيقة ،لو كانت f مستمرة في (0,0) ، لقابل العددَ الموجبَ $\frac{1}{2}$ عددٌ موجبٌ δ ، بحيث أنه اذا كانت (x,y) نقطة تحقق الشرط

$$\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \tag{13}$$

فإنه يكون

$$|f(x,y)-f(0,0)|<\frac{1}{2}$$

اذا اخترنا النقطة $(x,y)=\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$، فمن السهل ملاحظة أنها تحقق الشرط (13)، في حين أن

$$\left|f\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)-f(0,0)\right|=\left|\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\right|=1>\frac{1}{2}$$

وهذا غير ممكن . اذن فالدالة f منقطعة في النقطة (0,0) ، وبالتالي غير قابلة للاشتقاق في هذه النقطة .

يبين المثال ٢٢ر٣ ، أن مجرد وجود المشتقات الجزئية لدالة f في نقطة داخلية من ساحة هذه الدالة، لا يكفي لضمان قابلية اشتقاق f في هذه النقطة ، وتبين

النظرية التالية ، أن فرض بعض الشروط الاضافية على f ، يجعل من هذه الدالة قابلة للاشتقاق .

٢٧ر٢ — نظريـة :

لتكن $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ دالة حقيقية ساحتها جزء $\mathfrak{D}$ من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن c نقطة داخلية في $\mathfrak{D}$. فاذا كانت كل المشتقات الجزئية الأولى

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{14}$$

موجودة في جوار ما للنقطة c ومستمرة في c ، فان f قابلة للاشتقاق في c .

البرهان : ليكن ε عددا موجبا ما . لما كانت المشتقات الجزئية (14) موجودة في جوار للنقطة c ، ومستمرة في هذه النقطة ، فانه توجد كرة مفتوحة

$$N(c,\delta)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x-c\|<\delta\}$$

بحيث أن

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\right|<\frac{\varepsilon}{n},\quad (i=1,2,\dots,n) \tag{15}$$

شريطة أن يكون $x\in N(c,\delta)$.

لتكن $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ نقطة ما ، ولنفترض أن $v_0, v_1, v_2,\dots, v_{n-1}, v_n$ هي النقاط

$$v_0=(u_1,u_2,\dots,u_n)=u$$

$$v_1=(c_1,u_2,\dots,u_n)$$

$$v_2=(c_1,c_2,\dots,u_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_{n-1} = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, u_n)$$
$$v_n = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n) = c$$

فاذا كان $0 < \|u-c\| < \delta$ ، فمن الواضح عندئذ أن

$$\|v_j - c\| < \delta \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

سنكتب الآن $f(u) - f(c)$ بالشكل

$$f(u) - f(c) = \sum_{j=1}^{n} \left[f(v_{j-1}) - f(v_j) \right]$$

وبتطبيق نظرية القيمة الوسطى على كلٍّ من الحدود المشكلة لهذا المجموع ، فاننا نجد

$$f(v_{j-1}) - f(v_j) = (u_j - c_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{v}_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

حيث $\bar{v}_j$ نقطة داخل القطعة المستقيمة الواصلة بين v_{j-1} ، v_j . وبالتالي فان

$$f(u) - f(c) - \sum_{j=1}^{n} (u_j - c_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) = \sum_{j=1}^{n} (u_j - c_j) \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{v}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \right]$$

ولما كان $|u_j - c_j| \leqslant \|u-c\|$ ، وكانت القيمة المطلقة لكل مقدار محصورين بين القوسين [ ] في الطرف الأيمن من المساواة السابقة أصغر من $\frac{\varepsilon}{n}$ ، لكون $\|\bar{v}_j - c\| < \delta$ ، حيث j أيٌّ من الاعداد $1, 2, \ldots, n$ فاننا نستنتج من المساواة الأخيرة أن

$$\left| f(u) - f(c) - \sum_{j=1}^{n} (u_j - c_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \right| < \varepsilon \|u-c\|$$

وذلك عندما $\|u-c\|<\delta$.

ولو وضعنا

$$u-c = h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

لوجدنا أن المتراجحة السابقة يمكن كتابتها بالشكل

$$\left| f(c+h) - f(c) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \right| < \varepsilon \|h\|$$

وذلك عندما $\|h\|<\delta$.

اذا رمزنا للمقدار المحصور بين اشارتي القيمة المطلقة في هذه المتراجحة بـ $\eta\|h\|$ ، لوجدنا أن

$$|\eta| < \varepsilon$$

وذلك عندما $\|h\|<\delta$. ان هذا يعني أن

$$\lim_{\|h\|\to 0} \eta = 0 \qquad (16)$$

وهكذا نكون قد وجدنا أن

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) + \eta \|h\|$$

حيث η دالة لـ h تحقق الشرط (16) ، الأمر الذي يعني تعريفا أن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة c . ▮

يترتب مباشرة على هذه النظرية مايلي :

٢ر٢٨ — نتيجة

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية ساحتها مجموعة $\mathcal{D}$

مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ ، ولنفترض أن كل المشتقات الجزئية الأولى للدالة f موجودة ومستمرة في D . عندئذ تكون f قابلة للاشتقاق في أي نقطة من D .

كذلك فانه يترتب على ٢٧ر٢ و ٢٥ر٢ النتيجة الهامة التالية :

٢٩ر٢ – نتيجة

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية ساحتها D جزء من $\mathbb{R}^n$ ولتكن c نقطة داخلية في D . فاذا كانت كل المشتقات الأولى للدالة f موجودة في جوار ما للنقطة c ، ومستمرة في c ، فان f مستمرة في c .

٣ر٢ – خواص الدوال القابلة للاشتقاق

٣١ر٢ – نظرية

لتكن D جزءًا من $\mathbb{R}^n$ و c نقطة داخلية في D ، ولتكن f, g دالتين حقيقيتين معرفتين على D وقابلتين للاشتقاق في c .

(أ) اذا كان α, β عددين حقيقيين ، فان الدالة $\alpha f + \beta g$ قابلة للاشتقاق في c ، كما أن

$$d_c(\alpha f + \beta g) = \alpha\, d_c f + \beta\, d_c g \qquad (17)$$

(ب) ان دالة الجداء fg قابلة للاشتقاق في c،

كما أن

$$d_c(fg) = f(c)(d_c g) + g(c)(d_c f) \qquad (18)$$

البرهان .

(أ) لما كانت f,g قابلتين للاشتقاق في النقطة c ، فانه يوجد عدد موجب δ ، بحيث أنه اذا كانت h نقطة من $\mathbb{R}^n$ تحقق الشرط $\|h\| < \delta_1$ ، فإن

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) + \eta_1 \|h\| \qquad (19)$$

$$g(c+h) - g(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(c) + \eta_2 \|h\| \qquad (20)$$

حيث η_1, η_2 دالتان لـ h بحيث أن $\eta_1, \eta_2 \to 0$ عندما $h \to 0$.

وبضرب طرفي المساواة الأولى بـ α والثانية بـ β ، ثم جمع المساواتين الناتجتين طرفا الى طرف ، فاننا نجد

$$(\alpha f + \beta g)(c+h) - (\alpha f + \beta g)(c)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f + \beta g)(c) + (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)\|h\|$$

ولما كان من الواضح أن $\alpha\eta_1 + \beta\eta_2$ عندما $h \to 0$ ، فاننا نستنتج أن الدالة $\alpha f + \beta g$ قابلة للاشتقاق ، وأن المساواة (17) صحيحة .

(ب) لدينا

$$(fg)(c+h) - (fg)(c) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)(c)$$

$$= f(c+h)\left[g(c+h) - g(c) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(c)\right]$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(c)\right)\left[f(c+h)-f(c)\right]$$

$$+\,g(c)\left[f(c+h)-f(c)-\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\right] \quad (21)$$

وبما أن f قابلة للاشتقاق في النقطة c ، فهي مستمرة فيها . وبالتالي ،فانه يترتب على النظرية ٢٤ر٢ ، أن ثمة عددين موجبين K و δ_2 ، بحيث أنه اذا تحقق الشرط $\|h\| < \delta_2$ ، فان

$$|f(c+h)| - |f(c)| < |f(c+h) - f(c)| < K\,\|h\| \quad (22)$$

اذن اذا كان $\|h\| < \delta_2$ ،فان

$$|f(c+h)| < |f(c)| + K\,\|h\| < |f(c)| + K\,\delta_2 = M$$

يترتب على هذا وعلى (19) و (20) و (22) أنه لدى تحقق الشرط $\|h\| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ،فان القيمة المطلقة للطرف الأيمن من (21) تكون أصغر من المقدار

$$\left(M|\eta_2| + K\left|\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(c)\right| + |g(c)|\,|\eta_1|\right)\|h\|$$

ولما كان واضحا أن المقدار المحصور بين القوسين يسعى الى الصفر عندما $h \to 0$ ،فاننا نستنتج أنه اذا رمزنا للطرف الأيسر من (21) بالشكل $\eta\,\|h\|$ ،فان $\eta \to 0$ عندما $h \to 0$ ، أي أن fg دالة قابلة للاشتقاق

في النقطة c ، وأن $(d_c(fg))(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)(c)$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \left[f(c) \frac{\partial g}{\partial x_i}(c) + g(c) \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \right]$$

$$= f(c) \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(c) + g(c) \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

$$= f(c) \left[(d_c g)(h) \right] + g(c) \left[(d_c f)(h) \right]$$

$$= \left[f(c)(d_c g) + g(c)(d_c f) \right](h)$$

وبذا يكتمل البرهان . ∎

سننتقل الآن الى نظرية تتعلق بقابلية اشتقاق مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق . وتشكل هذه النظرية احدى الدعامات الأساسية في نظرية الدوال القابلة للاشتقاق .

٣٢ر٢ — نظرية

لتكن $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ دالتين حقيقيتين معرفتين على جزء D من $\mathbb{R}^2$ ، ولنفرض أن هاتين الدالتين قابلتان للاشتقاق في النقطة الداخلية (a,b) من D .

لتكن $f(u,v)$ دالة حقيقية معرفة على D' حيث

$$\mathbb{R}^2 \supseteq D' \supseteq \{ (u(x,y), v(x,y)) : (x,y) \in D \}$$

لنفترض أن $(u(a,b), v(a,b))$ ، والتي سنرمز لها بـ (α, β) ، داخلية في D' ، وأن f قابلة للاشتقاق

في هذه النقطة . عندئذ تكون الدالة $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالمساواة

$$g(x,y) = f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$$

قابلة للاشتقاق في النقطة (a,b) ، كما أن المشتقين الجزئيين لهذه الدالة في النقطة (a,b) يعطيان بالدستورين

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial u}(\alpha,\beta)\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial v}(\alpha,\beta)\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) \qquad (23)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial u}(\alpha,\beta)\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial v}(\alpha,\beta)\frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \qquad (24)$$

<u>البرهان</u> . لنورد بقصد الاختصار الرموز التالية :

$$u_x(a,b) = u_x \ , \ u_y(a,b) = u_y \ , \ v_x(a,b) = v_x \ , \ v_y(a,b) = v_y$$

$$f_u(\alpha,\beta) = f_u \ , \ f_v(\alpha,\beta) = f_v \qquad (25)$$

لما كانت (a,b) داخلية في $\mathbb{D}$ ، فهنالك عدد موجب δ ، بحيث تكون النقطة $(a+h, b+k)$ واقعة في $\mathbb{D}$ ، شريطة أن يكون $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$. وبالتالي ، فاذا جققت h, k هذا الشرط ، فان المقادير $g(a+h, b+k)$ ، $u(a+h,b+k)$ ، $v(a+h,b+k)$ موجودة .

واستنادا الى قابلية الاشتقاق للدالتين u, v في النقطة (a,b) ، وللدالة g في النقطة (α,β) ، فاننا نجد استنادا الى ٢١ر٢ أن :

$$\Delta u = u(a+h, b+k) - u(a,b) = hu_x + ku_y + \eta_1\sqrt{h^2+k^2} \qquad (26)$$

$$\Delta v = v(a+h, b+k) - v(a,b) = hv_x + kv_y + \eta_2\sqrt{h^2+k^2} \qquad (27)$$

$$\Delta g = g(a+h, b+k) - g(a,b)$$
$$= f\big(u(a+h, b+k), v(a+h, b+k)\big) - f\big(u(a,b), v(a,b)\big)$$
$$= f(\alpha+\Delta u, \beta+\Delta v) - f(\alpha, \beta)$$
$$= \Delta u f_u + \Delta v f_v + \eta_3 \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2} \qquad (28)$$

حيث η_1, η_2 دالتان لـ (h,k)، بحيث أن $\eta_1, \eta_2 \to 0$ عندما $(h,k) \to (0,0)$. أما بالنسبة لـ η_3، فانها دالة لـ $(\Delta u, \Delta v)$ بحيث أن $\eta_3 \to 0$ عندما $(\Delta u, \Delta v) \to (0,0)$.

ولما كان $\Delta u \to 0, \Delta v \to 0$ عندما $(h,k) \to (0,0)$، فاننا نستنتج أن $\eta_3 \to 0$ عندما $(h,k) \to (0,0)$.

وبتعويض (26) و (27) في (28)، فاننا نجد

$$\Delta g = f_u\left(h u_x + k u_y + \eta_1 \sqrt{h^2+k^2}\right)$$
$$+ f_v\left(h v_x + k v_y + \eta_2 \sqrt{h^2+k^2}\right) + \eta_3 \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$$
$$= h(f_u u_x + f_v v_x) + k(f_u u_y + f_v v_y) + \eta \sqrt{h^2+k^2} \qquad (29)$$

حيث

$$\eta = f_u \eta_1 + f_v \eta_2 + \eta_3 \frac{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

وبما أنه يترتب على (26) و (27) أن

$$|\Delta u| \leqslant |h|\,|u_x| + |k|\,|u_y| + |\eta_1| \sqrt{h^2+k^2}$$
$$\leqslant \left(|u_x| + |u_y| + |\eta_1|\right) \sqrt{h^2+k^2}$$

$$|\Delta v| \leqslant |h|\,|v_x| + |k|\,|v_y| + |\eta_2| \sqrt{h^2+k^2}$$
$$\leqslant \left(|v_x| + |v_y| + |\eta_2| \right) \sqrt{h^2+k^2}$$

وأن $\eta_1 \to 0, \eta_2 \to 0$ عندما $(h,k) \to (0,0)$، فانه يغدو من السهل التحقق من وجود عدد موجب C ، بحيث أن

$$|\Delta u| \leqslant C\sqrt{h^2+k^2} \;, \quad |\Delta v| \leqslant C\sqrt{h^2+k^2}$$

وبالتالي فان

$$\frac{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant \sqrt{2}\, C$$

نستنتج مما سبق أن $\eta \to 0$ عندما $(h,k) \to (0,0)$. وبالعودة الى المساواة (29)، نستنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق في النقطة (a,b) ، كما أن مشتقها الجزئي بالنسبة لـ x في النقطة (a,b) موجود ، وهو معامل h في (29)، وأن مشتقها الجزئي بالنسبة لـ y في النقطة (a,b) موجود ، وهو معامل k في (29). فاذا أضفنا الى ذلك أننا استعملنا خلال سردنا للنظرية الرموز (25) ، فاننا نستنتج صحة الدستورين (23) و (24). ∎

يترتب على هذه النظرية والنتيجة ٢٨ر٣ النظرية التالية :

٣٣ر٢ - نظرية

لتكن $u(x,y), v(x,y)$ دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعة المفتوحة D في $\mathbb{R}^2$ ، ولنفترض أن لهاتين الدالتين مشتقات أولى مستمرة في D . ولتكن $f(u,v)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة D' ،بحيث أن

$$\mathbb{R}^2 \supseteq D' \supseteq \{(u(x,y), v(x,y)) : (x,y) \in D\}$$

فاذا وجد للدالة $f(u,v)$ مشتقان أولان مستمرات في D' فانه يوجد للدالة $g: D \to \mathbb{R}$ المعرفة بالمساواة

$$g(x,y) = f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$$

مشتقان أولان مستمران في D معينان بالدستورين

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x} \tag{30}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y} \tag{31}$$

<u>البرهان</u>. لما كانت أي نقطة في D داخلية (لأن D مفتوحة) ،فان شروط المبرهنة ٣٢ر٢ محققة في أي نقطة من D . لذا فان g قابلة للاشتقاق في D ، كما أن مشتقيها الجزئيين يعطيان بالدستورين (23) و (24) حيث (a,b) أي نقطة من D و (α,β) النقطة المقابلة لـ (a,b) ، بحيث تمسح هذه النقطة مجموعة تعريف الدالة f . وبالتالي ، فان المشتقين الجزئيين للدالة g

في D ، أي $\frac{\partial g}{\partial y}$ ، $\frac{\partial g}{\partial x}$ يعطيـــان

بالدستورين (31) ، (30) . واستنادا الى كـــون كل من جداء ومجموع دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة، فانه يترتب على (31) و (30) أن المشيقين الجزئييـــن $\frac{\partial g}{\partial y}$ ، $\frac{\partial g}{\partial x}$ مستمران في D . ∎

ان النظريتين ٣٢ر٢ و ٣٣ر٢ تشكلان حالتين خاصتين مـــن النظريتين التاليتين ، واللتين نلقى مهمة اثباتهمـــا على عاتق القارئ ، نظرا للشبه الكبير بين طريقتـــي اثباتهما وطريقتي اثبات النظريتين ٢٣٢ و ٣٣ ر٢ .

٣٤ر٢ – نظريـــة

لتكـــن

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$$

دوال حقيقية معرفة على جزء D من R^m ، ولنفتـــرض أن هذه الدوال قابلة للاشتقاق في النقطة الداخليـــة c من D ، ولتكن $f(u)=f(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ دالة حقيقيـــة معرفة على D' ، حيث

$$R^n \supseteq D' \supseteq \{(u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x)) : x\in D\}.$$

لنفترض أن النقطة $u(c)=(u_1(c),\ldots,u_n(c))$ داخلية في D' ،

وأن f قابلة للاشتقاق في هذه النقطة . عندئذ تكون الدالة المركبة $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالمساواة

$$g(x) = f\left(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\right) = f\left(u(x)\right)$$

قابلة للاشتقاق في النقطة c ، كما يكون

$$1.\ \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\left(u(c)\right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(c), \quad (i = 1, \ldots, m) \quad (32)$$

٥ ـ ٣٤ ـ نظرية

لتكن

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$$

دوال حقيقية معرفة على جزء مفتوح $\mathbb{D}$ من $\mathbb{R}^m$ ، ولنفترض أن لهذه الدوال مشتقات أولى مستمرة في $\mathbb{D}$ ، ولتكن $f(u) = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة $\mathbb{D}'$ ، حيث

$$\mathbb{R}^n \supseteq \mathbb{D}' \supseteq \left\{ \left(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\right) : x \in \mathbb{D} \right\}$$

فاذا وجد للدالة f مشتقات أولى مستمرة في $\mathbb{D}'$ ، فانه يوجد للدالة $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالمساواة

$$g(x) = f\left(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\right) = f\left(u(x)\right)$$

مشتقات أولى مستمرة في $\mathbb{D}$ تعطى بالدستور :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(u)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (i=1,\dots,m) \qquad (33)$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $m=1$ ، فان الدالة $u:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ ، والمعرفة بالمساواة

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$$

تسمى منحنياً . فاذا وجد للدوال الحقيقية للمتغير الحقيقي $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ مشتقات أولى مستمرة في $[a,b]$ ، فاننا نقول عن هذا المنحني انه قابل للاشتقاق باستمرار . واذا كانت $f(u) = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ دالة معرفة على مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ تحوي مجموعة قيم الدالة u ، فان النظرية ٢ر٣٥ تؤكد بأن للدالة $f(u(x))$ مشتقا مستمرا على $]a,b[$ ،وأن قيمة هذا المشتق في نقطة x من $]a,b[$ تعطى بالدستور

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}(u(x)) \frac{du_j(x)}{dx} \qquad (34)$$

هذا ، ومن الممكن التحقق،لدى اثبات النظرية ٢ر٣٥،أن الدستور (34) يصح في النقطتين $x=a, x=b$ ،وعندها يعني $\frac{d}{dx}$ المشتق الأيمن والمشتق الأيسر على الترتيب .

٢ر٣٦ — أمثلة

لتكن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة معطاة بالمساواة

$$f(y,z) = y^2 - z^2 \qquad (35)$$

ولنفرض أن $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتان محددتان كالتالي :

$$y(x) = ax^2 \ , \quad z(x) = 2ax \ , \qquad (a \in \mathbb{R}) \quad (36)$$

لدينا في هذا الحالة $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ ، حيث

$$u_1(x) = ax^2 \ , \quad u_2(x) = 2ax$$

وبالتالي فان

$$f(u(x)) = f(u_1(x), u_2(x)) = u_1^2(x) - u_2^2(x)$$

وهذا يعني أن

$$f(u) = u_1^2 - u_2^2$$

لذا فانه يترتب على (35) أن

$$\frac{d f(u(x))}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u(x)) \frac{d u_1(x)}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u(x)) \frac{d u_2(x)}{dx}$$

$$= 2u_1(x)(2ax) - 2u_2(x)(2a)$$

$$= (2a^2x)(2ax) - 2(2ax)(2a) = 4a^2x^3 - 8a^2x$$

هذا ومن الممكن التحقق من صحة هذه النتيجة ، وذلك بالتعويض المباشر لـ (36) في (35) ، ثم بالاشتقاق المباشر بالنسبة للمتغير x .

تمـاريـــــــــــــــــــــن

(٢ – ١)

لتكن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{(عندما } (x,y)=(0,0)\text{)} \\ \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\sin(x-y) & \text{(عندما } (x,y)\neq(0,0)\text{)} \end{cases}$$

أثبت أن

$$f_x(0,0)=0\ ,\ f_y(0,0)=0\ ,\ f_{xx}(0,0)=0\ ,\ f_{yy}(0,0)=0$$

$$f_{xy}(0,0)=-1\ ,\ f_{yx}(0,0)=1$$

(٢–٢)

لتكن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2 \operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{Arctg}\dfrac{x}{y} & \text{(عندما } (x,y)\neq(0,0)\text{)} \\ 0 & \text{(عندما } x=0 \text{ أو } y=0\text{)} \end{cases}$$

(نفترض هنا أن $|\operatorname{Arctg} u| < \frac{\pi}{2}$)

أثبت أن

$$f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0\ ,\ f_{xy}(0,0)=-1,\ f_{yx}(0,0)=1$$

(٢-٣)

لتكن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6+2y^2} & ((x,y)\neq(0,0) \text{ عندما}) \\ 0 & ((x,y)=(0,0) \text{ عندما}) \end{cases}$$

بين أنه يوجد للدالة f مشتق في النقطة $(0,0)$ في أي تجاه ، في حين أن f ليست مستمرة في هذه النقطة .

(٢-٤)

لتكن $f:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{R}$ دالة محددة بالدستور

$$f(x)=\|x\|^{2-n} \qquad (n\geq 3)$$

أثبت أن

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)=0$$

(٢-٥)

لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بالمساواة

$$f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{2}{3}}$$

حدد من بين المشتقات

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(0,0)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial e}(0,1) \qquad \left(e=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

ماكان موجودا منها ، واحسب في حال وجود المشتق قيمته العددية .

(٢-٦)

لتكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة معرفة بالدستور

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (\text{عندما } (x,y) = (0,0)) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (\text{عندما } (x,y) \neq (0,0)) \end{cases}$$

بين أن المشتقين الجزئيين

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

موجودان ويساويان الصفر . أثبت أن مشتق الدالة f في النقطة $(0,0)$ باتجاه $u(a,b)$ غير موجود في الحالة $ab \neq 0$. برهن أن f غير مستمرة في النقطة $(0,0)$.

(٢-٧)

لتكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة معرفة كالتالي :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & (\text{عندما } x,y \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (\text{فيما عدا ذلك}) \end{cases}$$

أثبت أن f قابلة للاشتقاق في النقطة $(0,0)$.

(٢-٨)

لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ الدالة :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{(عندما } (x,y)\neq(0,0))\\ 0 & \text{(عندما } (x,y)=(0,0))\end{cases}$$

برهن أن مشتق f في النقطة $(0,0)$ باتجاه أي متجه $u(a,b)$ موجود ، وأنه اذا كان $a\neq 0$ فان

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\frac{b^2}{a}$$

أثبت أن f ليست مستمرة ، وبالتالي ليست قابلة للاشتقاق في النقطة $(0,0)$.

(٢-٩)

لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ الدالة :

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{(عندما } (x,y)\neq(0,0))\\ 0 & \text{(عندما } (x,y)=(0,0))\end{cases}$$

برهن أن f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ ، الا أن مشتقيها $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ ليسا محدودين (وبالتالي ليسا مستمرين) في جوار للنقطة $(0,0)$.

(٢-١٠)

لتكن f دالة حقيقية ساحتها المستوي الاحداثي $\mathbb{R}^2$ بعد حذف المحور Oy منه ، والمحددة كالتالي :

$$f(x,y) = \mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}$$

ولتكن $x,y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ الدالتين

$$x(t) = \cos t \quad , \quad y(t) = \sin t$$

احسب المقدار $\frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t)\right)$ بطريقتين مختلفتين .

(٢-١١)

لتكن $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على جزء $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^2$ ، ولتكن (a,b) نقطة داخلية في $\mathcal{D}$. فاذا افترضنا أن الدالة f_x موجودة في جوار B للنقطة (a,b) ومستمرة في هذه النقطة ، في حين أن f_y موجودة فقط في الجوار B ، فأثبت أن f قابلة للاشتقاق في (a,b) .

(٢-١٢)

عمم المسألة السابقة على الدوال لعدة متغيرات بحيث نحصل على نظرية أعم النظرية ٢٧ر٢ .

(٢-١٣)

لتكن $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على جزء $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^2$ ، ولتكن (a,b) نقطة داخلية في $\mathcal{D}$. فاذا كان f_x, f_y

محدودين في جوار للنقطة (a,b)، فان f مستمرة في هذه النقطة .

(٢-١٤)

أوجد $(d_c f)(x-c)$ في كل من الحالات التالية :

(أ) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ هي الدالة

$$f(x,y)=x^3+4xy^2+2xy\sin x$$

و c هي النقطة $(0,-2)$

(ب) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ هي الدالة .

$$f(x,y,z)=e^{-(x+y+z)}$$

و c هي النقطة $(0,0,0)$.

(حـ) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ هي الدالة

$$f(x)=\log(1+x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n)$$

والنقطة c هي النقطة الصفرية .

(د) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ هي الدالة

$$f(x)=\|x\|^{2p}$$

و c هي النقطة $(1,1,\ldots,1)$.

(٢-١٥)

لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+y^2\sin\frac{1}{y}, & (x\neq 0, y\neq 0 \text{ عندما}) \\ x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0, y=0 \text{ عندما}) \\ y^2\sin\frac{1}{y} & (x=0, y\neq 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x=0, y=0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

أثبت أن f قابلة للاشتقاق في النقطة $(0,0)$ ، في حين أن f_x, f_y ليسا مستمرين في هذه النقطة .

(٢–١٦)

لتكن $f: D \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}^2$ ، ولتكن (a,b) نقطة داخلية في D . برهن أنه اذا كانت الدالتان f_x, f_y قابلتين للاشتقاق في (a,b) فان

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

(٢–١٧)

لتكن $f: D \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن c نقطة داخلية من D ،برهن أنه اذا كانت الدالتان $f_{x_j x_i}$ و $f_{x_i x_j}$ قابلتين للاشتقاق في النقطة

فإن c

$$f_{x_i x_j}(c) = f_{x_j x_i}(c)$$

(٢–١٨)

برهن أنه اذا كانت $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق في النقطة (x_0, y_0) وكان

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - a - b(x-x_0) - c(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

فإن

$$c = f_y(x_0, y_0) \quad , \quad b = f_x(x_0, y_0) \quad , \quad a = f(x_0, y_0)$$

(٢–١٩)

لتكن $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دالة حقيقية ساحتها جزء D من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ نقطة داخلية في D . برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون f قابلة للاشتقاق في النقطة c ، هو أن تتحقق المساواة

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - c_i)}{\|x - c\|} = 0$$

حيث $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ثوابت حقيقية .

(٢–٢٠)

لتكن f دالة حقيقية ساحتها جزء D من $\mathbb{R}^n$ ،

بحيث أنه اذا كان x عنصرا من D ، فان $tx \in D$

أيا كان العدد الموجب t ، نقول من f انها متجانسة من الدرجة σ اذا كان

$$f(tx) = t^{\sigma} f(x)$$

فاذا افترضنا أنه يوجد للدالة f مشتقات أولى مستمرة على D ، فبرهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون f متجانسة من الدرجة σ هو أن تتحقق المساواة

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sigma f$$

(٢-٢١)

لتكن $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالتين حقيقيتين بحيث أن

$$g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$$

أيا كان (x, y) من $\mathbb{R}^2$. فاذا افترضنا أنه يوجد للدالة f مشتقات جزئية مستمرة من المرتبة الثانية ، فاحسب المقدار

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

بدلالة مشتقات الدالة f .

(٢-٢٢)

لتكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ الدالتين

$$f(x,y)=x^2+y^2 \quad , \quad g(t)=(3t+1\,,\,2t-3)$$

فاذا افترضنا أن $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ هي الدالة

$$F(t)=(f\circ g)(t)$$

فاحسب $F'(t)$ بطريقتين مختلفتين .

(٢-٢٣)

لتكن $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ الدالتين

$$f(x,y,z)=xyz \quad , \quad g(s,t)=(3s+st\,,\,s\,,\,t)$$

فاذا افترضنا أن $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ الدالة

$$F(s,t)=(f\circ g)(s,t)$$

فاحسب $\frac{\partial F}{\partial t}$ ، $\frac{\partial F}{\partial s}$ بطريقتين مختلفتين .

(٢-٢٤)

لتكن $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^2$ ، ولتكن $g:]0,\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ الدالة

$$g(r,\theta)=(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)$$

فاذا كان $F=f\circ g$، فالمطلوب حساب المشتقين $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ ، $\frac{\partial F}{\partial r}$ ، ثم بين أن

$$\left[\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\right]^2+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right]^2$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right]^2$$

(٢-٢٥)

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

(أ) اذا كان $F(x,y) = f(x,y)$ فأثبت أن

$$x \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

أيا كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$.

(ب) اذا كان $F(x,y) = f(ax+by)$ ، حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ، فأثبت أن

$$b \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = a \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

أيا كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$.

(حـ) اذا كان $F(x,y) = f(x^2+y^2)$ ، فأثبت أن

$$y \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

أيا كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$.

(د) اذا كان $F(x,y) = f(x^2-y^2)$ ، فأثبت أن

$$y \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + x \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$$

أيا كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$.

(٢-٢٦)

لتكن $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين لهما مشتقات جزئية مستمرة على $\mathbb{R}$ حتى المرتبة الثانية .

(أ) اذا كان $c \in \mathbb{R}$ وكان

$$u(x,y) = f(x+cy) + g(x-cy)$$

فبين أن الدالة $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تحقق المعادلة "الموجيّة" التالية :

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

أيا كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$.

(ب) اذا كان

$$v(x,y) = f(3x+2y) + g(x-2y)$$

فأثبت أن الدالة $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تحقق المعادلة

$$4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y) - 3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

الفصل الثالث

تطبيقات الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات

١ر٣ نظرية القيمة الوسطى ونظرية تايلور

١١ر٣ – نظرية (القيمة الوسطى)

لتكن $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ دالة حقيقية ساحتها $\mathcal{D}$ جزء مفتوح من $\mathbb{R}^n$. لنفرض أن $\mathcal{D}$ تحوي النقطتين $c\,,\,c+h$ ، والقطعة المستقيمة S الواصلة بينهما . فاذا كانت جميع المشتقات الاولى للدالة f مستمرة على $\mathcal{D}$ ، فان

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c+\theta h)$$

حيث $0<\theta<1$

البرهان . لتكن $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ دالة محددة بالمساواة

$$\varphi(t) = f(c+th) = f(c_1 + th_1, \ldots, c_n + th_n)$$

واستنادا الى الدستور (34) الناتج عن النظرية ٣٥ر٢ من الفصل الثاني ، فان المشتق $\varphi'(t)$ موجود ويعطى بالمساواة

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c+th)$$

وباستعمال نظرية القيمة الوسطى للدالة الحقيقية لمتغير حقيقي ، فانه يمكننا كتابة

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \qquad (0<\theta<1)$$

وهذا يعني أن

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c+\theta h)$$

وهو المطلوب . ∎

يترتب على هذه النظرية النتيجة الهامة التالية :

١٢ر٣ - نظرية

اذا كان للدالة $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ المعرفة على الجزء المفتوح والمترابط D من $\mathbb{R}^n$ مشتقات أولى

مستمرة في $\mathcal{D}$ ، وكان

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \,, \quad . \; . \; . \;, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

على $\mathcal{D}$ ،فان f دالة ثابتة .

البرهان . لما كانت $\mathcal{D}$ جزءاً مترابطاً في $\mathbb{R}^n$ ،فانه يترتب على النظرية ٥٥ر١ أنه اذا كانت a , b أي نقطتين من $\mathcal{D}$،فهنالك خط مضلع ، وليكن $L_1 , L_2 , \ldots , L_n$ ،رؤوسه تقع في النقاط $a , c^1 , \ldots , c^{m-1} , b$ ، ومحتوي بأكمله في $\mathcal{D}$. وباستخدام النظرية ١١ر٣ ، فاننا نجد

$$f(a) = f(c^1) = \ldots = f(c^{m-1}) = f(b)$$

أي أن جميع قيم الدالة متساوية على $\mathcal{D}$. ∎

لنفترض فيما تبقى من هذا البند $n=2$. وهكذا لنفترض $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة $\mathcal{D}$ في $\mathbb{R}^2$ ، وأن لها مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة $m+1$ (بما فيها $m+1$) على $\mathcal{D}$. لتكن $(a+h,b+k)$ و (a,b) نقطتين في $\mathcal{D}$ بحيث تكون القطعة المستقيمة الواصلة بينهما محتواة بأكملها في $\mathcal{D}$. لنرمز بـ $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ للدالة

$$\varphi(t) = f(a+th , b+tk)$$

عندئذ نجد استنادا الى الدستور (34) من الفصل

الثاني أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $[0, 1]$ كما أن مشتقها بالنسبة للمتغير t هو

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} f(a+th, b+tk)$$

$$= h\frac{\partial}{\partial x} f(a+th, b+tk) + k\frac{\partial}{\partial y} f(a+th, b+tk)$$

ولما كان كل من حدي الطرف الأيمن من هذه المساواة قابلا للاشتقاق فرضا ، فاننا نجد باستعمال الدستور (34) ثانية أن

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = h\left[h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk) + k\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th, b+tk)\right]$$

$$k\left[h\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk) + k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk)\right]$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk)$$

$$+ k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk)$$

ونترك للقارئ التحقق بأنه اذا كان p أي عدد طبيعي أصغر من $m+1$ ،فان

$$\frac{d^p\varphi(t)}{dt^p} = h^p\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(a+th, b+tk)$$

$$+ \frac{p}{1} h^{p-1}k\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}(a+th, b+tk)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}h^{p-i}k^{i}\frac{\partial^{p} f}{\partial x^{p-i}\partial y^{i}}(a+th,b+tk)$$

$$+\cdots+k^{p}\frac{\partial^{p} f}{\partial y^{p}}(x+th,b+tk) \qquad (1)$$

فاذا رمزنا للطرف الأيمن من (1) بالشكل

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p} f(a+th,b+tk) \qquad (2)$$

فاننا نستنتج أن :

$$\frac{d^{p}\varphi(t)}{dt^{p}}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p} f(a+th,b+tk) \qquad (3)$$

واستنادا الى دستورتايلور بالنسبة للدوال الحقيقية لمتغير حقيقي ، يمكن كتابة التالي :

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\frac{d\varphi}{dt}(0)+\cdots+\frac{1}{m!}\frac{d^{m}\varphi}{dt^{m}}(0)+\frac{1}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}\varphi}{dt^{m+1}}(\theta)$$

حيث $0<\theta<1$

وهكذا ، فاننا نكون قد وجدنا باستخدام (3) النظرية التالية :

١٣ر٣ – نظرية (تايلور Taylor)

لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على المجموعة المفتوحة $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^2$ ، ولنفترض أنه يوجد لهذه الدالة مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة $m+1$ (بما فيها $m+1$) على $\mathcal{D}$. فاذا كانت (a,b) و $(a+h,b+k)$

نقطتين من D ، بحيث تكون القطعة المستقيمة الواصلة بينهما محتواة بأكملها في D ، فاننا نجد الدستور

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i}f(a,b)+R_{m+1} \quad (4)$$

حيث

$$R_{m+1}=\frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}f(a+\theta h,b+\theta k),\quad (0<\theta<1) \quad (5)$$

تسمى النظرية ٣ر٣ نظرية تايلور لدالة في متغيرتين. ويطلق على الدستور (4) اسم دستور تايلور ، وعلى R_{m+1} اسم باقي تايلور .

هذا ، وقد أثبت يونغ ، أنه يمكن التعبير عن باقي تايلور بصيغة أخرى ، ذات فائدة في بعض التطبيقات. وسنورد صيغة يونغ التي ينص عليهافي النظرية التالية، تاركين الاثبات للقارئ .

٤ر٣ – نظرية (يونغ Young)

اذا كانت f دالة تحقق الشروط الواردة في النظرية ٣ر٣ ، فان باقي تايلور (5) يعطي بالدستور

$$R_{m+1}=\frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}f(a,b)+\eta(h,k)(h^2+k^2)^{\frac{m+1}{2}} \quad (6)$$

حيث $\eta(h,k)$ دالة حقيقية لـ (h,k) بحيث $\eta(h,k)\to 0$ عندما $(h,k)\to(0,0)$.

١٥ر٣ – نتيجة

اذا وجد للدالة $f(x,y)$ مشتقات جزئية من جميع المراتب ، وكان $R_{m+1} \to 0$ عندما $m \to \infty$، فاننا نجد

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i}f(a,b) \quad (7)$$

تسمى هذه المتسلسلة متسلسلة تايلور للدالة $f(x,y)$ في جوار النقطة (a,b).

هذا ، ومن الممكن تعميم النظريات الثلاث السابقة على دوال لعدد كيفي من المتغيرات ،وتكون البراهين مماثلة لتلك التي سلكناها لاثبات النظريات الثلاث المذكورة

٢ر٣ – القيم العظمى والصغرى النسبية

١٢ر٣ – تعريف

لتكن f دالة حقيقية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}^n$. نقول عن نقطة c من D انها نقطة قيمة عظمى نسبية للدالة f، اذا وجد جوار U للنقطة c محتوى في D بحيث يكون

$$f(x) \leq f(c)$$

أيا كان x من U . ونقول عن c انها نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f اذا وجد جوار U للنقطة c محتوى في $\mathcal{D}$ بحيث يكون

$$f(x) \geq f(c)$$

أيا كان x من U

نستنتج من هذا التعريف مباشرة أنه اذا كانت c نقطة قيمة عظمى نسبية أو نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f، فلا بد أن تكون c نقطة داخلية لمجموعة تعريف الدالة $\mathcal{D}$.

واذا كانت c نقطة قيمة عظمى نسبية أو نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f ، فاننا نقول ان c نقطة قيمة قصوى نسبية لهذه الدالة .

٣ر٢٢ – نظرية

لتكن $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دالة حقيقية معرفة على حزء $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^n$ ،ولتكن النقطة الداخلية $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f . فاذا كانت كل المشتقات الأولى للدالة f موجودة في c : فعندئذ يكون

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0 \,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (8)$$

البرهان . لنأخذ الدالة الحقيقية φ_1 للمتغير

الحقيقي x_1 المعرفة بالدستور

$$\varphi_1(x_1) = f(x_1, c_2, \ldots, c_n)$$

والتي ساحتها هي مجموعة الاعداد الحقيقية x_1 ، بحيث تكون النقطة $(x_1, c_2, \ldots, c_n)$ واقعة في جوار U محتوى في D . لما كانت $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f، فان النقطة c_1 هي نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة الحقيقية φ للمتغير الحقيقي x_1 ، وهذا يعني (استنادا الى نظرية القيم القصوى للدوال الحقيقية لمتغير حقيقي) أن

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1}(c_1) = 0$$

أي أن

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

وباختيار الدوال $\varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)$ بصورة مناسبة ، فاننا نجد بصورة مماثلة أن

$$\frac{d\varphi_2}{dx_2}(c_2) = 0, \ldots, \frac{d\varphi_n}{dx_n}(c_n) = 0$$

أي أن

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(c) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c) = 0$$

وهو المطلوب. ∎

يسمى كل حل c يحقق جملة المعادلات (8) نقطة حرجة للدالة f . وتبين النظرية ٢٢ر٣ أنه اذا وجد للدالة f مشتقات أولى في كل نقطة داخلية من مجموعة تعريف f ، فان أي نقطة قيمة قصوى نسبية c لهذه الدالة هي نقطة حرجة للدالة f .

الا أن العكس غير صحيح بعامة ، أي أنه ليس من الضروري أن تكون كل نقطة حرجة للدالة f هي نقطة قيمة قصوى نسبية لهذه الدالة. وعلى سبيل المثال . لنأخذ الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المحددة بالمساواة $f(x,y) = xy$. من الواضح أن المبدأ $(0,0)$ هو نقطة حرجة لـ f لأن

$$f_x(0,0) = 0 \quad , \quad f_y(0,0) = 0$$

ولما كان $f(0,0) < f(x,y)$ عندما $xy > 0$

و $f(0,0) > f(x,y)$ عندما $xy < 0$ ، فانه يترتب على هذا أنه اذا أخذنا أي جوار للنقطة $(0,0)$ ، فهنالك نقاط (x,y) في هذا الجوار تحقق الشرط $f(x,y) < f(0,0)$ ، ونقاط أخرى تحقق الشرط $f(x,y) > f(0,0)$ ، وهذا يعني تعريفاً أن النقطة الحرجة $(0,0)$ للدالة f لايمكن أن تكون نقطة قيمة قصوى نسبية لهذه الدالة .

وسنورد فيما يلي شرطا كافيا كي تكون نقطة حرجة للدالة f هي نقطة قيمة قصوى نسبية لهذه الدالة .

وسنبتدئ بدراسة حالة الدوال لمتغير ين .

٣ر٢٣ — نظرية (القيم القصوى النسبية لدالة فيمتغير ين)

لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على جزء $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^2$ ، ولنفترض أنه يوجد لهذه الدالة مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية على $\mathcal{D}$. لتكن (a,b) نقطة حرجة للدالة f في $\mathcal{D}$ ، ولنرمز بـ Δ للمعين

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b) \end{vmatrix}$$

فاننا نجد مايلي :

(أ) اذا كان $\Delta < 0$ ، وكان $f_{xx}(a,b) > 0$ ، فان (a,b) نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f.

(ب) واذا كان $\Delta < 0$ ،وكان $f_{xx}(a,b) < 0$ ، فان (a,b) نقطة قيمة عظمى نسبية للدالة f.

(حـ) أما اذا كان $\Delta > 0$ ، فان (a,b) ليست نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f.

(د) وأخيرا ، اذا كان $\Delta = 0$ ، فقد تكون (a,b) نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f ،وقد لاتكون.

<u>البرهان</u> . لنورد ، بقصد الاختصار ،الرموز

$$A = f_{xx}(a,b)\ , \quad B = f_{xy}(a,b)\ , \quad C = f_{yy}(a,b)$$

عندئذ نجد استنادا الى مبرهنة تايلور ٣ار٣ ، باعتماد صيغة يونغ (6) لباقي تايلور ، مدخلين في اعتبارنا هنا أن $m+1=2$ ، وأن (a,b) نقطة حرجة للدالة f ، أن

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\eta(h,k)(h^2+k^2).(\ )$$

وذلك من أجل جميع قيم h, k التي تكون من أجلها $(a+h,b+k)\in D$ ، وحيث $\eta(h,k)\to 0$ عندما $(h,k)\to(0,0)$. لنضع الآن

$$h=r\cos\theta \quad , \quad k=r\sin\theta$$

عندئذ اذا رمزنا بـ $\Psi(\theta)$ و $F(r,\theta)$ للمقدارين

$$\Psi(\theta)=\frac{1}{2}(A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta) \qquad (10)$$

$$F(r,\theta)=\eta(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

وبالتعويض في (9) نجد أن

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=r^2\left[\Psi(\theta)+F(r,\theta)\right] \qquad (11)$$

ومن الواضح أن $F(r,\theta)\to 0$ عندما $r\to 0$ وذلك أيا كانت الزاوية θ ، وذلك عائد لكون $\eta(h,k)\to 0$ عندما $(h,k)\to(0,0)$ ، وبالتالي فان :

$$\sup_\theta |F(r,\theta)|\to 0 \quad (12)$$ عندما $r\to 0$.

اذا رمزنا بـ $\varphi(t)$ للمقدار

$$\varphi(t)=At^2+2Bt+C$$

فمن الواضح من (15) أن للمقدارين $\varphi(t), \psi(\theta)$ اشارة واحدة .

(٣) اذا كان $\Delta = B^2 - AC < 0$ ،فان للمقدار $\varphi(t)$ اشارة واحدة أيا كانت قيمة t . وعندمايكون $A > 0$ ،فان $\varphi(t)$ يكون موجبا أيا كانت قيمة t . وبالتالي ،فان المقدار $\psi(\theta)$ يكون موجبا أيا كانت قيمة θ . يترتب على هذا أن ثمة عددا موجبا c بحيث يكون $\psi(\theta) \geq c$ أيا كانت قيمة θ . واستنادا الى تعريف نهاية دالة ، فاننا نستنتج من (12) أنه يوجد عدد موجب $\bar{r}$ ، بحيث أنه اذا كان $0 < r < \bar{r}$ ،فان $|F(r,\theta)| < \frac{c}{2}$ أيا كانت قيمة θ . يترتب على هذا كله أنه يوجد عدد موجب $\bar{r}$ بحيث أنه أيا كان r الذي يحقق الشرط $0 \leq r < \bar{r}$ ، وأيا كانت θ ، فاننا نستنتج من (11) أن عندئذ يكون

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) \geq r^2\left(c - \frac{c}{2}\right) = \frac{c}{2} r^2 \geq 0$$

ويعني هذا أنه يوجد جوار $N((a,b),\bar{r})$ للنقطة (a,b) بحيث تتحقق العلاقة

$$f(x,y) \geq f(a,b)$$

أيا كانت النقطة (x,y) من $N((a,b),\bar{r})$ ، أي أن (a,b) هي نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f .

(ب) واذا كان $\Delta = B^2 - AC < 0$ و $A < 0$

فاننا نجد ، باتباع طريق مماثل لذلك الذي سلكناه في (آ) ، أن (a,b) هي نقطة قيمة عظمى نسبية للدالة f.

(حـ) لنفرض الآن أن $\Delta = B^2 - AC > 0$ في هذه الحالة ، لاتوجد لـ $\varphi(t)$ اشارة ثابتة .

لذا فلا توجد للمقدار $\Psi(\theta)$ اشارة ثابتة ، وهذه الاشارة تتعلق بموضع θ بالنسبة لجذري المعادلة $\Psi(\theta) = 0$. يترتب على هذا وجود عددين θ_1 , θ_2 بحيث يكون

$$\Psi(\theta_1) > 0 \quad , \quad \Psi(\theta_2) < 0$$

واستنادا الى (12) ، فانه يوجد عدد موجب r_0 ، بحيث أنه اذا كان $0 < r < r_0$ ،فان

$$\sup_{\theta} |F(r,\theta)| < \Psi(\theta_1)$$

$$\sup_{\theta} |F(r,\theta)| < -\Psi(\theta_2) .$$

يترتب على هذا أنه اذا كان $0 < r < r_0$ ،فان

$$F(r,\theta_1) + \Psi(\theta_1) > 0$$

$$F(r,\theta_2) + \Psi(\theta_2) < 0$$

وهذا يعني استنادا الى (١١) أنه أيا كان الجوار للنقطة (a,b) ، فهنالك نقاط في هذا الجوار ، يكون منها المقدار $f(x,y)-f(a,b)$ موجبا (وهذه النقاط تقع على المستقيم الواصل بين النقطتين $((a,b),(a+r_0\cos\theta_1, b+r_0\sin\theta_1))$ ، وهنالك نقاط في هذا الجوار ، يكون فيها المقدار $f(x,y)-f(a,b)$ سالبا (وهذه النقاط تقع على المستقيم الواصل بين النقطتين $((a,b),(a+r_0\cos\theta_2, b+r_0\sin\theta_2))$. وبالتالي فلا يمكن أن تكون (a,b) نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f.

(د) وأخيرا ، فاذا كان $\Delta=0$ ، فقد تكون (a,b) نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f ، وقد لاتكون . وفي الحقيقة ، لنأخذ أولا الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$$

من السهل التأكد بأن $(0,0)$ نقطة حرجة للدالة f ، وأن $\Delta=0$ في هذه النقطة . ونترك للقارئ التحقق من أن $(0,0)$ لاتشكل نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f.

أما اذا أخذنا الدالة $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة بالمساواة

$$g(x,y)=x^2-x^4-y^4$$

فمن الممكن التأكد بأن $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ نقطة حرجة للدالة g ، وأن $\Delta = 0$ في هذه النقطة . ونترك للقارئ التحقق من أن هذه النقطة هي نقطة قيمة عظمى نسبية للدالة g. ∎

هذا ، وفي حالة الدوال لثلاثة متغيرات أو أكثر ، فانه ترد النظرية التالية ، التي تشكل تعميما للنظرية ٢٣ر٣ ، والتي سنكتفي بسردها دون الاثبات .

٢٤ر٣ – نظرية

لتكن $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دالة حقيقية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}^n$ ، ولنفترض أنه يوجد لهذه الدالة مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية على D . لتكن a نقطة حرجة للدالة f في D ، ولنرمز بـ A_{ij} للمقدار $f_{x_i x_j}(a)$ وبـ Δ_m للمعين

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{vmatrix} \qquad (m = 1, \dots, n)$$

فلكي تكون a نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f ، يكفي أن تكون المعينات $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ موجبة كلها .

وكي تكون a نقطة قيمة عظمى نسبية للدالة f ، يكفي أن تكون هذه المعينات متناوبة الاشارة بحيث تكون $\Delta_1 = A_{11} < 0$.

٣ر٣ – الدوال الضمنيـــة

لتكن $F(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على مجموعـة مفتوحة D من $\mathbb{R}^2$ ، ولننظر في تلك النقاط (x,y) الواقعة في D والتي تحقق الشرط

$$F(x,y)=0 \qquad (13)$$

فاذا قابل كل قيمة للمتغير x واقعة في مجال مـــا I قيمة واحدة فقط للمتغير y ، بحيث تحقق النقطة (x,y) من D المساواة (13) ، فانه تتشكل دالة $f : I \to \mathbb{R}$ بحيث تكون المساواة

$$F(x,f(x))=0 \qquad (14)$$

مطابقة أيا كانت x من I .
وعلى سبيل المثال ، فاذا أخذنا المعادلة

$$4x^2+y^2-1=0 \qquad (15)$$

فمن الواضح أنها تحدد دالتين معرفتين على المجال $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ وهما

$$y = f_1(x) = \sqrt{1-4x^2} \quad , \quad y = f_2(x) = -\sqrt{1-4x^2}$$

ومن الواضح أنه اذا عوضنا أيا من هاتين المعادلتين في (15) ، فاننا نقع على مطابقة .

لقد قيض لنا في هذا المثال التوصل الى عبارة تحليلية بسيطة تعد منها عن كل من f_1 و f_2 بدلالة x ، الا أن الأمر ليس دوما بهذه البساطة . فمثلا اذا أخذنا المعادلة

$$2x^5y^{15} + 7x^2y^7 - 3x^8y^6 - 6 = 0$$

فان التعبير عن حلول المعادلة y بدلالة x تحليليا أمر غير ممكن (في حال وجود هذه الحلول طبعاً) . بيد أن مايهمنا هو ليس امكان أو ستحالة التعبير التحليلي لـ y بدلالة x ، بل هو وجود دالة $y = f(x)$ على مجال مايجب تغدو المساواة (14) مطابقة على هذا المجال. وتسمى الدالة $y = f(x)$ ضمنية اذا كانت معطاة بالمعادلة (13) ، غير المحلولة بالنسبة لـ y . وتغدو الدالة ظاهرة ، اذا استطعنا التعبير عن y مباشرة بدلالة المتغير x ، وذلك بحل المعادلة (13) بالنسبة لـ y .

ان مايهمنا الآن هو موضوع وجود الدالة الضمنية المعطاة بالمعادلة (13) ، وذلك بغض النظر عن امكان أو استحالة امكان التعبير عنها تحليليا . ونورد في هذا الصدد التعريف التالي :

٣١ر٣ – تعريف

لتكن $F(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على مجموعة مفتوحة $\mathcal{D}$ في $\mathbb{R}^2$. نقول ان المعادلة (13) تحدد دالة ضمنية $y = f(x)$ في المستطيل R المحتوي في $\mathcal{D}$ والمعرف بالمتراجحتين

$$|x - x_0| < \delta \quad , \quad |y - y_0| < \delta' \tag{16}$$

اذا قابل كل نقطة x في المجال $]x_0 - \delta , x_0 + \delta[$ جذر واحد $y = f(x)$ ، في المجال $]y - \delta' , y + \delta'[$ للمعادلة (13).

ومن المهم أن ندرك بأنه عند تحقق هذه الشروط ، تكون المعادلتان

$$F(x,y) = 0 \quad , \quad y = f(x)$$

متكافئتين في المستطيل R.

سننتقل الآن الى تقصي الشروط التي يجب أن تخضع لها الدالة $F(x,y)$ ، والتي لو تحققت ، فاننا لن نؤكد وجود دالة ضمنية $y = f(x)$ فحسب ، بل

وقابلية اشتقاق هذه الدالة كذلك

٣٢ر٣ – نظرية (الدالة الضمنية لمتغير واحد)

لتكن $F(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على جزء مفتوح D من $\mathbb{R}^2$ ، ولنفرض تحقق الشروط التالية :

(١) يوجد للدالة F مشتقان أولان في جوار ما لنقطة (x_0, y_0) من D ، وهذان المشتقان مستمران في (x_0, y_0).

(٢) $F(x_0, y_0) = 0$

(٣) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

عندئذ :

(أ) يوجد مستطيل R في D محدد بالمتراجحتين (16)، بحيث يقابل كلّ نقطة x من $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ ،حل وحيد $y = f(x)$ للمعادلة (13) يحقق الشرط $|y-y_0|<\delta'$.

(ب) ان قيمة الدالة f في النقطة x_0 هي y_0 ، أي أن $y_0 = f(x_0)$.

(حـ) ان الدالة مستمرة على المجال $]x_0-\delta, x_0+\delta[$.

(د) يوجد للدالة f مشتق مستمر في المجال $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ ، وهذا المشتق يعطى بالدستور

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \qquad (17)$$

البرهان . آ) لنفرض مثلا أن $F(x_0, y_0) > 0$ ، عندئذ نجد استنادا الى شرط استمرار F_y في النقط أن

$$F_y(x, y) > 0 \qquad (18)$$

في جوار ما U للنقطة (x_0, y_0) ، سنأخذ مربعا مغلقا

$$[x_0 - \delta', x_0 + \delta'] \times [y_0 - \delta', y_0 + \delta'] \qquad (19)$$

محتوى بأكمله داخل الجوار U . عندها تكون المتراجحة (18) محققة في كل نقطة من هذا المربع. يترتب على هذا أن الدالة $F(x, y)$ لدى تثبيت x في أي نقطة من $[x_0 - \delta', x_0 + \delta']$ هي دالة متزايدة تماما للمتغير y ، ذلك أن $F_y(x, y) > 0$ في المجال $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$.

لنجعل y تتغير على خط مواز لمحور السينات مار بالنقطة (x_0, y_0) (الشكل ١) ، أي لنثبت x ونأخذها مساوية لـ x_0 . عندئذ نجد الدالة $F(x_0, y)$ للمتغير y . واستنادا الى أن $F(x_0, y_0) = 0$ والى تزايد الدالة $F(x_0, y)$ الذي رأيناه الآن ، فان $F(x_0, y) < 0$ عندما $y < y_0$ ، وأن $F(x_0, y) > 0$ عندما $y > y_0$. وبالتالي ، فاننا نجد أن للدالة $F(x_0, y)$ اشارتين مختلفتين في النقطتين $(x_0, y_0 - \delta')$ و $(x_0, y_0 + \delta')$ ، وعلى وجه التحديد فان

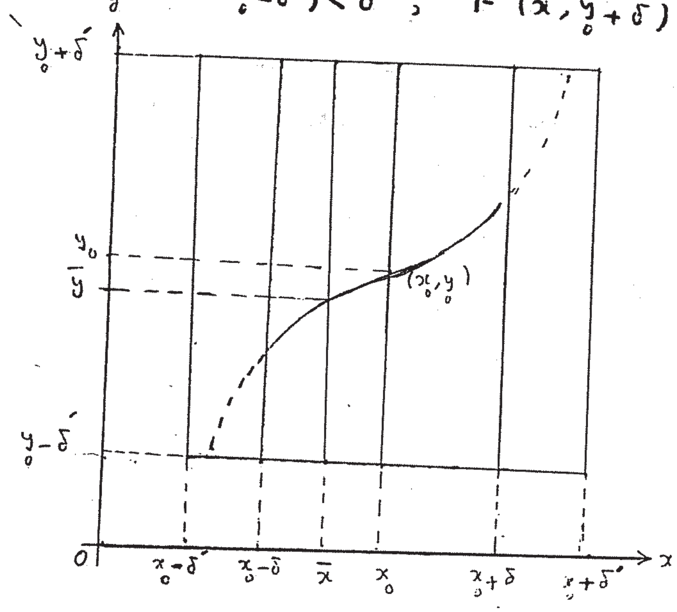
$$F(x_0, y_0-\delta') < 0 \quad , \quad F(x_0, y_0+\delta') > 0 \qquad (٢٥)$$

لننتقل الآن الى المستقيمين الموازيين لمحور oy والمار من هاتين النقطتين ، أي لنثبّت الآن y ، ونأخذها مساويا للمقدارين $y = y_0 + \delta'$ و $y = y_0 - \delta'$. عندئذ نجد الدالتين

$$F(x, y_0-\delta') \quad , \quad F(x, y_0+\delta')$$

للمتغير x ، وواضح أن قيمة الدالة اليسرى في النقطة x_0 سالبة ، وقيمة الدالة اليمنى في هذه النقطة موجبة استنادا الى (٢٥). ولما كانت هاتان الدالتان مستمرتين ، الامر الذي ينتج من الشرط (١)، فانه يوجد جوار $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ للنقطة x_0 $(0 < \delta \leq \delta')$ ، تحافظ فيه الدالتان على اشارتيهما ، بحيث أنه اذا كان x عنصرا من $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ ، فان

$$F(x, y_0-\delta') < 0 \quad , \quad F(x, y_0+\delta') > 0$$



(الشكل ١)

لنأخذ في المجال $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ نقطة ما ولتكن $\bar{x}$ ، ولننظر في القطعة المستقيمة الموازية لمحور السينات الواصلة بين النقطتين $(\bar{x}, y_0-\delta')$ و $(\bar{x}, y_0+\delta')$. بما أن الدالة $F(\bar{x}, y)$ للمتغير y مستمرة ، وأن

$$F(\bar{x}, y_0-\delta') \quad , \quad F(\bar{x}, y_0+\delta')$$

فانه يترتب على هذا وجود نقطة $\bar{y}$ محصورة بين $y_0+\delta'$ ، $y_0-\delta'$ ، بحيث يكون $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

ومرة أخرى ، فاننا نستنتج من اطّراد الدالة $F(\bar{x}, y)$ أن $F(\bar{x}, y) \gtrless 0$ عندما $y \gtrless \bar{y}$ ، الأمر الذي يترتب عليه أن $\bar{y}$ هي القيمة الوحيدة لـ y في المجال $]y_0-\delta', y_0+\delta'[$ ، التي تحقق مع $x=\bar{x}$ المعادلة (13) .

وهكذا نكون قد وجدنا في الجوار

$$]x_0-\delta, x_0+\delta[\times]y_0-\delta', y_0+\delta'[$$

للنقطة (x_0, y_0) ، أن المعادلة (13) تحدد دالة $y = f(x)$ للمتغير x ، وبذا يتم اثبات (آ) .

(ب) ان المناقشة السابقة تبين استنادا الى الشرط (٢) أن $f(x_0) = y_0$ ، وبعبارة أخرى،

فانه يترتب على المساواة $F(x_0, y_0) = 0$ أن y_0 هي القيمة الوحيدة لـ y في المجال $]y_0-\delta', y_0+\delta'[$ ، التي تحقق مع $x = x_0$ المعادلة (13).

(د) عند ايراد البرهان على صحة (د) ، فاننا سنعني بـ y الدالة الضمنية $y = f(x)$ التي تتحدد بالمعادلة (13) ، والتي لو عوضناها في هذه المعادلة لتحولت الى مطابقة . نلاحظ أولا أنه اذا أعطينا لـ x تزايدا قدره h بحيث $h < \delta$ ، فانه يقابل القيمةَ $x + h$ القيمةُ $y + \Delta y = f(x + h)$ بحيث أن $F(x+h, y+\Delta y) = 0$. ومن الواضح أن

$$F(x+h, y+\Delta y) - F(x, y) = 0$$

وبالافادة من ١١ر٣ ،فهنالك عدد $0 < \theta < 1$ ، بحيث يكون

$$0 = F(x+h, y+\Delta y) - F(x, y)$$
$$= hF_x(x+\theta h, y+\theta\Delta y) + \Delta y\, F_y(x+\theta h, y+\theta\Delta y)$$

نستنتج من هذا أن

$$\frac{\Delta y}{h} = -\frac{F_x(x+\theta h, y+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta h, y+\theta\Delta y)} \qquad (21)$$

من الواضح قبل كل شيء أن $h \to 0$ تقضي $\Delta y \to 0$ ،

أي أن الدالة $y = f(x)$ مستمرة. لدينا أيضا .

$$\left|\frac{\Delta y}{h}\right| = \frac{|F_x(x+\theta h, y+\theta \Delta y)|}{F_y(x, y+\theta \Delta y)}$$

وبما أن الدالة $|F_x|$ مستمرة على المربع المغلق (١٩) ، فانها محدودة من الاعلى . أي أن ثمة عددا موجبا M ، بحيث يكون

$$|F_x| \leqslant M$$

كما أن للدالة الموجبة المستمرة F_y قيمة صغرى m في هذا المربع ، وهذه القيمة موجبة كذلك ، أي أن

$$|F_y| \geqslant m > 0$$

يترتب على ماسبق أن

$$\left|\frac{\Delta y}{h}\right| \leqslant \frac{M}{m}$$

أو

$$|\Delta y| \leqslant \frac{M}{m}|h|$$

وهذا يعني استمرار الدالة $y = f(x)$ ،وبذا يكتمل

اثبات (جـ) .

(د) لنجعل h في المساواة (21) تسعى الى الصفر. لما كان معلوما لدينا أن $\Delta y \to 0$ عندئذ ، فانه يترتب على استمرار الدالتين F_x ، F_y ، مدخلين في اعتبارنا العلاقة $F_y \neq 0$ ، أن الطرف الأيمن من (21) يسعى الى القيمة

$$-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

وبالتالي ، فان الطرف الأيسر من (21) يسعى الى القيمة ذاتها ، أي أن مشتق y بالنسبة للمتغير x موجود :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \qquad (22)$$

فاذا وضعنا في (22) المقدار $f(x)$ بدلا من y ، فاننا نستنتج صحة الدستور (17).

ولما كان في بسط ومقام الطرف الأيمن من (17) دوال مستمرة ، وكان المقام مغايرا للصفر ، فاننا نستنتج أن $f'(x)$ دالة مستمرة ، وبذا يكتمل اثبات (د) . ∎

ان البرهان السابق يمكن الاستعانة به في حالة دوال من النمط التالي :

$$F(x,y) = F(x_1, x_2, \dots, x_n ; y) = 0 \qquad (23)$$

لذا سنورد الآن نص نظرية الدالة الضمنية لدالة لعدة متغيرات ، ملقين مهمة اثباتها على القارئ

٣٣ر٣ نظرية (الدالة الضمنية لعدة متغيرات)

لتكن $F(x,y) = F(x_1,\dots,x_n,y)$ دالة حقيقية معرفة على جزء مفتوح D من $\mathbb{R}^{n+1}$ ، ولنفترض تحقق الشروط التالية :

(١) يوجد لدالة F مشتقات أولى في جوارٍ ما لنقطة (x^0,y^0) من D ، وهذه المشتقات مستمرة في النقطة (x^0,y^0) .

(٢) $F(x^0,y^0)=0$.

(٣) $F_y(x^0,y^0)\neq 0$.

عندئذ :

(أ) يوجد مستطيل R في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^{n+1}$ محتوي في D ومحدد بالمتراجحات

$$|x_i - x_i^0| < \delta \quad , \quad (1 \leq i \leq n) \qquad (24)$$

$$|y - y^0| < \delta' \qquad (25)$$

بحيث أنه يقابل كل نقطة x تحقق الشروط (24) حل وحيد $y = f(x)$ للمعادلة (23) يحقق المتراجحة (25) .

(ب) ان قيمة الدالة f في النقطة x^0 هي y^0 ، أي أن $y^0 = f(x^0)$.

(حـ) تكون الدالة f مستمرة في كل نقطة x تحقق

الشروط (24) .

(د) يوجد للدالة f مشتقات أولى مستمرة في كل نقطة x تحقق المتراجحات (24) ، وهذه المشتقات تعطى بالدساتير

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (26)$$

٣٤ر٣ — ملاحظة

يجدر بنا لفت النظر الى أن المبرهنتين ٣٢ر٣ و ٣٣ر٣ تحددان شروطا كافية لو تحققت ، لتأكد وجود الدالة الضمنية . وهذه الشروط ليست لازمة أي أنه قد يختل واحد أو أكثر من هذه الشروط ، ومع ذلك تكون الدالة الضمنية موجودة أحيانا . وعلى سبيل المثال اذا أخذنا الدالة $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$F(x, y) = x - y^3$$

نلاحظ أن للدالة F مشتقين أولين مستمرين في المستوي $\mathbb{R}^2$ بأكمله ، وبالتالي ، فهذان المشتقان موجودان في (أي) جوار للنقطة $(x_0, y_0) = (0, 0)$

ومستمران في هذه النقطة . كذلك فان

$$F(0,0)=0$$

فاذا لاحظنا أن

$$F_y(0,0)=0$$

استنتجنا أن الشرطين (١) و (٢) الواردين في المبرهنة ٣٢ر٣ (أو ٣٣ر٣) محققان ، في حين أن الشـرط (٣) ليس كذلك.ومع ذلك ، فالدالة الضمنية $y=f(x)$ موجودة في (أي) جوار للنقطة 0 ، الا أنه مـن السهل التحقق بأن مشتق هذه الدالة في النقطة 0 يس موجودا .

لننتقل الآن الى الحالة الأعم ، حيث نعطـى جملة مؤلفة من m معادلة لـ $n+m$ من المتغيـرات :

$$\left.\begin{array}{l}
F_1(x,u)=F_1(x_1,\ldots,x_n;u_1,\ldots,u_m)=0\\
F_2(x,u)=F_2(x_1,\ldots,x_n;u_1,\ldots,u_m)=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_m(x,u)=F_m(x_1,\ldots,x_n;u_1,\ldots,u_m)=0
\end{array}\right\}\qquad(27)$$

ويرد في هذا المقام السؤال عما اذا كان بالامكـان

وجود m من المتغيرات هي $u_1, \dots, u_m$
كدوال ضمنية لـ n من المتغيرات $x_1, \dots, x_n$
على الشكل

$$u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad u_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \qquad (28)$$

بحيث أن تعويض (28) في (27) يوءدي الى متطابقات بالنسبة الى $x_1, \dots, x_n$ عددها m.
سنكتفي، بقصد الاختصار، بمعالجة هذه المسألة في الحالة $n = 3$ و $m = 2$، أي أننا سندرس مسألة وجود حل آنيّ u, v (على شكل دالتين للمتغيرات $(x, y, z$ للمعادلتين

$$F(x, y, z; u, v) = 0 \qquad (29)$$

$$G(x, y, z; u, v) = 0 \qquad (30)$$

وسنعرّف لهذا الغرض المعين

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

الذي سنطلق عليه اسم يعقوبي F, G بالنسبة لـ u, v.

٣ر٣٥ ـ نظريــة

لتكن

$$F(x, y, z; u, v) \quad , \quad G(x, y, z; u, v)$$

دالتين حقيقيتين معرفتين على جزء مفتوح $\mathcal{D}$ مـــن $\mathbb{R}^5$ ، ولنفترض تحقق الشروط التالية :

(١) يوجد للدالتين F, G مشتقات أولى ما لنقطة $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ من $\mathcal{D}$ ، وهذه المشتقات

مستمرة في النقطة المذكورة

(٢) $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0 \quad , \quad G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$

(٣) $$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_{(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)} \neq 0$$

عندئـذ

(آ) يوجد مستطيل R في الفضاء الاقليلدى $\mathbb{R}^5$ محتوي في $\mathcal{D}$ ومحدد بالمتراجحات

$$|x - x_0| < \delta \;,\; |y - y_0| < \delta \;,\; |z - z_0| < \delta \qquad (31)$$

$$|u - u_0| < \delta' \;,\; |v - v_0| < \delta' \qquad (32)$$

بحيث أنه يقابل كلّ نقطة (x,y,z) تحقق الشروط (31) حل وحيد

$$u = f(x,y,z) \quad , \quad v = g(x,y,z) \qquad (33)$$

للمعادلتين (30) و (29) يحقق الشرطين (32).

(ب) $u_0 = f(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad v_0 = g(x_0, y_0, z_0)$

(حـ) تكون الدالتان f, g مستمرتين في كل نقطة (x, y, z) تحقق الشروط (31)،

(د) يوجد للدالتين f, g مشتقات أولى مستمرة في كل نقطة (x, y, z) تحقق الشروط (31)، وهـــذه المشتقات تعطي بالدستورين

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} \qquad (34)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} \qquad (35)$$

وترد دساتير مماثلة للمشتقات $\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

<u>البرهان</u> . لما كان $J \neq 0$ في النقطة $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ فان $F_u \neq 0$ أو $F_v \neq 0$ في هذه النقطة لنفترض مثلا أن $F_v \neq 0$ في $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$. عندئذ يترتـــب

على المبرهنة ٣ر٣٣ وجود مستطيل T مركزه (x_0, y_0, z_0, u_0) بحيث أنه يقابل أيّ نقطة (x, y, z, u) من T حل وحيد $v = \Phi(x, y, z, u)$ للمعادلة (29) في مجال ما $|v - v_0| < \delta''$. لنفترض أن

$$H(x, y, z, u) = G(x, y, z, u, \Phi(x, y, z, u)).$$

عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون (u, v) حلا للمعادلتين (29) و (30) عندما $(x, y, z, u) \in T$ و $|v - v_0| < \delta''$) هو أن يكون $v = \Phi(x, y, z, u)$ ، وأن يكون

$$H(x, y, z, u) = 0 \tag{36}$$

يوجد للدالة Φ مشتقات أولى مستمرة ، كما أن $\Phi_u = -\dfrac{F_u}{F_v}$ وبالتالي فان

$$H_u = G_u + G_v \Phi_u = G_u - \frac{G_v F_u}{F_v} = \frac{G_u F_v - G_v F_u}{F_v} = -\frac{J}{F_v} \neq 0$$

في النقطة $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$. لذا فمن الممكن تطبيق النظرية ٣ر٣٣ ، ونستنتج عندئذ وجود مكعب مركزه (x_0, y_0, z_0) ومحدد بالمتراجحات (31) ، بحيث أنه اذا كانت (x, y, z) أي نقطة من هذا المكعب ، فثمة حل وحيد u للمعادلة (36) في مجال ما محدد بالمتراجحة $|u - u_0| < \delta'$. فاذا رمزنا لهذا الحل بالشكل

$$u = f(x, y, z) \tag{37}$$

فان النظرية ٣٣ر٣ تشير أيضا الى أن للدالة f مشتقات اولى مستمرة في المكعب (31) وتحقق الشرط $u_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. وبتعويض (37) في المساواة $v = \Phi(x, y, z, u)$ نجد أن

$$v = \Phi(x, y, z, f(x, y, z)) = g(x, y, z). \qquad (38)$$

ومن الواضح أن لهذه الدالة مشتقات أولى مستمرة في المكعب (31) وتحقق الشرط $v_0 = g(x_0, y_0, z_0)$.

ولاتمام البرهان ، بقي علينا التحقق من صحة الدستورين (34) و (35). ولهذا الغرض نشتق المطابقتين

$$F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0$$

$$G(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0$$

جزئيا بالنسبة للمتغير x ، فنجد

$$F_x + F_u f_x + F_v g_x = 0$$

$$G_x + G_u f_x + G_v g_x = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة لـ g_x ، f_x، فاننا نجد (34) ، (35)، وبذا يكتمل برهان كل البنود من (آ) الى (د). ∎

لننتقل الآن الى جملة المعادلات (27) ، ولنطرح السؤال عما اذا كانت هذه الجملة تحدد m من المتغيرات $u_1, u_2, \ldots, u_m$ كدوال ضمنية للمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (والتي عددها n) . سنعرف لهذا الفرض المعين

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

الذي سنطلق عليه اسم يعقوبي $F_1, F_2, \ldots, F_m$ بالنسبة لـ $u_1, u_2, \ldots, u_m$. بعد هذا ، سنورد الآن تعميم النظرية السابقة ، مكتفين بسردها دون البرهان .

٣٦ر٣ – نظرية

لتكن

$$F_1(x, u)\ ,\ F_2(x, u), \ldots, F_m(x, u)$$

حيث)

$$\left(x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad u=(u_1, u_2, \dots, u_m) \right)$$

دوال حقيقية معرفة على جزء مفتوح D من $\mathbb{R}^{n+m}$ ،

ولنفترض تحقق الشروط التالية :

(١) يوجد للدوال $F_1, F_2, \dots, F_m$ مشتقات أولى مستمرة في جوارٍ لنقطةٍ (x^0, u^0) من D ، وهذه المشتقات مستمرة في النقطة المذكورة .

(٢) $F_1(x^0, u^0)=0 , F_2(x^0, u^0)=0, \dots, F_m(x^0, u^0)=0$

(٣) (39)
$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}\right|_{(x^0, u^0)} \neq 0$$

عندئذ :

(آ) يوجد مستطيل في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^{n+m}$ محتوي في D ومحدد بالمتراجحات

$$|x_1-x_1^0|<\delta, |x_2-x_2^0|<\delta, \dots, |x_n-x_n^0|<\delta \quad (40)$$

$$|u_1-u_1^0|<\delta', |u_2-u_2^0|<\delta', \dots, |u_m-u_m^0|<\delta' \quad (41)$$

بحيث أنه يقابل كلّ نقطة $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تحقق الشروط (40) حل وحيد

$$u_1 = f_1(x),\ u_2 = f_2(x), \ldots, u_m = f_m(x) \qquad (42)$$

للمعادلات (27) يحقق الشروط (41).

(ب) $u_1^0 = f_1(x^0),\ u_2^0 = f_2(x^0), \ldots, u_m^0 = f_m(x^0)$

(حـ) تكون الدوال $f_1, f_2, \ldots, f_m$ مستمرة في كل نقطة $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تحقق الشروط (40).

(د) يوجد للدوال $f_1, f_2, \ldots, f_m$ مشتقات أولى مستمرة في كل نقطة $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تحقق الشروط (40) ، وهذه المشتقات تعطي بالدساتير

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{m-1}, F_m)}{\partial(x_1, u_2, u_3, \ldots, u_{m-1}, u_m)}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{m-1}, F_m)}{\partial(u_1, x_1, u_3, \ldots, u_{m-1}, u_m)}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{m-1}, F_m)}{\partial(u_1, u_2, x_1, \ldots, u_{m-1}, u_m)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_1} = -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{m-1}, F_m)}{\partial(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{m-1}, x_1)}$$

وترد دساتير مماثلة للمشتقات

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad (1 \leq i \leq m \;,\; 2 \leq j \leq n) \;.$$

تمارين

(٣–١)

اذكر نص وبرهان النظرية ٣ار٣ في حالة دالة حقيقية $f(x,y,z)$ لثلاثة متغيرات .

(٣–٢)

أورد اثبات نظرية يونغ ٣ار١٤ .

(٣–٣)

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة بالدستور

$$f(x) = e^{x} \sin x$$

أثبت أن متسلسلة تايلور لهذه الدالة حول النقطة 0 هي

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{n} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^{n}$$

وأن هذه المتسلسلة متقاربة أيا كان x من $\mathbb{R}$.

(٣–٤)

لتكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ الدالة

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

والمطلوب نشر تايلور لهذه الدالة حول النقطة (0 ، 0) .

(٣–٥)

لتكن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 + 3xy - 2y^3$$

أوجد تزايد هذه الدالة عندما يتغير المقدار (x,y) من $(1,2)$ الى $(1+h, 2+k)$.

(٣–٦)

انشر الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة بالمساواة

$$f(x,y) = e^{x+y}$$

وفق قوى $y+2$ و $x-2$.

(٣–٧)

انشر وفق قوى x,y كلا من الدوال التاليـــة ، وأوجد ساحة تقارب كل منها :

(أ) $\sin x \cdot \sin y$

(ب) $\sin(x^2 + y^2)$

(حـ) $\dfrac{1-x+y}{1+x-y}$

(د) $\log(1-x-y+xy)$

(هـ) $\mathrm{Arc\,tg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}$

(٣–٨)

اكتب الحدود الثلاثة الاولى من منشور كل مـــن

الدالتين التاليتين وفق متسلسلة تايلور حول النقطة $(0,0)$

(أ) $e^{x}\cos y$

(ب) $(1+x)^{1+y}$

(٣–٩)

لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالة محددة كما يلي :

$$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$$

(أ) أثبت أن $(0,0)$ هي نقطة حرجة للدالة f.

(ب) برهن أن $(0,0)$ هي نقطة قيمة صغرى نسبية لقصور f على أي مستقيم مار بهذه النقطة .

(ﺣ) أثبت أنه ايا كان الجوار $N((0,0),\delta)$ للنقطة $(0,0)$ ، فهنالك نقاط يكون فيها $f(x,y)>0$ ، ونقاط أخرى يكون فيها $f(x,y)<0$.

(٣–١٠)

لتكن $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ الدالتين

$$f(x,y)=x^2-2xy+y^2+x^4+y^4$$

$$g(x,y)=x^2-2xy+y^2-x^4-y^4$$

(أ) بين أن النقطة $(0,0)$ حرجة لكل من

هاتين الدالتين .

(ب) أثبت أن Δ المعرف في ٣٣ر٣ يساوي الصفر في ($0,0$) لكل من f, g.

(حـ) برهن أن ($0,0$) هي نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f ، وأنها ليست نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة g.

(٣-١١)

لنأخذ الدالة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة ، وادرس امكان كون كل منها نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة المعطاة .

(٣-١٢)

أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}^2$ ، وحدد ما اذا كانت هذه النقاط نقاط قيم قصوى نسبية لهذه الدوال :

$$f(x,y) = x^2 + 4xy, \qquad f(x,y) = xy^2 - 2xy + 2x^2 - 3x$$

$$f(x,y) = x^4 + 2y^4 + 32x - y + 17, \qquad f(x,y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$$

$$f(x,y) = x^2 + 4yx + 2y^2 - 2y, \qquad f(x,y) = x^4 + y^3 - 6x^2y$$

$$f(x,y) = x^4 - 4xy, \qquad f(x,y) = x^8 + x^4 - 2x^2y + y^2$$

$$f(x,y) = x^2 + 3y^4 - 4y^3 - 12y^2, \qquad f(x,y) = (x+y-3)\, e^{\frac{1}{3}(x^3+y^3)}$$

(٣-١٣)

بين أن نقطة المبدأ تشكل نقطة حرجة لكل من الدوال التالية ، وحدد ما اذا كانت هذه النقطة تمثل نقطة قيمة قصوى لكل من هذه الدوال :

$$f(x,y) = x^2 y^2$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

$$f(x,y) = x^4 - x^2 y^2 + y^4$$

$$f(x,y) = x^3 y - x y^3$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4$$

(٣-١٤)

أثبت أنه يوجد للدالة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة كالتالي

$$f(x,y) = 2x + 4y - x^2 y^4$$

نقطة حرجة ، وأنه ليس لها نقاط قيم قصوى .

(٣-١٥)

أوجد أصغر مسافة بين النقطة $(2,1,-3)$ والمستوى الذي معادلته

$$2x + y - 2z = 4$$

(٣-١٦)

أوجد أقصر مسافة بين المستقيمين

$$L_1 = \{(x,y,z) : x = 2-t \,,\ y = 3+t \,,\ z = 1-2t\}$$

$$L_2 = \{(x,y,z) : x = 1-s \,,\ y = 2-s \,,\ z = 3+s\}$$

(٣-١٧)

حدد نقاط القيم العظمى النسبية والقيم الصغرى النسبية لكل من الدوال الحقيقية التالية المعرفة على $\mathbb{R}^2$:

(أ) $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$

(ب) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

(جـ) $f(x,y) = e^{x^4+y^6}$

(د) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

(٣-١٨)

لنأخذ الدالة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة كالتالي

$$f(x,y) = e^{ax^2+by^2}$$

(أ) بين أنه اذا كان $a>0, b>0$ ،فان $(0,0)$ تكون نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f .

(ب) أثبت أنه اذا كان $b<0$ و $a<0$ ، فان (0،0)
تكون نقطة قيمة عظمى نسبية للدالة المعطاة .
(حـ) برهن أنه اذا كان $ab<0$ ، فان (0،0) ليست
نقطة قيمة قصوى نسبية للدالة f.

(٣–١٩)

لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=x^2-x^4-y^4$$

برهن أن كلا من $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ هي نقطة قيمة
عظمى نسبية للدالة f.

(٣–٢٠)

لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-3x(x^2+y^2)+2x^2$$

(أ) أثبت أن (0،0) هي نقطة قيمة صغرى نسبية
لمقصور f على أي مستقيم مار بهذه النقطة .
(ب) بين أن (0،0) ليست نقطة قيمة قصوى نسبية
للدالة f.

(٣–٢١)

لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=y^2+x^2y+x^4$$

أثبت أن (0،0) هي نقطة قيمة صغرى نسبية للدالة f.

(٣-٢٢)

لتكن

(x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$

n من النقاط في المستوي $\mathbb{R}^2$. عين الدالـــــة $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$F(x) = Ax + B$$

بحيث يكون المقدار

$$\sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - y_i \right]^2$$

أصغر مايمكن . بين أنه عندئذ بتعيين العـــــددان A, B بالمعادلتين

$$A \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$A \sum_{i=1}^{n} x_i + nB = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(٣-٢٣)

لتكن $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة على $[0,1]$ بين الأعداد A, B, C بحيث يكون المقدار

$$\int_0^1 \left[f(x) - (Ax^2 + Bx + C) \right]^2 dx$$

أصغر مايمكن . بين أن هذه الأعداد يجب أن تحقق

جملة المعادلات التالية :

$$\frac{1}{5}A+\frac{1}{4}B+\frac{1}{3}C=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{4}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{2}C=\int_0^1 x\, f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{3}A+\frac{1}{2}B+C=\int_0^1 f(x)\,dx$$

(٣-٢٤)

عين من بين كل المثلثات التي لها طول محيط واحد $2p$ ، ذلك الذي مساحته أكبر مايمكن .

(٣-٢٥)

مَثل العدد الموجب a على شكل جداء ثلاثة أعداد موجبة ، بحيث يكون مجموع هذه الاعداد أصغر مايمكن .

(٣-٢٦)

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $(1,-1,1)$ ومجموعة النقاط

$$\{(x,y,z) : z=xy\}$$

(٣-٢٧)

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $(0,0,a)$ ، حيث $a>0$ ومجموعة النقاط

$$\{(x,y,z) : z=xy\}$$

(٣-٢٨)

لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$$

(أ) بين أن $(1,1)$ نقطة حرجة للدالة f.

(ب) أثبت أن هذه النقطة هي نقطة قيمة صغرى للدالة المعطاة .

(٣-٢٩)

لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

حدد نقاط القيم القصوى النسبية داخل المثلث المحدد بالمحورين الاحداثيين Ox, Oy وبالمستقيم الذي معادلته $x+y=2\pi$.

أ فد من هذا لايجاد المثلث من بين المثلثات المرسومة داخل دائرة نصف قطرها R بحيث تكون مساحته أعظمية .

(٣-٣٠)

حدد القيم العظمى النسبية والصغرى النسبية للدالة

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2$$

على سطح الكرة التي معادلتها

$$x^2+y^2+z^2=1$$

وذلك بافتراض أن

$$a>b>c>0$$

(٣-٣١)

لنأخذ مجسم القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

حدد من بين متوازيات المستطيلات (التي أضلاعها موازية للمحاور الاحداثية) متوازي المستطيلات الذي حجمه أعظمي . بين أن أضلاع متوازي المستطيلات هذا هي

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ ، } \frac{b}{\sqrt{3}} \text{ ، } \frac{c}{\sqrt{3}}$$

(٣-٣٢)

لتكن $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة لها مشتقات مستمرة حتى المرتبة الثانية وتحقق الشرط $F(x,y)=0$ ، حيث F دالة مشتقاها الأولان موجودان ومستمران على $\mathbb{R}^2$. برهن أنه اذا كان $F_y \neq 0$ ، فان

$$F_y^3\, y'' = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$$

(٣-٣٣)

هل من الضروري أن تعين المعادلة

$$xy - z\log y + e^{xz} = 1$$

دالة وحيدة $z = f(x,y)$ في جوارٍ للنقطة $(0,1,1)$ ؟
وهل يمكن أن تعين دالة $y = g(x,y)$ في الجوار نفسه ؟

(٣-٣٤)

أثبت أن جملة المعادلتين التاليتين

$$u^2 + v^2 - x^2 - y^2 = 0$$

$$u + v - x^2 + y = 0$$

تعرف دالتين u,v للمتغيرين x,y بصورة وحيدة
في جوارٍ للنقطة $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2,1,1,2)$.
أوجد المشتقين الأولين لكل من هاتين الدالتين
باستخدام دساتير النظرية ٣ر٣٤ .
عبر عن u,v في جوار النقطة $(2,1,1,2)$ بدلالة
x,y بصورة ظاهرة ، ثم أوجد المشتقات الأولى
لـ u,v من عبارتي u,v الناتجتين .

(٣-٣٥)

عين نقاط المستوي $\mathbb{R}^2$ التي تحقق المعادلة

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0$$

في جوار كل منها دالة وحيدة $y = y(x)$ ، وبرهن أنه يكون عندئذ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$$

(٣-٣٦)

لنأخذ الدالة $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ التالية :

$$F(x,y) = (x+1)^3 - (y-1)^5$$

(أ) تحقق من أن الشرطين (١) و (٢) الواردتين في النظرية ٣٢ر٣ محققان بالنسبة للنقطة $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ دون أن يكون الشرط (٣) محققا .

(ب) أثبت وجود دالة ضمنية للمعادلة $F(x,y) = 0$ في جوار للنقطة (١ر١ -) .

(حـ) كيف تفسر وجود الدالة الضمنية على الرغم من عدم تحقق شروط النظرية ٣١ر٣ ؟

(د) ادرس وجود مشتق للدالة الضمنية في النقطة (١ر١ -) .

(٣-٣٧)

عين نقطا الفضاء $\mathbb{R}^3$ بحيث تعين جملة المعادلتين

$$u + v = x + y$$

$$xu + yv = 1$$

في جوار كل من هذه النقاط دالتين وحيدتين $u=u(x,y)$ ، $v=v(x,y)$. بين أنه عندئذ يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u+y}{x-y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u+x}{x-y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{v+y}{x-y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v+x}{x-y}$$

(٣-٣٨)

لتكن $z=z(x,y)$ دالة ضمنية محددة بالمعادلة

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+cz)$$

حيث $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ،

وحيث a,b,c ثوابت اختيارية . برهن أن

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$$

(٣-٣٩)

لتكن $z=z(x,y)$ دالة ضمنية محددة بالمعادلة

$$F(x-az\,,\,y-bz)=0$$

حيث $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^2$

وحيث a,b ثابتان . أثبت أن

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

(٣-٤٠)

أثبت أن المعادلة

$$1 - x^2 - y^2 - u^2 = 0$$

تحدد في جوار للنقطة

$$(x_0, y_0, u_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

دالة وحيدة $u = u(x, y)$ ، وأن

$$u_x(x, y) = -\frac{x}{u(x, y)}$$

$$u_y(x, y) = -\frac{y}{u(x, y)}$$

(٣-٤١)

لتكن

$$u = u(x, y, z) \quad , \quad v = v(x, y, z)$$

دالتين قابلتين للاشتقاق ،وتحققان المعادلتين

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + u^2 + v = 6$$

$$2x^3 + 4y^2 + 2z^2 + u + v^2 = 9$$

علما بأن

$$u'(1, -1, 0) = -1 \quad , \quad v(1, -1, 0) = 2$$

أثبت أن :

$$u_x(1,-1,0)=\frac{2}{9} \quad , \quad u_y(1,-1,0)=-\frac{14}{9}$$

(٣-٤٢)

(أ) حدد شروطا على الدالتين h, s تضمن وجود حل للمعادلتين

$$x=h(u,v) \quad , \quad y=s(u,v)$$

بالنسبة لـ u, v في جوار ما للنقطة (x_0, y_0, u_0, v_0).

(ب) اذا رمزنا لحل هاتين المعادلتين بالشكل

$$u=H(x,y) \quad , \quad v=S(x,y)$$

وكان $J=\frac{\partial(h,s)}{\partial(u,v)}$ فبين أن

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial s}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial h}{\partial v}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial s}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial h}{\partial u}$$

(جـ) احسب J والمشتقات الأولى لـ H, S في النقطة $(x_0, y_0)=(1,1)$ بافتراض أن

$$h(u,v)=u^2-v^2 \quad , \quad s(u,v)=2uv$$

(٣-٤٣)

لتكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة متجانسة مشتقاها الأولان مستمران في جوار نقطة (x_0, y_0) مغايرة للنقطة (٠ر٠) بحيث أن

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad , \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

(أ) ادرس وجود دالة ضمنية $y = \varphi(x)$ محددة بالمعادلة $f(x, y) = 0$.

(ب) برهن أنه في حال وجود هذه الدالة ، فان

$$\varphi'(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$$

(٣-٤٤)

لتكن $f(u, v)$ دالة حقيقية معرفة على $\mathbb{R}^2$ ، ولنفرض أن مشتقيها الأولين مستمران على $\mathbb{R}^2$ ، لنعرف الدالة

$$g(x, y) = f\left(\operatorname{Arctg} \frac{x+3y+1}{3x+y+1}, \operatorname{Arctg} \frac{3x+y+1}{x+3y+1} \right)$$

(أ) هل تحدد المعادلة $g(x, y) = 0$ دالة ضمنية $y = \varphi(x)$ ؟

ب) اذا كانت (x_0, y_0) نقطة بحيث تحدد المعادلة $g(x, y) = 0$ في جوارها دالة ضمنية $y = \varphi(x)$ ، فأثبت أن

$$\varphi'(x_0) = \frac{4y_0 + 1}{4x_0 + 1}$$

الفصل الرابع

==================

مبادئ نظرية الدوال المتجهة لعدة متغيرات

تناولنا في الفصول الماضية ، بشيء من التفصيل ، مفاهيم النهاية والاستمرار والاشتقاق للدوال الحقيقية على جزء من الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$. أما في هذا الفصل ، فسنحاول تعميم هذه المفاهيم على الدوال المتجهة لعدة متغيرات ، أي على دوال معرفة على جزء من الفضاء الاقليدى $\mathbb{R}^n$ وتأخذ قيمها في الفضاء $\mathbb{R}^m$ ، حيث m, n أى عددين طبيعيين . هذا ، وسنعرض لهذه المفاهيم باختصار زائد ، لأن التفصيل فيها يتجاوز الحدود المعتمدة لهذا الكتاب .

١ر٤ـ الدوال المتجهة لعدة متغيرات

١ر١ر٤ ـ تعريف

نقول عن دالة ، ساحتها $\mathcal{D}$ جزء من $\mathbb{R}^n$ ،وتأخذ

قيمها في $\mathbb{R}^m$ ، حيث $m>1$ ، انها دالة متجهة لِـ n من المتغيرات (الحقيقية) .

فاذا كانت $f: \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^m$ دالة متجهة لِـ n من المتغيرات ، واذا قابل كلّ عنصر x من $\mathfrak{D}$ النقطة $f(x)$ من $\mathbb{R}^m$ ، وكانت احداثيات هذه النقطة هي

$$(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

فاننا نسمي الدوال $f_1, \dots, f_m$ مركبات الدالة f.

٢ار٤ ـ أمثلـــة

(أ) ان الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ،والمعرفة بالمساواة

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

هي دالة متجهة لتغير حقيقي واحد . ومن السهل التحقق بأن مدى الدالة f (أي مجموعة قيمها) هو لولـــب في $\mathbb{R}^3$ واقع على الاسطوانة

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

(ب) ان الدالة $f: \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^3$ المعرفة على القرص

$$\mathfrak{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

والمحددة بالمساواة

$$f(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

هي دالة متجهة لمتغيرين . ويمكن التحقق بأن مدى هذه الدالة هو النصف العلوي للكرة في $\mathbb{R}^3$ ، والتي معادلتها

$$x^2+y^2+z^2=1$$

ومن الواضح أن مركبات هذه الدالة هي الدوال $f_1, f_2, f_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$ والمحددة كالتالي :

$$f_1(x,y)=x \ , \ f_2(x,y)=y \ , \ f_3(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

(هـ) تسمى الدالة المتجهة $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ المعرفة بالمساواة

$$f(X) = X + a$$

حيث a عنصر مثبت من $\mathbb{R}^n$ ، انسحابا للفضاء $\mathbb{R}^n$ قدره a . ومن الواضح أن المركبة f_i للدالة f هي الدالة $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ المحددة بالدستور

$$f_i(X) = x_i + a_i \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

وكما فعلنا في حالة الدوال الحقيقية لعدة متغيرات ، فانه يمكن أن نستنتج من التعاريف العامة لنهاية واستمرار دالة من فضاء متري إلى آخر ، والواردة في الفصلين الرابع والخامس من [١] أن التعاريف

والنظريات ١٧را و ٧٢را و ٧٣را والشق (آ) من ٧٤را والشق (آ) من ٧٥را و ٨١را و ٨٢را و ٨٣را و ٨٤را و ٨٦را ، التي أدرجناها بصدد الدوال الحقيقية على جزء S من $\mathbb{R}^n$ ، تبقى صحيحة في حال الدوال المتجهة لعدة متغيرات ، شريطة أن نضع في النصوص الجديدة عبارة "دالة متجهة مداها في $\mathbb{R}^m$ " ، بدلا من عبارة "دالة حقيقية" ، والرمز " $\|\cdot\|$ " (الذي يعني النظيم الاقليدي على $\mathbb{R}^m$) ؛ بدلا من الرمز $|\cdot|$ (الذي يعني القيمة المطلقة، أي النظيم الاقليدي على $\mathbb{R}$.

هذا ولا يوجد معنى للشقين (ب) و (جـ) من التعاريف ٧٤را في حالة الدوال المتجهة . الا أنه يمكن تعريف حاصل ضرب عدد حقيقي بدالة متجهة على النحو التالي :

١٣ر٤ – تعريف

لتكن $f : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^m$ دالة متجهة لـ n من المتغيرات الحقيقية ، وليكن α عددا حقيقيا ما . نعرف αf على أنه دالة معرفة على $\mathfrak{D}$ ، بحيث أنه أيا كان x من $\mathfrak{D}$ ،فان

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \left(\alpha f_1(x), \ldots, \alpha f_n(x)\right)$$

هذا ، ونترك للقارئ التحقق بأنه اذا كانت الدالة f هذه مستمرة في نقطة x من D ، فان الدالة αf مستمرة في x ، أيا كان العدد الحقيقي α .

٤ر٢ – الدوال الخطية من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^m$.

٤ر٢ر١ – تعريف

نقول عن دالة $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ انها تطبيق خطي (أو تحويل خطي ، أو موءثر خطي) ، اذا تحقق الشرطان التاليان :

(آ) أيا كان $x_1, x_2^{(0)}$ من $\mathbb{R}^n$ ، فان

$$T(x_1 + x_2^{(0)}) = T(x_1) + T(x_2^{(0)})$$

(ب) أيا كان x من $\mathbb{R}^n$ ، وأيا كان a من $\mathbb{R}$ ، فان

$$T(ax) = aT(x)$$

ومن السهل التحقق بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق T خطيا ، هو أن تتحقق المساواة

$$T(ax_1 + bx_2^{(0)}) = aT(x_1) + bT(x_2^{(0)})$$

أيا كان $x^{(0)}$ و x من $\mathbb{R}^n$ ، وأيا كان العددان

الحقيقيان a, b .

يرمز أحيانا لعنصر ما $x = (x_1, \ldots, x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ بالمصفوفة العمودية

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

كما يرمز للدالة $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ، التي مركباتها $(f_1, \ldots, f_m)$ ، بالمصفوفة العمودية

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

٢٢ر٤ – نظرية

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ خطيا هو أن يكون

$$T(X)=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

حيث a_{ij} أعداد ثابتة .

البرهان . من الممكن التحقق ، باستعمال طريقة الاستقراء الرياضي ، أنه اذا كان التطبيق T خطيا ، فان

$$T(a_1x^1+a_2x^2+\dots+a_kx^k)$$
$$=a_1T(x_1)+a_2T(x_2)+\dots+a_kT(x_k) \qquad (2)$$

وذلك أيا كانت النقاط $X_1, X_2, \dots, X_k$ من $\mathbb{R}^n$ ، وأيا كانت الأعداد الحقيقية $a_1, a_2, \dots, a_k$.

هذا ، ويمكن كتابة أي X من $\mathbb{R}^n$ بالشكل

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\dots+x_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$$

حيث $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ هي القاعدة الطبيعية في الفضاء $\mathbb{R}^n$.

وبتطبيق (2) على الحالة $a_i = x_i$ ، $X_i = e_i$

فاننا نجد

$$T(X) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \cdots + x_n T(e_n) \qquad (3)$$

فاذا افترضنا أن

$$T(e_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

فانه يعد بالامكان كتابة (3) على النحو التالي :

$$T(X) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

وهذا يكافئ المساواة (1).

هذا ، ونترك اثبات العكس للقارئ. ∎

كذلك ، فاننا نترك للقارئ اثبات صحة النظرية التالية (والتي يمكن الاطلاع عليها في أي كتاب ابتدائي في موضوع الجبر الخطي) :

٢٣ر٤ – نظرية

(آ) اذا كان T_1 , T_2 تطبيقين خطيين من $\mathbb{R}^n$ الى $\mathbb{R}^m$ ، وكانت مصفوفتاهما A_1 , A_2 على التوالي، فان $a_1 T_1 + a_2 T_2$ تطبيق خطي من $\mathbb{R}^n$ الى $\mathbb{R}^m$ مصفوفته $a_1 A_1 + a_2 A_2$.

(ب) اذا كان

$$T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p , \quad T_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$$

تطبيقين خطيين مصفوفتاهما A_1 , A_2 على التوالي ، فان مركبة هذين التطبيقين ، أي التطبيق $T_3 = T_2 \circ T_1$ المعرف بالمساواة

$$T_3(x) = T_2 (T_1(x))$$

هو تطبيق خطي من $\mathbb{R}^n$ الى $\mathbb{R}^m$ مصفوفته $A_2 A_1$.

(حـ) اذا نظرنا الى العنصر

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

على أنه مصفوفه $n \times 1$ ، فانه يمكن كتابة التطبيق الخطي (1) بالشكل

$$T = AX$$

٣ر٤ ـ قابلية الاشتقاق

١ر٣ر٤ ـ تعريف

لتكن $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}^n$ ، وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}^m$ ، ولتكن c نقطة داخلية من D . نقول عن f انها قابلة للاشتقاق في النقطة c ، اذا كانت كل من مركباتها f_i قابلة للاشتقاق في هذه النقطة.

٣٢ر٤ — نظريــــــة

لتكن $f=(f_1, f_2, \dots, f_m)$ دالة معرفة على جزء $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^n$ ، وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}^m$ ، لنفرض أن f معرفة على جوار للنقطة (الداخلية) c ، محتوى بكامله بكاملة في $\mathcal{D}$. عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كي تكون f قابلة للاشتقاق في c هو أن توجد مصفوفة ثابتة $m \times n$ ، ولتكن A ، بحيث يكون

$$\lim_{X \to C} \frac{f(X) - f(C) - A(X-C)}{\| X - C \|} = 0 \qquad (5)$$

هذا ، وان المصفوفة A ، في حال تحقق (5) تعطي بصورة وحيدة بالدستور

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(c)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(c)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

البرهان . اذا كانت f قابلة للاشتقاق في c ،فان

كلا من $f_1, f_2, \ldots, f_m$ قابل للاشتقاق في c تعريفاً .

يترتب على هذا (استنادا الى التمرين ٢-١٩) أن

$$\lim_{x \to c} \frac{f_i(x) - f_i(c) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(c)}{\partial x_j}(x_j - c_j)}{\|x - c\|} = 0, \quad (1 \leq i \leq m) \quad (7)$$

ولما كان نظيم الكسر الوارد في (5) يساوي الجذر التربيعي لمجموع مربعات الكسور الواردة في (7) (عندما تأخذ i القيم $1, 2, \ldots, m$)، فان (7) تقتضي (5)، حيث A محدودة كما في (6). وبذا يكون قد أثبتنا لزوم الشرط .

وبالعكس ، لنفرض صحة (5)، حيث $A = [a_{ij}]$.

بما أن كلا من مركبات المتجه الوارد في (5) تسعى الى الصفر عندما يسعى x الى c ، فان

$$\lim_{x \to c} \frac{f_i(x) - f_i(c) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - c_j)}{\|x - c\|} = 0, \quad (1 \leq i \leq m)$$

وهذا يعني (استنادا الى التمرين ٢-١٩) أن كلا من الدوال f_i قابل للاشتقاق في النقطة c ، الامر الذي يترتب عليه تعريفا أو التطبيق f قابل للاشتقاق في c .

ونترك للقارئ التحقق من صحة ماتبقى من هذه النظرية . ∎

٤ر٣٣ – تعريف

يسمى التطبيق $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ متآلفا (أوآفينيا)
اذا أمكن كتابته بالشكل

$$g(x) = b + A(x - c)$$

حيث b نقطة مثبتة في $\mathbb{R}^m$ ، و c نقطة مثبتة في $\mathbb{R}^n$ ، و A مصفوفة ثابتة $m \times n$.

وتبين النظرية ٤ر٣٢ أنه اذا كان f تطبيقا قابلا للاشتقاق في c ، فانه يكون مقربا بصورة جيدة من تطبيق متآلف في جوار النقطة c .

٤ر٣٤ – مثال

ان مركبات التطبيق $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف كالتالي

$$f(x) = \begin{bmatrix} x^2 + y + 2z \\ \cos(x + y + z) \\ e^{xyz} \end{bmatrix}$$

قابلة للاشتقاق في النقطة $c = (1, -1, 0)$. فاذا حسبنا المشتقات الجزئية لهذه المركبات ، فاننا نجد

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي ، فانه يترتب على النظرية ٣٢ر٤ أن التطبيق المتآلف

$$g(x)=f(c)+A(x-c)=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-1\\y+1\\z\end{bmatrix}$$

يحقق المساواة

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-g(x)}{\|x-c\|}=0$$

٣٥ر٤ــ تعريف (تفاضل تطبيق)

لتكن $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ دالة قابلة للاشتقاق في نقطة داخلية c من مجموعة تعريفها . يطلق اسم تفاضل f في c (أو مشتق فريشته للدالة f في c) على الدالة الخطية $d_cf:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ المحددة بالدستور:

$$d_cf=\begin{bmatrix}d_cf_1\\d_cf_2\\\vdots\\d_cf_m\end{bmatrix}\qquad(8)$$

تسمى المصفوفة A المعرفة بالمساواة (16) المصفوفة

<u>التفاضلية للدالة f في c</u> ، وسنرمز لها بـ $f'(c)$ ،

أي أن :

$$f'(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(c)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(c)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

يترتب على هذا وعلى (8) وعلى (11') من الفصل الثاني ،
أن تفاضل f في c يمكن أن يعبر عنه بالشكل

$$d_c f = f'(c) \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \qquad (10)$$

أو بالشكل

$$d_c f = f'(c)\, dX$$

حيث

$$dX = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

وعندما لايكون ضروريا التأكيد على النقطة C بعينها ،
فمن الممكن كتابة (8) بالشكل

$$df = \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_m \end{bmatrix}$$

وكتابة (9) على النحو التالي :

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

وكتابة (10) بالصيغة

$$df = f' dX$$

كذلك يمكن كتابة (5) بالشكل

$$\lim_{X \to C} \frac{f(X) - f(C) - f'(C)(X - C)}{\|X - C\|} = 0$$

٤ر٣٦ – أمثلــة

(أ) اذا كان $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ هو التطبيق الخطي

$$f(X) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = AX$$

حيث $A = [a_{ij}]$ ، فان

$$f'(X) = A$$

وهذا يعني أن المصفوفة التفاضلية لتطبيق خطي مستقلة عن X ، وتساوي مصفوفة التطبيق . فمثلا ، اذا كـــان $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ هو التطبيق

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

فان

$$f'(x,y,z) = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

(ب) اذا كان $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ التطبيق المطابق

$$f(X) = X$$

فان

$$f'(X) = I$$

حيث I المصفوفة الواحدية .

(حـ) ان التطبيق $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ التالي :

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x^2+y \\ x+y^2 \\ x^3+y^3 \end{bmatrix}$$

قابل للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ ، كما أن

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{bmatrix}$$

وبوجه خاص ،فان

$$f'(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ع٤ – خواص التطبيقات القابلة للاشتقاق

٤١ ع٤ – نظرية

(آ) اذا كان f, g تطبيقين معرفين على جزء من $\mathbb{R}^n$ ويأخذان قيمهما في $\mathbb{R}^m$ ، وكان هذان التطبيقان قابلين للاشتقاق في النقطة c ، فان $f+g$ قابل للاشتقاق في c ، كما أن

$$d_c(f+g) = d_c f + d_c g$$

(ب) اذا كان f تطبيقا معرفا على جزء من $\mathbb{R}^n$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$ ، وكان هذا التطبيق قابلا للاشتقاق في c ، فان التطبيق αf ، حيث α عدد

حقيقي ، قابل للاشتقاق في c ، كما أن

$$d_c(\alpha f) = \alpha\, d_c f \quad \blacksquare .$$

سنترك اثبات هذه النظرية للقارئ ، علما بأنها تنتج مباشرة من تعريف قابلية الاشتقاق ومن تعريف النهاية .

كذلك ،سنترك للقارئ اثبات النظريتين التاليتين (مسترشدا بأسلوب براهين النظريات المماثلة المتعلقة بالدوال الحقيقية لعدة متغيرات ، والواردة في الفصل الثاني) :

٤ر٤٢ – نظرية

اذا كان $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ تطبيقا قابلا للاشتقاق في نقطة c ، فانه مستمر في هذه النقطة . $\blacksquare$

٤ر٤٣ – نظرية

اذا كان $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ تطبيقا معرفا على جزء $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^n$ ، وكانت المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant m \;,\; 1 \leqslant j \leqslant n)$$

مستمرة في النقطة الداخلية c من $\mathcal{D}$ ، فان f قابل للاشتقاق في النقطة c. $\blacksquare$

سننتقل الآن الى موضوع التطبيقات العكسية .

٤٤ر٤ - تعريـــف

ليكن $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ تطبيقا معرفا على جزء $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^n$ ، ولنرمز لهذا التطبيق بـ

$$y = f(x) .$$

أي أن

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \qquad (11)$$

نقول عن التطبيق f انه مُفاضَل (أو قابل للاشتقاق) باستمرار اذا وجد لكل من الدوال $f_1, \ldots, f_n$ مشتقات أولى مستمرة . كذلك ، فاننا نعرف يعقوبي التحويل (11) على أنه المعين

$$J = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

٤٥ر٤ - نظرية (التطبيق العكسي)

ليكن $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ تطبيقا متباينا وغامـــرا

وقابلا للاشتقاق باستمرار ، ومعرفا على جزء $\mathbb{D}$ من $\mathbb{R}^n$

ولنفترض أن $x^0 \in \mathbb{D}$ ، وأن $y^0 = f(x^0)$.

فاذا كان $J(x^0) \neq 0$ ، فانه توجد جوارات

$$\{ x : \| x - x^0 \| < \delta' \} \qquad (12)$$

$$\{ y : \| y - x^0 \| < \delta \} \qquad (13)$$

بحيث أنه يقابل كلّ عنصر y من (13) عنصر وحيد $x = g(y)$ ، بحيث يكون $f(x) = y$. وفضلا عن ذلك ، فان التطبيق g قابل للاشتقاق باستمرار على (13).

البرهان . لنورد الرمز

$$F_i(x, y) = f_i(x) - y_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون $y = f(x)$ ، هو أن يكون

$$F_i(x, y) = 0$$

ولما كان لدينا فرضا $F_i(x^0, y^0) = 0$ أيا كان $1 \leq i \leq n$ ، وكان $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ، فان

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = J \neq 0$$

في النقطة (x°, y°) . وبالتالي ، فان استخدام النظرية ٣٦ر٣ يبين وجود جوارات من النمط (13)، (12) ، بحيث أنه يقابل كل عنصر y من (13) عنصر وحيد $x = g(y)$ في (12) . وفضلا عن ذلك ، فان $g(y)$ قابل للاشتقاق باستمرار في (13) . وبذا يكتمل البرهان ٠

٤٦ر٤ – مثال

لنأخذ التحويل $f: D \to \mathbb{R}^3$ (من الاحداثيات القطبية الفضائية الى الاحداثيات الديكارتية) :

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \qquad (14) \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

حيث

$$D = \{(r,\theta,\varphi) : 0 < r < \infty ,\ 0 < \theta < \pi ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

ان هذا التحويل قابلا للاشتقاق ، كما أن اليعقوبي في هذه الحالة هو

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \sin\theta \neq 0$$

وبالتالي فانه يوجد للتحويل f تحويل عكسي ،
ومن السهل التحقق بأن هذا التحويل يعطي بالمعادلات

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$\varphi = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{y}{x}$$

تمارين

(٤-١)

لتكن $f=(f_1,\dots,f_m)$ دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}^n$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}^m$.

برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون f مستمرة في نقطة c من D هو أن تكون كل من مركباتها مستمرة في هذه النقطة .

(٤-٢)

أثبت أن الدالة $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ المحددة بالمساواة

$$f(x)=x_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

مستمرة على $\mathbb{R}^n$.

(٤-٣)

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ الدالة المتجهة التالية :

$$f(x)=(x, c_2, \dots, c_n)$$

حيث $c_2,\dots,c_n$ أعداد حقيقية ثابتة .

(١) حدد ما اذا كانت f مستمرة على $\mathbb{R}$ ، وبين السبب .

(٢) أوجد مدى (أي مجموعة قيم) f .

(٤–٤)

ليكن $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تطبيقا خطيا

(أ) أثبت أن ثمة عددا حقيقيا غير سالب K بحيث يكون

$$\|Tx\| \leqslant K\|x\|$$

أيا كان x من $\mathbb{R}^n$.

(ب) اذا عرفنا نظيم T، الذي نرمز له بـ $\|T\|$، على أنه الحد الأدنى لمجموعة الاعداد غير السالبة K التي تحقق المتراجحة الأخيرة ، فأثبت أن $\|T\|$ موجود ، وأن

$$\|T(x)\| \leqslant \|T\| \ \|x\|$$

أيا كان x من $\mathbb{R}^n$ ، وأن

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

(حـ) اذا افترضنا $t : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ تطبيقا خطيا آخر ، فأثبت أن

$$\|T \circ t\| \leqslant \|T\| \ \|t\|$$

(٥–٤)

برهن أن المعادلة (٢) صحيحة في كل من

الحالات التالية :

(أ) $f(X)=\begin{bmatrix} 3x+4y \\ 2x-y \\ x+y \end{bmatrix}$ ، $c=(x_0, y_0, z_0)$

(ب) $f(X)=\begin{bmatrix} 2x^2+xy+1 \\ xy \\ x^2+y^2 \end{bmatrix}$ ، $c=(1,-1)$

(حـ) $f(X)=\begin{bmatrix} \sin(x+y) \\ \sin(y+z) \\ \sin(x+z) \end{bmatrix}$ ، $c=(\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4})$

(٤-٦)

ليكن

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m \quad , \quad g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$

تطبيقين معرفين على جزء $\mathbb{D}$ من $\mathbb{R}^n$ ،ومستمرين في النقطة c من $\mathbb{D}$. برهن أن جداء هذين التطبيقين

$$g f = (g f_1 , g f_2 , \dots , g f_n)$$

مستمر في c .

(٤-٧)

ليكن $f , g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ معرفين على جزء $\mathbb{D}$ من $\mathbb{R}^n$. برهن أنه اذا كان كل من f , g مستمرا في c من $\mathbb{D}$ ،فان $f+g$ و $f-g$ مستمران في c .

(٤-٨)

برهن أنه اذا كان $f : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^m$ تطبيقا معرفا على جزء $\mathfrak{D}$ من $\mathbb{R}^n$ ومستمرا على $\mathfrak{D}$ ، فان $\|f\|$ مستمر على $\mathfrak{D}$.

(٤-٩)

نقول عن تطبيق $f : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^m$ ، حيث $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ ، انه مستمر بانتظام على $\mathfrak{D}$ ، اذا كان كل من مركبات هذا التطبيق مستمرا بانتظام على $\mathfrak{D}$. برهن أنه اذا كان f مستمرا بانتظام على $\mathfrak{D}$ ، فانه يقابل كلّ عدد موجب ع عددٌ موجب ع ، بحيث يكون

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

اذا كان $\|x-y\| < \delta$ ، وكان x, y عنصرين من $\mathfrak{D}$.

(٤-١٠)

أوجد التطبيق المتآلف $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ الذي يحقق الشرط

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{\|x-c\|} = 0$$

في كل من الحالات التالية :

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2+2xy+z \\ x+2xz+y \\ x^2+y^2+z^2 \end{bmatrix}, C = (1,0,2)$$ (أ)

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, C = (0, \frac{\pi}{2})$$ (ب)

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2-y^2 \\ y^2-z^2 \\ z^2-x^2 \end{bmatrix}, C = (1,1,1)$$ (حـ)

(٤-١١)

أوجد f' في كل من الحالات التالية

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} (x+y+z)\, e^{z} \\ (x^2+y^2)\, e^{-x} \end{bmatrix}$$ (أ)

$$f(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$ (ب)

(هـ)

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x} \sin(yz) \\ e^{y} \sin(xz) \\ e^{z} \sin(xy) \end{bmatrix}$$

(٤–١٢)

برهن أنه اذا كان g_2 ، g_1 تطبيقين آفينيين ، وكان

$$\lim_{x \to c} \frac{g_1(x) - g_2(x)}{\|x - c\|} = 0$$

فان $g_1 = g_2$.

(٤–١٣)

برهن على صحة المبرهنة التالية :

ليكن $f : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^n$ تطبيقا معرفا على جزء $\mathfrak{D}$ من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن c نقطة داخلية في $\mathfrak{D}$. فاذا كان $\|f(c)\| \neq 0$ ، ورمزنا بـ ٢ للمقدار

$$\frac{1}{\|(f'(c))^{-1}\|}$$

فانه يقابل كلَّ عدد موجب ع عددٌ موجب δ ، بحيث أنه اذا كان x , y عنصرين ~~ينتميان~~ للكرة المفتوحة فان

$$\| f(x) - f(y) \| \geq (٢-ع) \| x - y \|$$

(٤-١٤)

لنأخذ التحويل $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ التالي

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi$$

حيث

$$\mathcal{D} = \{ (r,\varphi) : 0 < r < \infty , \ -\infty < \varphi < \infty \}$$

برهن أنه يوجد لهذا التحويل تحويل عكسي لـــه مشتقان أولان مستمران .

(٤-١٥)

لتكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ دالة معرفة كالتالي :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+y+(z-1)^2+1 \\ y+z+(x-1)^2-1 \\ z+x+(y-2)^2+3 \end{bmatrix}$$

ادرس وجود دالة عكسية للدالة f في جوارِ للنقطة

$$(x_0, y_0, z_0) = (1,2,1) .$$

الفصل الخامس

مبادئ نظرية التكاملات المضاعفة

من الممكن تعميم مفهوم تكامل ريمان $\int_a^b f(x)\,dx$ (الفصل الثامن ، [١]) ، وذلك بالاستعاضة عن المجال المغلق $[a,b]$ في $\mathbb{R}$ بمجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ، بحيث تكون الدالة الحقيقية f معرفة ومحدودة على هذه المجموعة الجزئية . ومن الطبيعي أن تكون أبسط المجموعات الجزئية الملائمة لهذا الغرض تعميمات للمجال المغلق $[a,b]$ في $\mathbb{R}$. ففي الفضاء $\mathbb{R}^2$ ، تستعمل المستطيلات المغلقة ، وهي مجموعات ممثلة بجداءات ديكارتيه من النمط $[a,b] \times [c,d]$ ، وعندها تسمى التكاملات الحاصلة ثنائية . وفي الفضاء $\mathbb{R}^3$ ، تستعمل متوازيات المستطيلات المغلقة ،وهي الممثلة بجداءات ديكارتيه من النمط $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ ،وعندها تسمى التكاملات الناتجة ثلاثية . ولدراسة التكاملات المضاعفة على مجموعات جزئية من $\mathbb{R}^n$ ، $(n \geq 2)$ ، فلا بد من تعميم مفهوم الطول والمساحة والحجم . ويطلق على

هذا المفهوم اسم " القياس " أو " السعة " ، الأمر الذي نورده في سياق البند التالي .

١ر٥ – المجموعات صفرية السعة

١١ر٥ – تعريف

لتكن $I_1, \dots, I_n$ مجالات حقيقية (ليست بالضرورة مفتوحة أو مغلقة) ، ولنرمز ب a_k, b_k لطرفي المجال I_k ، حيث $a_k \leq b_k$. يطلق اسم المجال R ذي البعد n على الجداء الديكارتي لهذه المجالات ، أي أن

$$R = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k , k = 1, \dots, n \}$$

وتعرف سعة المجال R بأنها الجداء

$$c(R) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

ففي الحالة $n=1$ ، فان السعة ليست الا الطول ، وعندما $n=2$ ، فانها المساحة ، وعندما $n=3$ فانها الحجم .

وتجدر بنا ملاحظة أنه اذا كان

$$R=I_1 \times \dots \times I_n \quad , \quad S=J_1 \times \dots \times J_n$$

مجالين في $\mathbb{R}^n$ ، وكان لـ I_k , J_k الطرفان نفسهما عندما $k=1,\dots,n$ ، فان $c(R)=c(S)$.
كذلك ، فاذا اتفق أن كان $a_k=b_k$ في المجال I_k فان $c(R)=0$.

تسمى الاعداد $b_1-a_1,\dots,b_n-a_n$ أطوال أحرف R . واذا كانت هذه الأعداد متساوية ، فان R يسمى مكعبا .

٥ر١٢ – تعريف

نقول عن مجموعة جزئية E من $\mathbb{R}^n$ انها صفرية السعة ، اذا وجد لكل عدد موجب ε مجموعة منتهية من المجالات $R_1,\dots,R_m$ في $\mathbb{R}^n$ ، بحيث

يحوي اجتماعهما E ، وبحيث يكون

$$\sum_{j=1}^{m} c(R_j) < \varepsilon \qquad (1)$$

١٣ر٥ – مثال

لما كانت المجموعة الخالية محتواة في أي مجال ، فانها صفرية السعة . كذلك ، فاذا كانت المجموعة E مؤلفة من عدد منته من النقاط ، ولتكن $x_1, \ldots, x_m$ ، فمن الممكن احاطة النقطة x_j بالمجال R_j بحيث يكون

$$c(R_j) < \frac{\varepsilon}{m} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

ويترتب على هذا أن $\bigcup_{j=1}^{m} R_j \supseteq E$ ، وأن $\sum_{j=1}^{m} c(R_j) < \varepsilon$ ، اذن E صفرية السعة .

١٤ر٥ – مثال

لتكن $\{x_m\}; m \in N$ متتالية في $\mathbb{R}^n$ متقاربة من x . سنبين أن المجموعة $X = \{x_m : m \in N\}$ صفرية السعة . ليكن ε عددا موجبا ما ، وليكن R مجالا مفتوحا يحوي النقطة x ، بحيث أن $c(R) < \varepsilon$.

بما أن $x_m \to x$ ، فثمة عدد صحيح موجب m_0 ، بحيث أنه اذا كان $m > m_0$ ، فان $x_m \in R$ ، فاذا أخذنا

$$R_1 = \{x_1\} , \ldots , R_{m_0} = \{x_{m_0}\}$$

فاننا نلاحظ أن $X \subseteq R_1 \cup \cdots \cup R_{m_0} \cup R$ وأن

$$c(R_1) \cup \cdots \cup c(R_{m_0}) \cup c(R) < 0 + \cdots + 0 + \varepsilon \quad \varepsilon$$

ولما كان العدد الموجب ε اختياريا ، فاننا نستنتج أن X صفرية السعة .

هذا ، ونترك للقارئ التحقق من صحة النظرية التالية :

١ر٥ – نظريـــة

ان اجتماع عدد منته من المجموعات صفرية السعة مجموعة صفرية السعة . ∎

٢ر٥ – التكاملات الثنائية

اذا كان $[a,b]$ مجالا مغلقا محدودا في $\mathbb{R}$ فان تجزئة $[a,b]$ تعرف بأنها مجموعة منتهية من نقاط $[a,b]$ تحوي النقطتين a, b ([١] – ٨،١) .

ولما كانت كل مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية يمكن ترتيبها تصاعديا ، فان التجزئة المؤلفة من

$n+1$ من النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ يمكن اعتبارها مرتبة بالشكل $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$، وهكذا فان التجزئة لـ $[a,b]$ هي المجموعة $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$، حيث العناصر x_k مرتبة بالشكل السابق . ونقول عن تجزئة أولى انها تفتيت لتجزئة ثانية اذا كانت الأولى تحوي الثانية .

١٢ر٥ – تعاريف

لنأخذ المستطيل المغلق

$$R = [a,b] \times [c,d] \qquad (2)$$

فاذا كانت P_1 تجزئة لـ $[a,b]$ ، و P_2 تجزئة لـ $[c,d]$ ، فاننا نسمي $P_1 \times P_2$ تجزئة للمستطيل R.

وهذا يعني هندسيا أن تجزئة المستطيل تقسمه الى الى عدد منته من المستطيلات الجزئية. واذا كانت

$$P = P_1 \times P_2 \quad , \quad P' = P'_1 \times P'_2$$

تجزئتين للمستطيل R ، فاننا نسمي P' تفتيتا لـ P اذا كان P'_1 تفتيتا لـ P_1 ، و P'_2 تفتيتا لـ P_2.

لتكن

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \times \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \qquad (3)$$

تجزئة للمستطيل (ℓ) ، ولنرمز بـ R_{ij} للمستطيل المغلق $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. فاذا كانت

$f(x, y)$ دالة حقيقية محدودة ومعرفة على R ،

فاننا نرمز بـ $M_{ij}(f), m_{ij}(f)$ للمقدارين

$$M_{ij}(f) = \sup\{ f(x, y) ; (x, y) \in R_{ij} \}$$

$$m_{ij}(f) = \inf\{ f(x, y) : (x, y) \in R_{ij} \}$$

كما نرمز بـ Δ_{ij} لمساحة R_{ij} ؛

$$\Delta_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

وبـ $\max\limits_{i,j} |R_{ij}|$ للمقدار

$$\max_{i,j} |R_{ij}| = \max_{i,j} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

عندئذ يسمى العددان على التوالي

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(f) \Delta_{ij}$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}(f) \Delta_{ij}$$

مجموعي ريمان الأعلى والأدنى للدالة f بالنسبة للتجزئة P .

من الواضح أن $m_{ij}(f) \leq M_{ij}(f)$ دوماً ، وبالتالي

فان $L(f,P) \leq U(f,P)$.

سنورد الآن نظريتين تنظمان العلاقات التي تربط بين مجموعي ريمان الأعلى والأدنى بالنسبة لتجزئتين مختلفتين لِ R ، والتي نترك للقارئ اثباتهما باتباع خطوات مماثلة تماما لتلك التي سلكناها في اثبات النظريتين ٢ر٨ و ٣ر٨ من [1] .

٢٢ر٥ – نظرية

لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية محدودة معرفة على المستطيل المغلق R ، ولنفترض أن P, P' تجزئتان لِ R ، بحيث يكون P' تفتيتا لـ P ، عندئذ يكون

$$U(f,P') \leq U(f,P)$$
$$L(f,P') \geq L(f,P)$$

٢٣ر٥ – نظريـــة

لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية محدودة معرفـــة على المستطيل المغلق R ، ولتكن P, P' أي تجزئتين لـ R . عندئذ لابد أن يكون

$$L(f, P) \leq U(f, P')$$

٢٤ر٥ – نتيجـــة

يترتب مباشرة على النظرية ٢٣ر٥ ، أنه اذا كانت $f(x,y)$ دالة حقيقية محدودة معرفة علـــى المستطيل المغلق R ، وكان

$$M = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in R\}$$

$$m = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in R\}$$

فان

$$m(b-a)(d-c) \leq L(f, P) \leq U(f, P') \leq M(b-a)(d-c)$$

وذلك أيا كانت التجزئتان P, P' للمستطيل R .

تبين هذه النتيجة مباشرة أنه اذا رمزنـــا

بـ $\mathcal{P}(R)$ لمجموعة كل التجزئات الممكنة للمستطيل
R ، فان كلا من المجموعتين

$$\{ U(f,P) : P \in \mathcal{P}(R) \}$$

$$\{ L(f,P) : P \in \mathcal{P}(R) \}$$

لابد وأن تكون محدودة .

٢٥ر٥ – تعريـــف

لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية محدودة معرفة على المستطيل المغلق R . نعرف تكاملي ريمان الاعلـــى والأدنى لـ f على R بأنهما

$$\overline{\iint}_R f(x,y)\, dA = \inf \{ U(f,P) : P \in \mathcal{P}(R) \}$$

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\, dA = \sup \{ L(f,P) : P \in \mathcal{P}(R) \}$$

على الترتيب

هذا وان هذين التكاملين موجودان ، ذلك أننا وجدنـــا في ٢٤ر٥ أن المجموعة

$$\{ U(f,P) : P \in \mathcal{P}(R) \}$$

محدودة من الأدنى بالعدد $m(b-a)(d-c)$ والمجموعة

$$\{ L(f,P) : P \in \mathcal{P}(R) \}$$

محدودة من الأعلى بالعدد $M(b-a)(d-c)$.

ونترك للقارئ التحقق من صحة الدعوى التالية :

٥ر٢٦ – نظرية

(أ) اذا كانت f دالة محدودة على المستطيل المغلق R ، فان

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,dA \leq \overline{\iint}_R f(x,y)\,dA$$

(ب) يقابل كلّ عدد موجب ε عددٌ موجبٌ δ ، بحيث أنه اذا كانت $\mathcal{P}$ تجزئة للمستطيل R تحقق الشرط $\max |R_{ij}| < \delta$ ، فلا بد أن يكون

$$0 \leq U(f,P) - \overline{\iint}_R f(x,y)\,dA < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < L(f,P) - \underline{\iint}_R f(x,y)\,dA \leq 0$$

٥ر٢٧ – تعريف

نقول عن الدالة $f(x,y)$ انها قابلة للمكاملة وفق ريمان على R اذا كان

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,dA = \overline{\iint}_R f(x,y)\,dA$$

وعندئذ نعرف القيمة المشتركة لتكاملي ريمان الاعلى والادنى على أنها تكامل ريمان على R ، ونرمز لهذا التكامل بالشكل

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

أو اختصارا بالشكل

$$\iint_R f\,dA$$

٢٨ر٥ – أمثلة

(١) اذا كانت $f(x,y)$ دالة ثابتة معرفة على المستطيل R ، أي اذا كان ثمة عدد حقيقي α ، بحيث $f(x,y)=\alpha$ أيا كان (x,y) من R ، فمن الواضح أنه اذا كانت P أي تجزئة لـ R ،فان

$$L(f,P)=U(f,P)=\alpha(b-a)(d-c)$$

وبالتالي ،فان تكاملي ريمان الاعلى والادنى متساويان، لذا ، فان دالتنا قابلة للمكاملة وفق ريمان على R ، وتكاملها هو

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\alpha(b-a)(d-c)$$

(٢) لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على المستطيل

المغلق R ومحددة بالدستور

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & (\text{عندما } x,y \in Q) \\ 0 & (\text{فيما عدا ذلك}) \end{cases}$$

لما كان كل مستطيل جزئي من أي تجزئة للمستطيل R يحتوي نقاطاً من $Q \times Q$ ، حيث $f(x,y)=1$، ونقاطاً تختلف عن نقاط $Q \times Q$ ، حيث $f(x,y)=0$، فاننا نستنتج أنه أيا كانت التجزئة P للمستطيل R ، فان

$$L(f,P)=0 \quad , \quad U(f,P)=c(R)$$

وبالتالي يكون

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,dA=0$$

$$\overline{\iint}_R f(x,y)\,dA=c(R)$$

لذا ،فان دالتنا غير قابلة للمكاملة على R .

(٣) لتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على المستطيل المغلق (2) ومحددة بالدستور

$$f(x,y)=x+y$$

ولتكن

$$P_1=\{x_0=a, x_1, \ldots, x_n=b\}, \quad P_2=\{y_0=c, y_1, \ldots, y_m=d\}$$

تجزئتين لـ $[a,b], [c,d]$ على الترتيب . ان القيمتين العظمى والصغرى للدالة f على المستطيل الجزئي $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ هما x_i+y_j ، $x_{i-1}+y_{j-1}$

على الترتيب . لذا فان

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) \quad (4)$$

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{i-1}+y_{j-1})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) \quad (5)$$

وبتعويض

$$x_i=\frac{(x_i+x_{i-1})}{2}+\frac{(x_i-x_{i-1})}{2}$$

$$y_j=\frac{(y_j+y_{j-1})}{2}+\frac{(y_j-y_{j-1})}{2}$$

في (4) نجد أن

$$U(f,P)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i^2-x_{i-1}^2)(y_j-y_{j-1})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-x_{i-1})^2(y_j-y_{j-1})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-x_{i-1})(y_j^2-y_{j-1}^2)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4\right) \qquad (6)$$

فاذا رمزنا بـ $\overline{P}_1$ لأطول مجال جزئي من المجالات $[x_{i-1}, x_i]$ ، وبـ $\overline{P}_2$ لأطول مجال جزئي من المجالات $[y_{j-1}, y_j]$ ، فاننا نترك للقارئ التحقق من أن

$$\Sigma_1 = (d-c)(b^2-a^2)\ ,\ 0<\Sigma_2 \leq \overline{P}_1(b-a)(d-c)$$

$$\Sigma_3 = (b-a)(d^2-c^2)\ ,\ 0<\Sigma_4 \leq \overline{P}_2(b-a)(d-c)$$

فاذا رمزنا بـ $\overline{P}$ للمقدار $\overline{P} = \max\{\overline{P}_1, \overline{P}_2\}$ ، فمن السهل ملاحظة أن

$$I < U(f,P) < I + \overline{P}(b-a)(d-c)$$

حيث

$$I = \frac{(b-a)(d^2-c^2)+(b^2-a^2)(d-c)}{2}$$

يترتب على هذا أن $\overline{\iint_R} f(x,y)\,dA = I$.

وبتعويض

$$x_{i-1} = \frac{(x_i + x_{i-1})}{2} - \frac{(x_i - x_{i-1})}{2}$$

$$y_{j-1} = \frac{(y_j + y_{j-1})}{2} - \frac{(y_j - y_{j-1})}{2}$$

في (٥) ، فاننا نجدبعدالقيام باجراءات مماثلة أن

$$I - \bar{P}(b-a)(d-c) < L(f, P) < I$$

$$\underline{\iint}_R f(x, y)\, dA = I$$

وبالتالي ، فان f قابلة للمكاملة وفق ريمان على R ، كما أن

$$\iint_R f(x, y)\, dA = I \,.$$

ان تعريفنا لتكامل ريمان يمكننا من التوصل الى النظرية التالية ، التي تحدد السمات المميزة للدوال القابلة للمكاملة وفق ريمان .

٢٩ر٥ – نظرية

الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة الحقيقية المحدودة f المعرفة على المستطيل المغلق R قابلة للمكاملة وفق ريمان على R ، هو أن يقابل كل عدد

موجب ε تجزئة P_ε للمستطيل R ، بحيث يكون

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

<u>البرهان</u> . لنفترض أولا تحقق شرط النظرية . عندئذ يقابل العددَ الموجبَ ε تجزئةٌ P_ε لِـ R ، بحيث يكون

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dA \leq U(f, P_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\iint_R} f(x,y)\,dA$$

ولما كان

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA \leq \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA$$

فاننا نجد أن

$$0 \leq \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA - \underline{\iint_R} f(x,y)\,dA < \varepsilon$$

ولما كان هذا صحيحا أيا كان العدد الموجب ε ،فان

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dA$$

أي أن f قابلة للمكاملة وفق ريمان على R .

وبالعكس ، لتكن f قابلة للمكاملة وفق ريمان على R ، وليكن ε عددا موجبا ما . اذن نستنتج من تعريف الحدين الأعلى والأدنى لمجموعة أنه توجد تجزئتان P, P' لـ R ، بحيث يكون

$$0 \leq U(f, P_1) - \overline{\iint_R} f(x,y)\, dA < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq \underline{\iint_R} f(x,y)\, dA - L(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (7)$$

فاذا كان $P_\varepsilon = P \cup P'$ ، فان P_ε تفتيت لكل من P, P' ، ونجد عندئذ مايلي :

$$0 \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon)$$

$$\leq U(f, P_1) - L(f, P_2) \qquad \text{(النظرية (٥ر٢٢))}$$

$$= U(f, P_1) - \overline{\iint_R} f(x,y)\, dA + \underline{\iint_R} f(x,y)\, dA - L(f, P_2)$$

$$< \varepsilon$$

(استنادا الى (7))

لذا ، فان شرط النظرية محقق .■

نظرية — ٥ر٢٩

لتكن $f : R \to \mathbb{R}$ دالة محدودة ساحتها R هي المستطيل المغلق (٤) . فاذا وجدت مجموعة جزئية E من R صفرية السعة ، بحيث تكون f مستمرة على $R - E$ ، فان f تكون قابلة للمكاملة وفق

ريمان على R .

<u>البرهان</u> . لتكن

$$M = \sup \{ |f(x,y)| : (x,y) \in R \}$$

فاذا كان ε عددا موجبا ما ، فثمة مجموعة منتهية من المجالات $R_1, \ldots, R_h$ المفتوحة في $\mathbb{R}^2$ (أي من المستطيلات المفتوحة) بحيث أن

$$R_0 = R_1 \cup \ldots \cup R_h \supseteq \mathcal{E}$$

وأن

$$\sum_{j=1}^{h} c(R_j) < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad (8)$$

($c(R_j)$ هي مساحة المستطيل R_j) . لنرمز بـ R^* لمجموعة النقاط المنتمية لـ R دون R_0 . بما أن R_0 مجموعة مفتوحة و R مجموعة مغلقة ، فان R^* مجموعة مغلقة . وبالتالي ، فان الدالة f، المستمرة على R^* لابد وأن تكون منتظمة الاستمرار على R^* . لذا ، فانه يقابل ε عدد موجب δ، بحيث أنه اذا كان (x', y') ، (x, y) أي عنصرين من R^* يحققان الشرط

$$\|(x,y)-(x',y')\| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} < \delta$$

فان

$$|f(x,y)-f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{2C(R)} \qquad (٩)$$

(من الواضح أن $(C(R)=(b-a)(d-c)$

ان رؤوس المستطيلات $R_1,\dots,R_h$ تقع على عدد منته من المستقيمات $x=\hat{x}_i$ ، $y=\hat{y}_j$. لتكن $P=P_1\times P_2$ ، حيث

$$P_1=\{x_0=a, x_1,\dots, x_n=b\},\quad P_2=\{y_0=c, y_1,\dots, y_m=b\}$$

تجزئة لـ R تحقق الشرط

$$\max|R_{ij}| = \max\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2}$$

بحيث تنتمي النقاط $\hat{x}_i$ الى التجزئة P_1 للمجال $[a,b]$ ، وتنتمي النقاط $\hat{y}_j$ الى التجزئة P_2 للمجال $[c,d]$. سنبين الآن أن مجموعي ريمان المقابلين للتجزئة P هذه تحقق المتراجحة

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij}-m_{ij})\Delta_{ij}<\varepsilon \qquad (10)$$

الأمر الذي يترتب عليه صحة النظرية ٥ر٢٩١ ، استنادا الى النظرية ٥ر٢٩ .

نلاحظ أولا أن التجزئة P هي أيضا تجزئة للصاقة $\bar{R}_k$ للمستطيل المفتوح R_k ، ذلك أن R_k

هو المجموعة

$$\{ (x,y) : \hat{x}_i < x < \hat{x}_j \ , \ \hat{y}_r < y < \hat{y}_s \}$$

وبالتالي فان كلا من $\bar{R}_k$ يمكن أن تكتب على شكل اجتماع منته لمستطيلات R_{ij} ، وسنرمز لهذه المستطيلات ب $R_\lambda^{(k)}$ ، $(\lambda = 1, \ldots, \alpha_k)$ عندئذ يكون

$$\sum_\lambda c(R_\lambda^{(k)}) = c(R_k)$$

ان اللصاقة R_0 للمجموعة $\bar{R}_0$ هي اجتماع المستطيلات

$$R_\lambda^{(k)} \ , \quad (\lambda = 1, \ldots, \alpha_k \ ; \ k = 1, \ldots, h)$$

وليس من الضروري أن تكون المستطيلات $R_\lambda^{(k)}$ مختلفة أحدها عن الاخر ،ذلك أن أي مستطيل منتم الى ٢ من المستطيلات $\bar{R}_m$ ، لابد أن يظهر ٢ مرة بين المستطيلات $R_\lambda^{(k)}$.

لنرمز بـ Σ' للمجموع الجزئي من $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m}$

الموافق لكل الأدلة i, j التي يقع من أجلها R_{ij} في $\bar{R}_0$ ، ولنرمز بـ Σ'' للمجموع الجزئي الموافق للأدلة الباقية . عندئذ يكون

$$\Sigma' \Delta_{ij} = \Sigma' c(R_{ij}) \leqslant \sum_{k=1}^{h} \sum_{\lambda=1}^{\alpha_k} c(R_\lambda^{(k)})$$

$$= \sum_{k=1}^{h} c(R_k) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

اذن (11)
$$\sum{}'(M_{ij}-m_{ij})\Delta_{ij} \leq 2M\sum{}'\Delta_{ij} < 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (11)$$

ان كل مستطيل R_{ij} ، دليلاه i, j واردان في المجموع $\sum{}''$ ، يجب أن يكون محتوىً في R^* . وبالافادة من (9) نجد أن

$$\sum{}''(M_{ij}-m_{ij})\Delta_{ij} \leq \frac{\varepsilon}{2C(R)}\sum{}''\Delta_{ij} \leq \frac{\varepsilon}{2C(R)}\,C(R) = \frac{\varepsilon}{2} \quad (12)$$

ومن الواضح أنه يترتب مباشرة على (11) و (12) صحة (10) ، وبذا يكتمل برهان النظرية . ∎

٢٩٢ر٥ – مثال

لنأخذ الدالة $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ المعرفة كالتالي :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^3 & (0\leq x^2<y\leq 1 \text{ عندما}) \\ xy+100 & (0\leq y\leq x^2\leq 1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

من السهل ملاحظة أن هذه الدالة مستمرة على ساحتها $R = [0,1]\times[0,1]$ ، باستثناء جزء القطع المكافىء الممثل بالمجموعة

$$E = \{(x, g(x)) : g(x) = x^2,\ 0\leq x\leq 1\} \quad (13)$$

سنبين الآن أن المجموعة E صفرية السعة ، الأمر الذي يترتب عليه أن دالتنا f قابلة للمكاملة وفق ريمان على R استنادا الى النظرية ٥ر١٩٢ .

في الحقيقة ، ليكن ε عددا موجبا ما . لما كانت الدالة g مستمرة على $[0,1]$ ،فانها منتظمة الاستمرار على $[0,1]$. وبالتالي ، فهنالك عدد موجب δ ، بحيث أنه اذا كان x' ، x أي عنصرين من $[0,1]$ يحققان الشرط $|x-x'|<\delta$ ، فان

$$|g(x)-g(x')|<\frac{\varepsilon}{2}$$

لتكن $P=\{x_0=a, x_1, \dots, x_n=b\}$ تجزئة لـ $[0,1]$ بحيث أن أطول مجال جزئي من $[0,1]$ محدد بنقطتين متعاقبتين من P أصغر من δ ، ولنختر النقاط ξ_i بحيث يتحقق الشرط

$$x_{i-1}\leqslant \xi_i \leqslant x_i \qquad (i=1,\dots,n)$$

عندئذ يترتب على ماسبق أنه اذا كان x عددا يحقق الشرط $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$ ، فان

$$|g(x)-g(\xi_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

يعني هذا أن كل نقطة من المنحني $y=g(x)$ في المستوي xy واقعة فوق المجال $[x_{i-1}, x_i]$

لابد أن تكون محصورة داخل مستطيل مساحتـــــه $\leq \frac{\varepsilon}{2} (x_i - x_{i-1})$ ، ولما كانت المساحة الكلية لهذه المستطيلات تساوي $\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon$ ، فانــــه يترتب على هذا أن المجموعة E صفرية السعة .

لننتقل الآن الى الدوال المعرفة علـــى مجموعات جزئية محدودة من $\mathbb{R}^2$ ، حيث نفترض هـــذه المجموعات الجزئية ليست بالضرورة مجموعات مغلقـــة

٥ر٢٩٣ – تعريـف

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة جزئية محدودة من $\mathbb{R}^2$ ،ولتكن $f(x,y)$ دالة حقيقية محدودة معرفة على $\mathcal{D}$.

لنحدد دالة $f_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ كما يلي :

$$f_{\mathcal{D}}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{(عندما } (x,y) \in \mathcal{D}) \\ 0 & \text{(عندما } (x,y) \notin \mathcal{D}) \end{cases}$$

عندئذ نعرف تكامل f على $\mathcal{D}$ بالمساواة

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA = \iint_{R} f_{\mathcal{D}}(x,y)\, dA$$

حيث R أي مستطيل مغلق يحوي $\mathcal{D}$ ، شريطة أن يكون التكامل $\iint_{R} f_{\mathcal{D}}(x,y)\, dA$ موجودا .

من الواضح أنه كي يكون هذا التعريف سليما ، فلا بد لنا من اثبات أنه اذا كان R و $\tilde{R}$ مستطيلين يحويان $\mathcal{D}$ ، وكان التكامل

$$\iint_R f_{\mathcal{D}}(x,y)\,dA$$

موجودا ، فان التكامل $\iint_{\tilde{R}} f_{\mathcal{D}}(x,y)\,dA$ موجود ، وهذان التكاملان متساويان . ونترك التحقق من هذا الأمر كتمرين للقارئ .

٣ر٥ – خواص التكاملات الثنائية

سنورد الآن بعض الخواص المتوقعة للتكاملات الثنائية . ومن الجدير بالملاحظة أنه في حال كون الساحة $\mathcal{D}$ مستطيلا ، فان براهين النظريات والنتائج التالية بدءا من ٣١ر٥ وحتى ٣٧ر٥ هي نفس البراهين للنظريات والنتائج ٣١ر٨ و ٣٤ر٨ و٣٥ر٨ و٣٦ر٨ و٣٧ر٨ و ٣٩ر٨ و ٣٩١ر٨ على الترتيب والتي أوردناها في [١] . أما في حالة كون $\mathcal{D}$ أي ساحة محدودة في $\mathbb{R}^2$ ، دون أن تكون مستطيلا بالضرورة ، فان النظريات والنتائج المذكورة تنتج مباشرة من التعريف ٢٩ ر٥ . وسنفترض

في هذا البند كله أن $\mathcal{D}$ مجموعة جزئية محـــدودة في $\mathbb{R}^2$.

٥ر٣١ – نظرية (خطية تكامل ريمان)

اذا كانت f, g دالتين حقيقيتين قابلتيـن للمكاملة على $\mathcal{D}$ ، وكان α, β عددين حقيقييـن، فان الدالة $\alpha f+\beta g$ لابد وأن تكون قابلـة للمكاملة على $\mathcal{D}$ ، كما أن

$$\iint_{\mathcal{D}} (\alpha f+\beta g)(x,y)\,dA=\alpha \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA+\beta \iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dA .$$

٥ر٣٢ – نظريـــة

اذا كانت f, g دالتين حقيقيتين قابلتيـن للمكاملة على $\mathcal{D}$ ، وكان $f(x,y) \geq g(x,y)$ أيا كان (x,y) من $\mathcal{D}$ ، فان

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \geq \iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dA .$$

٥ر٣٣ – نتيجـة

اذا كانت f دالة حقيقية قابلة للمكاملـة على $\mathcal{D}$ ، وكان $f(x,y) \geq 0$ أيا كان (x,y) من $\mathcal{D}$ ، فان

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \geq 0 .$$

٣٤ر٥ – نظريـــة

اذا كانت φ , f دالتين حقيقيتين ساحتهمـا المشتركة $\mathfrak{D}$ ، بحيث أن كلا من $f\varphi$ ، φ قابل للمكاملة على $\mathfrak{D}$ ، وأن $m \leq f(x,y) \leq M$ ، وأن $\varphi(x,y) \geq 0$ على $\mathfrak{D}$ ، فان

$$m \iint_{\mathfrak{D}} \varphi(x,y)\, dA \leq \iint_{\mathfrak{D}} f(x,y)\, \varphi(x,y)\, dA \leq M \iint_{\mathfrak{D}} \varphi(x,y)\, dA$$

٣٥ر٥ – نتيجـــة

اذا كانت f دالة حقيقية قابلة للمكاملـــة على ساحتها $\mathfrak{D}$ ، وكان

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

أيا كان (x,y) من $\mathfrak{D}$ ، فان

$$m\, C(\mathfrak{D}) \leq \iint_{\mathfrak{D}} f(x,y)\, dA \leq M\, C(\mathfrak{D})$$

حيث $C(\mathfrak{D})$ مساحة الساحة $\mathfrak{D}$.

٣٦ر٥ – نظريـــة

اذا كانت f دالة حقيقية قابلة للمكاملـــة

على ساحتها $\mathcal{D}$ ، فان $|f|$ قابلة للمكاملة على $\mathcal{D}$ ، كما يكون

$$\left| \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA \right| \leq \iint_{\mathcal{D}} |f(x,y)|\, dA \; .$$

٥ر٣٧ – نظريــــة

اذا كانت f, g دالتين حقيقيتين قابلتيــــن للمكاملة على $\mathcal{D}$ ،فان fg دالة قابلة للمكاملة على $\mathcal{D}$.

٥ر٣٨ – نظريــــة

اذا كانت $\mathcal{D}$ محتواة في مجموعة محدودة S ، وكانت f قابلة للمكاملة على $\mathcal{D}$ ، فان الدالــــة $f_{\mathcal{D}}$ ، المعرفة بالدستور (14) ، قابلــــــة للمكاملة على S ، كما أن

$$\iint_{S} f_{\mathcal{D}}(x,y)\, dA = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA$$

البرهان . ليكن R مستطيلا يحوي S . عندئذ لابــــد أن يحوي R المجموعة $\mathcal{D}$ كذلك ، ونجد وفق التعريــــف ٥ر٢٩٣ أن

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA = \iint_{R} f_{\mathcal{D}}(x,y)\, dA \qquad (15)$$

لنفترض الآن أن

$$(f_{\mathcal{D}})_S(x,y) = \begin{cases} f_{\mathcal{D}}(x,y) & ((x,y) \in S \text{ عندما}) \\ 0 & ((x,y) \notin S \text{ عندما}) \end{cases}$$

ان الدالة $f_{\mathcal{D}}$ قابلة للمكاملة على S ،استنادا الى التعريف ٣ر٩٣٥ ،كمّا أن

$$\iint_S f_{\mathcal{D}}(x,y)\,dA = \iint_R (f_{\mathcal{D}})_S(x,y)\,dA \tag{16}$$

شريطة أن يكون التكامل الواقع في الطرف الأيمن من (16) موجودا . ولما كان $(f_{\mathcal{D}})_S = f_{\mathcal{D}}$ ،

عندما $\mathcal{D} \subseteq S$ (لماذا ؟) ، فان التكامل الواقع في الطرف الأيمن من (16) يساوي التكامل $\iint_R f_{\mathcal{D}}(x,y)\,dA$ الموجود فرضا (استنادا الى (15)) . لذا فان $f_{\mathcal{D}}$ قابلة للمكاملة على S ، كما أن

$$\iint_S f_{\mathcal{D}}(x,y)\,dA = \iint_R f_{\mathcal{D}}(x,y)\,dA \quad \text{(وفق (16))}$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \quad \text{(وفق (15))}$$

وهو المطلوب . ∎

٣٩ر٥ ـ نظريـــة

اذا كانت f دالة حقيقية قابلة للمكاملة على المجموعتين المنفصليتين D_1 و D_2 ، فان f قابلة للمكاملة على $D = D_1 \cup D_2$ كما يكون

$$\iint_{D} f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA \quad (17)$$

البرهان . لنعرف الدالتين $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ على النحو التالي :

$$f_i(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{(عندما } (x,y) \in D_i) \\ 0 & \text{(عندما } (x,y) \notin D_i) \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

ان الدالة f_i قابلة للمكاملة على D_i ، وبالتالي ، واستنادا الى النظرية السابقة ٣٨ر٥ ، فاننا نستنتج أن f_i قابلة للمكاملة على D . ولما كان

$$(f_i)_D = f_i$$

فاننا نجد أن

$$\iint_{D} f_i(x,y)\,dA = \iint_{D_i} f_i(x,y)\,dA$$

$$= \iint_{D_i} f(x,y)\,dA \qquad (i = 1, 2)$$

وبتطبيق نظرية خطية التكامل ٣١ر٥ ، فاننا نستنتج أن الدالة f_1+f_2 قابلة للمكاملة على $\mathcal{D}$ ، وأن .

$$\iint_{\mathcal{D}} (f_1+f_2)(x,y)\,dA = \iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\,dA + \iint_{\mathcal{D}_2} f(x,y)\,dA \quad (18)$$

وبما أن $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$ ، فان $f_1+f_2=f$ ، وبالتالي ، فان (18) تقتضي (17) ، وهو المطلوب .

ونترك للقارئ التحقق من صحة النتيجة التالية :

٣٩١ر٥ — نتيجة

اذا كانت f دالة حقيقية قابلة للمكاملة على المجموعتين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ ، وكانت المجموعة $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ صفرية السعة ، فان f قابلة المكاملة على $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ، وعندئذ تكون المساواة (17) صحيحة .

٣٩٢ر٥ — مثال

لتكن $\mathcal{D}_1$ نصف القرص الدائري العلوي

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \ , \ y \geq 0\}$$

و $\mathfrak{D}_2$ نصف القرص الاهليليجي السفلي

$$\mathfrak{D}_2 = \{(x,y) : 2x^2 + y^2 \leq 2 \,, \; y \leq 0\} \,.$$

ولتكن f دالة حقيقية قابلة للمكاملة على المجموعتين $\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2$. لما كان

$$\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 = \{ (x,0) : -1 \leq x \leq 1 \}$$

وكانت هذه المجموعة صفرية السعة (لماذا ؟) فانه يترتب مباشرة على ٣٩١ر٥ أن f قابلة للمكاملة على $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$

٣٩٣ر٥ ــ نظرية

لتكن f دالة محدودة معرفة على $\mathfrak{D}$ ، ومستمرة على $\mathfrak{D}$ ، باستثناء مجموعة جزئية E من $\mathfrak{D}$ صفرية السعة . فاذا كان المحيط $\partial(\mathfrak{D})$ للمجموعة $\mathfrak{D}$ صفري السعة أيضا ، فان f لابد وأن تكون قابلة للمكاملة على $\mathfrak{D}$.

البرهان . لتكن $f_{\mathfrak{D}}$ دالة معرفة كما في(14). من الواضح أن مجموعة نقاط انقطاع هذه الدالة محتواة في $E \cup \partial(A)$. ولما كانت كل من المجموعتين $E , \partial(A)$ صفرية السعة ، فانه يترتب على النظرية ١ار٥ أن اجتماعهما مجموعة صفرية السعة .

لذا فان $f_{\mathcal{D}}$ قابلة للمكاملة على أي مستطيل يحوي $\mathcal{D}$ (استنادا الى النظرية ٢٩١ر٥) ، وبالتالي على $\mathcal{D}$. ∎

٤ر٥ - حساب التكاملات الثنائية

ان من الصعوبة بمكان حساب التكاملات الثنائية انطلاقا من التعريف ٢٥ر٥ ، أو التعريف ٢٩٢ر٥ ، اللهم الا في بعض الحالات النادرة المغرقة في السهولة . لذا كان لزاما علينا استنباط أساليب جديدة لحساب هذه التكاملات . ومن حسن الحظ ، فقد وجد أن تقدير قيمة التكامل الثنائي يمكن أن يتم بحساب تكاملين عاديين على مجالين من المحور الحقيقي .

١٤ر٥ - نظريـــة

لتكن f دالة قابلة للمكاملة على المستطيل

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

ولنفترض أن التكامل

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (19)$$

موجود أيا كان العنصر المثبت y من $[c,d]$.
عندئذ تكون الدالة F قابلة للمكاملة على $[c,d]$ ، كما يكون

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d F(y)\,dy \qquad (20)$$

أي أن

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

البرهان ·
لنأخذ التجزئة $P = P_1 \times P_2$ للمستطيل R
حيث

$$\begin{aligned} P_1 &= \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\} \\ P_2 &= \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_m = d\} \end{aligned} \qquad (22)$$

(علينا أن نذكر ماسبق وذكرناه في ٢ره بأننا نفترض دوما عناصر P_1, P_2 مرتبة تصاعديا)

لنفترض أن

$$y_{j-1} \leqslant \eta_j \leqslant y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

من المعلوم ، استنادا الى نظرية القيمة الوسطى للتكامل ، بأن

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_j)\, dx = \lambda_{ij} (x_i - x_{i-1})$$

حيث

$$m_{ij}(f) \leqslant \lambda_{ij} \leqslant M_{ij}(f)$$

بفرض $m_{ij}(f), M_{ij}(f)$ معرفين كما في التعريف ٢١ره . فاذا رمزنا ، كما هو مألوف ، بـ $U(f, P), L(f, P)$ لمجموعي ريمان الأدنى والأعلى للدالة f بالنسبة للتجزئة P ، فمن الواضح أن

$$L(f, P) \leqslant \sum \sum \lambda_{ij} \Delta_{ij} \leqslant U(f, P)$$

وبما أن f قابلة للمكاملة على R فرضا ، فاننا نستنتج من الشق (ب) من النظرية ٢٦ره أنه يقابل العددَ الموجبَ ε عدد موجب δ بحيث أنه اذا كان $\max |R_{ij}| < \delta$ ، فلا بد أن يكون

$$\left| U(f,P) - \iint_R f(x,y)\,dA \right| < \varepsilon$$

$$\left| L(f,P) - \iint_R f(x,y)\,dA \right| < \varepsilon$$

ويعبر عن هذا، استنادا الى تعريف النهاية ، على النحو التالي :

$$\lim_{\max|R_{ij}|\to 0} U(f,P) = \lim_{\max|R_{ij}|\to 0} L(f,P)$$

$$= \iint_R f(x,y)\,dA$$

وبالتالي فاننا نستنتج أن

$$\sum\sum \lambda_{ij}\Delta_{ij} \to \iint_R f(x,y)\,dA \quad \text{عندما} \quad \max|R_{ij}|\to 0 \qquad (23)$$

ولدينا من جهة أخرى

$$\sum\sum \lambda_{ij}\Delta_{ij} = \sum\sum (y_j - y_{j-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\eta_j)\,dx$$

$$= \sum_j \left[\int_a^b f(x,\eta_j)\,dx \right] (y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_j F(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) \qquad (24)$$

يترتب على (23) و (24) أنه عندما

$$\max(x_i - x_{i-1}) \to 0 \quad ، \quad \max(y_j - y_{j-1}) \to 0$$

فان

$$\sum_j F(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) \to \iint_R f(x,y)\, dA$$

وكما هو معلوم في نظرية تكاملات ريمان للدوال الحقيقية لمتغير واحد ، فان هذا يعني أن الدالة $F(y)$ قابلة للمكاملة وفق ريمان على $[c,d]$ ، وأن المساواة (25) صحيحة . ■

يترتب مباشرة على النظرية ٤١ر٥ مايلي :

٤٢ر٥ – نتيجة

اذا كانت f دالة قابلة للمكاملة على المستطيل

$$R = [a,b] \times [c,d]$$

فان

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\, dx$$

شريطة أن يوجد التكامل $\int_c^d f(x,y)\,dy$ ،

أيا كان x من $[a,b]$ ، وأن يوجد التكامل
$\int_a^b f(x,y)\,dx$ ، أيا كان y من $[c,d]$.

وبوجه خاص ، فان هذين الشرطين يتحققان عندما
تكون f مستمرة على R .

هذا ، وغالبا مايشار للتكامل المضاعف
بالرمز $\iint_R f(x,y)\,dA$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

٤٣ر٥ — مثال

ان الدالة الحقيقية f المعرفة على المستطيل
$R = [-2,0]\times[1,3]$ بالدستور

$$f(x,y) = x+y$$

مستمرة على ساحتها ، وبالتالي ،فان الدستور (25)
قابل للتطبيق على f ، ونجد

$$\iint_R (x+y)\,dA = \int_1^3 dy \int_{-2}^{0} (x+y)\,dx$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} + yx \right)\Bigg|_{x=-2}^{0} dy$$

$$= \int_1^3 (-2+2y)\,dy$$

$$= (-2y+y^2)\Big|_1^3 = 4$$

واستنادا الى ماورد في ٢٤ر٥ ، فمن الممكن حساب هذا التكامل على النحو التالي :

$$\iint_R (x+y)\,dA = \int_{-2}^{0} dx \int_1^3 (x+y)\,dy$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{3} dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (2x+4)\,dx = (x^2+4x)\Big|_{-2}^{0} = 4$$

لننتقل الآن الى مسألة حساب التكاملات الثنائية على مجموعات جزئية محدودة في $\mathbb{R}^2$ أعم من المستطيلات المغلقة . لنأخذ مثلا المجموعة

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : a \leq x \leq b \,,\, h(x) \leq y \leq g(x)\} \qquad (25)$$

ولنفترض الدالة $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ قابلة للمكاملة على $\mathcal{D}$. عندئذ ترد النظرية التالية :

٤٤ر٥ ـ نظريـــة

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة معرفة بالمساواة (٢٥)
و f دالة حقيقية قابلة للتكاملة على $\mathcal{D}$.عندئذ
يكـون

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA = \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\, dy \qquad (26)$$

شريطة أن يكون التكامل $\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\, dy$ موجودا أيا كان x من $[a,b]$.

<u>البرهان</u> . لنفترض أنه عندما $a \le x \le b$ ، فـــان

$$h(x) \ge c \quad , \quad g(x) \le d$$

ولنعرف الدالة .

$$f_{\mathcal{D}}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in \mathcal{D} \text{ عندما}) \\ 0 & ((x,y) \notin \mathcal{D} \text{ عندما}) \end{cases} \qquad (27)$$

عندئذ نجد استنادا الى التعريف ٣٩ر٥ أن

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA = \iint_R f_{\mathcal{D}}(x,y)\, dA$$

حيث $R = [a,b] \times [c,d]$. يترتب على ٤١ر٥
و٤٢ر٥ أن

$$\iint_R f_D(x,y)\,dA = \int_a^b dx \int_c^d f_D(x,y)\,dy$$

شريطة أن يكون التكامل $\int_a^b f_D(x,y)\,dA$ موجودا

أيا كان العنصر المثبت x من $[a,b]$. وبما أن هذا التكامل ليس الا التكامل

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy$$

استنادا الى (25) و (27) ، فان النظرية صحيحة . ∎

٤٥ر٥ – ملاحظة

من الممكن التحقق بأنه اذا كانت الدالة f مستمرة على D ، وكانت h, g دالتين مستمرتين على $[a,b]$ ، فان شروط النظرية ٤٤ر٥ تبين أنه اذا كانت f قابلة للمكاملة على المجموعة

$$D = \{(x,y) : h(y) \leq x \leq g(y)\, ,\ c \leq y \leq d\}$$

وكان التكامل

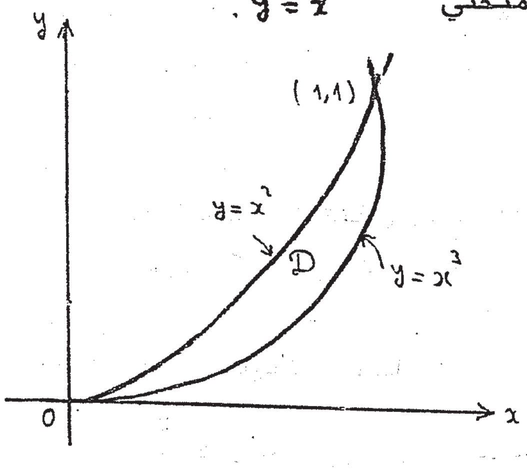
$$\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\,dx$$

موجودا أيا كان العنصر المثبت y من $[c,d]$ ،فان

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_c^d dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\,dx$$

٤٦ر٥ ـ أمثلـــة

لنأخذ الدالة الحقيقية $f(x,y) = 2x^2y - 1$ المعرفة على المجموعة $\mathcal{D}$ المحصورة بين المنحنـــي $y = x^3$ والمنحني $y = x^2$.



الشكل (٢) .

لما كانت $\mathcal{D}$ مجموعة معرفة بالمساواة

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \quad , x^3 \leq y \leq x^2\}$$

وكانت f مستمرة ، وبالتالي قابلة للمكاملة ، على $\mathcal{D}$ ، فانه يترتب على النظرية ٤٤ر٥ أن

$$\iint_{\mathcal{D}} (2x^2y-1)\,dA = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} (2x^2y-1)\,dy$$

$$= \int_0^1 (x^2y^2-y)\Big|_{y=x^3}^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 (-x^8+x^6+x^3-x^2)\,dx = -\frac{13}{252}$$

ولما كان من الممكن أيضا تمثيل $\mathcal{D}$ في هذه الحالة بالمساواة

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : \sqrt{y} \le x \le \sqrt[3]{y} \;,\; 0 \le y \le 1\}$$

فانه يترتب على ٤٥ر٥ أن

$$\iint_{\mathcal{D}} (2x^2y-1)\,dA = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} (2x^2y-1)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3y-x\right)\Big|_{x=\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}y^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}y^2+y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{3}}\right) dy$$

$$= -\frac{13}{252}$$

٥ر٥ ـ التكاملات المضاعفة

سنعمم في هذا البند النتائج التي وجدناها في البنود السابقة على الدوال الحقيقية لـ n من المتغيرات ، سنبتدئ بالحالة $n=3$ ، حيث سنرمز بـ $x=(x_1, x_2, x_3)$ لنقطة من $\mathbb{R}^3$.

ليكن

$$R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3] \qquad (28)$$

مجالا ثلاثيا مغلقا في $\mathbb{R}^3$ ، ولنفرض

$$P_i : a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,m_i} = b_i \;, (i=1,2,3) \qquad (29)$$

تجزئة للمجال $[a_i, b_i]$ عندئذ يشكل الجداء الديكارتي

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3$$

تجزئة للمجال R ، سنرمز بـ $R_{j_1 j_2 j_3}$ للمجال المغلق

$$[x_{1,j_1-1}, x_{1,j_1}] \times [x_{2,j_2-1}, x_{2,j_2}] \times [x_{3,j_3-1}, x_{3,j_3}]$$

وبـ $\Delta_{j_1 j_2 j_3}$ لحجم $R_{j_1 j_2 j_3}$.

فاذا كانت $f(x_1, x_2, x_3)$ دالة حقيقية محـــدودة معرفة على R ، فاننـا نرمز بـ $M_{j_1 j_2 j_3}(f)$

و $m_{j_1 j_2 j_3}(f)$ للمقدارين

$$M_{j_1 j_2 j_3}(f) = \sup\{f(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2, x_3) \in R_{j_1 j_2 j_3}\}$$

$$m_{j_1 j_2 j_3}(f) = \inf\{f(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2, x_3) \in R_{j_1 j_2 j_3}\}$$

كما نرمز $\max|R_{j_1 j_2 j_3}|$ للمقدار

$$\max_{j_1, j_2, j_3} \sqrt{(x_{1, j_1} - x_{1, j_1 - 1})^2 + (x_{2, j_2} - x_{2, j_2 - 1})^2 + (x_{3, j_3} - x_{3, j_3 - 1})^2}$$

عندئذ يسمى العددان على التوالي

$$U(f, P) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum_{j_3} M_{j_1 j_2 j_3}(f) \, \Delta_{j_1 j_2 j_3}$$

$$L(f, P) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum_{j_3} m_{j_1 j_2 j_3}(f) \, \Delta_{j_1 j_2 j_3}$$

مجموعي ريمان الأعلى والأدنى للدالة f بالنسبة للتجزئة P .

من الواضح أن $m_{j_1 j_2 j_3}(f) \leq M_{j_1 j_2 j_3}(f)$

دوما ، وبالتالي ، فان

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

هذا ، وترد في هذا المقام النظريتان ٢٢ر٥ و٢٣ر٥ والنتيجة ٢٤ر٥ حرفيا.

وعندما تكون $f(x_1, x_2, x_3)$ دالة حقيقية محدودة معرفة على المجال المغلق R ، فاننا نعرف تكاملي ريمان الأعلى والأدنى لـ f على R بأنهما

$$\overline{\iiint}_R f(x_1, x_2, x_3)\, dV = \inf\{U(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\},$$

$$\underline{\iiint}_R f(x_1, x_2, x_3)\, dV = \sup\{L(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\}$$

على الترتيب .

ونقول عن الدالة $f(x_1, x_2, x_3)$ انها قابلة للمكاملة وفق ريمان على R اذا كان

$$\underline{\iiint}_R f(x_1, x_2, x_3)\, dV = \overline{\iiint}_R f(x_1, x_2, x_3)\, dV$$

وعندئذ تعرف القيمة المشتركة لتكاملي ريمان الأعلى والأدنى على أنها تكامل ريمان للدالة f على R ، ونرمز لها بالشكل

$$\iiint_R f(x_1, x_2, x_3)\,dV$$

أو اختصارا

$$\iiint_R f\,dV$$

هذا ، ويمكن سلوك طريقة برهان النظرية ٢٩١ر٥ نفسها لاثبات صحة النظرية التالية :

١٥ر٥ - نظريـــة

لتكن $f: R \to \mathbb{R}$ دالة محدودة، ساحتها R هـــي المجال المغلق (28) في $\mathbb{R}^3$. فاذا وجـــدت مجموعة جزئية E من R صفرية السعة ، بحيث تكـــون f مستمرة على $R-E$ ، فان f تكون قابلة للمكاملة وفق ريمان على R . ■

لتكن D مجموعة جزئية محدودة من $\mathbb{R}^3$ ، ولتكن f دالة حقيقية محدودة على D . لنحدد دالـــة $f_D: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ كما يلي :

$$f_D(x) = \begin{cases} f(x) & (\text{عندما } x \in D) \\ 0 & (\text{عندما } x \notin D) \end{cases}$$

عندئذ نعرف تكامل f على $\mathbb{D}$ بالمساواة

$$\iiint_{\mathbb{D}} f(x)\, dV = \iiint_{R} f_{\mathbb{D}}(x)\, dV$$

حيث R أي مجال مغلق في $\mathbb{R}^3$ يحوي $\mathbb{D}$ ، شريطة أن يكون التكامل $\iiint_{R} f_{\mathbb{D}}(x)\, dV$ موجودا . ونرمز أحيانا للتكامل $\iiint_{\mathbb{D}} f(x)\, dV$ بالشكل

$$\iiint_{\mathbb{D}} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

ومرة أخرى ، نقول بأنه كي يكون التعريف سليما منطقيا ، فلا بد من اثبات أنه اذا كان R و $\tilde{R}$ مجالين مغلقين في $\mathbb{R}^3$ يحويان $\mathbb{D}$ ، وكان التكامل

$$\iiint_{R} f_{\mathbb{D}}(x)\, dV$$

موجودا ، فان التكامل $\iiint_{\tilde{R}} f(x)\, dV$ موجود ، وهذان التكاملان متساويان .

كذلك ، فان كل النظريات الواردة في ٣ ر ٥ ، والمتعلقة بخواص التكاملات الثنائية ، تبقى سارية المفعول عندما تكون الدوال الحقيقية معرفة على مجموعات جزئية من $\mathbb{R}^3$.

يسمى التكامل $\iiint_D f(x)\,dV$ ، الذي يرمز له أحيانا بالشكل (30)، تكاملا ثلاثيا . وفي حالة كون n أي عدد طبيعي ، فاننا نكتب التكامل بالشكل

$$\iint_D \cdots \int f(x)\,dV$$

أو بالشكل

$$\iint_D \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$$

وندعوه تكاملا مضاعفا n مرّة ، أو اختصارا ،تكاملا مضاعفا . وان كل النتائج التي استخلصناها بالنسبة للتكاملات الثنائية والثلاثية تسري على التكاملات المضاعفة ، كما أن البراهين في جوهرها واحدة كيفيا ، وكل الاختلاف يكمن بصورة أساسية في كمية العمليات التي يجريها ، وليس في نوعيتها .

لنر ، على سبيل المثال ، كيف تغدو النظرية ٤٤ر٥ في الحالة $n = 3$ ، تاركين للقارئ ايراد برهان عليها، مستأنسا بأسلوب برهان النظرية المذكورة .

٥٢ر٥ - نظرية

لتكن D مجموعة معرفة بالمساواة

$$D = \{(x,y,z) : a \le x \le b,\ h_1(x) \le y \le g_1(x),\ h_2(x,y) \le z \le g_2(x,y)\} \quad (31)$$

ولتكن f دالة حقيقية قابلة للمكاملة على $\mathcal{D}$ ،
ولنفترض أن

$$\mathcal{D}(x)=\{(y,z): h_1(x)\leq y\leq g_1(x), h_2(x,y)\leq z\leq g_2(x,y)\}$$

أيا كان x من $[a,b]$. عندئذ يكون

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dV=\int_a^b dx\int_{h_1(x)}^{g_1(x)} dy\int_{h_2(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \quad (32)$$

شريطة أن يكون التكامل

$$\int_{h_2(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

موجودا أيا كان الزوج (x,y) المحقق للمتراجحات

$$a\leq x\leq b \quad , \quad h_1(x)\leq y\leq g_1(x)$$

وأن يكون التكامل

$$\iint_{\mathcal{D}(x)} f(x,y,z)\,dV$$

موجودا أيا كان العنصر x من $[a,b]$. ∎

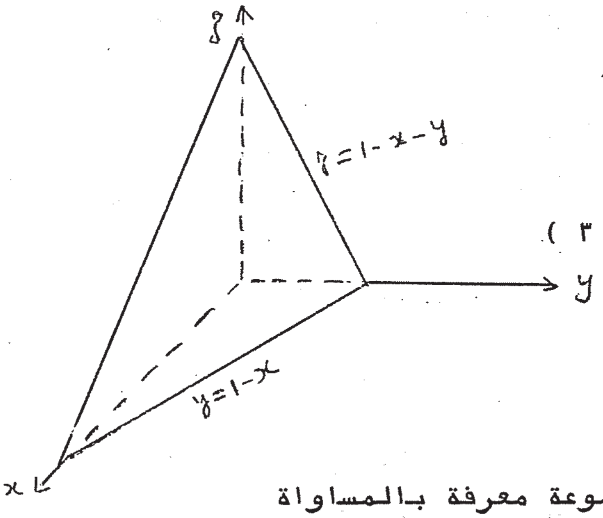
٥ر٥٣ ــ مثـــال

لنأخذ الدالة الحقيقية

$$f(x,y,z)=(1-x)yz$$

المعرفة على المجموعة المحصورة بين المستويات

$$x=0 \;,\; y=0 \;,\; z=0 \;,\; z=1-x-y$$



الشكل (٣)

لما كانت D مجموعة معرفة بالمساواة

$$D=\{(x,y,z): 0\le x\le 1 \;,\; 0\le y\le 1-x \,,\, 0\le z\le 1-x-y\}$$

وكانت f مستمرة ، وبالتالي قابلة للمكاملة ، على D ، فانه يترتب على النظرية ٢ره٥ أن

$$\iiint_D (1-x)\,y\,z\,dV=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(1-x)\,y\,z\,dz$$

$$=\int_0^1 (1-x)\,dx\int_0^{1-x} y\,dy\int_0^{1-x-y} z\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\,dx\int_0^{1-x}(y z^2)\Big|_{z=0}^{1-x-y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\,dx \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\,dx \int_0^{1-x} [(1-x)^2 y - 2(1-x)y^2 + y^3]\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\left[(1-x)^2\frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_{y=0}^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^5\,dx = \frac{1}{144}$$

لننتقل الآن الى دراسة موضوع تحويل المتغير في التكاملات المضاعفة .

لقد وجدنا ، عند دراستنا للتكاملات العادية لدوال حقيقية لمتغير حقيقي واحد، أن تحويل المتغير في التكامل أمر غاية في الأهمية ، اذ أنه يحول التكاملات الصعبة الى تكاملات سهلة . وعلى سبيل المثال ، فاذا أجرينا تحويل المتغير $\theta = \text{Arctg}\, x$ في التكامل

$$\int_0^1 (\text{Arctg}\, x)^5 \frac{dx}{1+x^2}$$

فانه يغدو بالشكل البسيط

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta^5\, d\theta$$

كذلك ،فان نظرية تحويل المتغيرات في التكاملات المضاعفة على درجة كبيرة من الأهمية ، إلا أن برهانها مطول جدا . لذا سنورد فيما يلي نص هذه النظرية دون البرهان .

٤ر٥ – نظرية (تحويل المتغيرات في التكاملات المضاعفة)

لتكن U مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $f : U \to \mathbb{R}^n$ دالة متباينة ، بحيث يكون خيالها $X = f(U)$ وفق f مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ ، وبحيث تكون لاحداثيات f المحددة بالدساتير

$$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

مشتقات أولى مستمرة في U ، وبحيث يكون اليعقوبي

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}$$

مغايرا للصفر في كل نقطة من U ، ربما باستثناء مجموعة جزئية من U صفرية السعة . فاذا كانت D ساحة محدودة محتواة في U ، وكانت $h : f(D) \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للمكاملة ، فان الدالة الحقيقية

$$h(f(u)) \left| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} \right|$$

قابلة للمكاملة على D ، كما أن

$$\iint_{f(D)}\cdots\int h(x)\,dx_1\ldots dx_n=\iint_{D}\cdots\int h(f(u))\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)}\right|du_1\ldots du_n$$

٥٥ر٥ – مثـال

لتكن U المجموعة المفتوحة في R^2 التالية

$$U=\{x>0,\ y>0,\ x+y<2\}$$

ولنحسب التكامل

$$\iint_U \sin(x-y)\cos(x+y)\,dx\,dy$$

ان محاولة حساب هذا التكامل مباشرة ليس بالأمر السهل من الوجهة العملية . لذا سنجري تحويل المتغيرين (u,v) الى (x,y) وفق الدستورين

$$u=x-y\quad,\quad v=x+y$$

التي نجد بعد حلها بالنسبة لـ x,y أن

$$x=\frac{u+v}{2}\quad,\quad y=\frac{-u+v}{2}$$

ومن الطبيعي كان تقودنا هاتان المعادلتان الى التحويل

$$f(u,v)=\left(\frac{u+v}{2}\ ,\ \frac{-u+v}{2}\right)$$

نلاحظ هنا أن $f_1(u,v)=\frac{u+v}{2}$ ، $f_2(u,v)=\frac{-u+v}{2}$

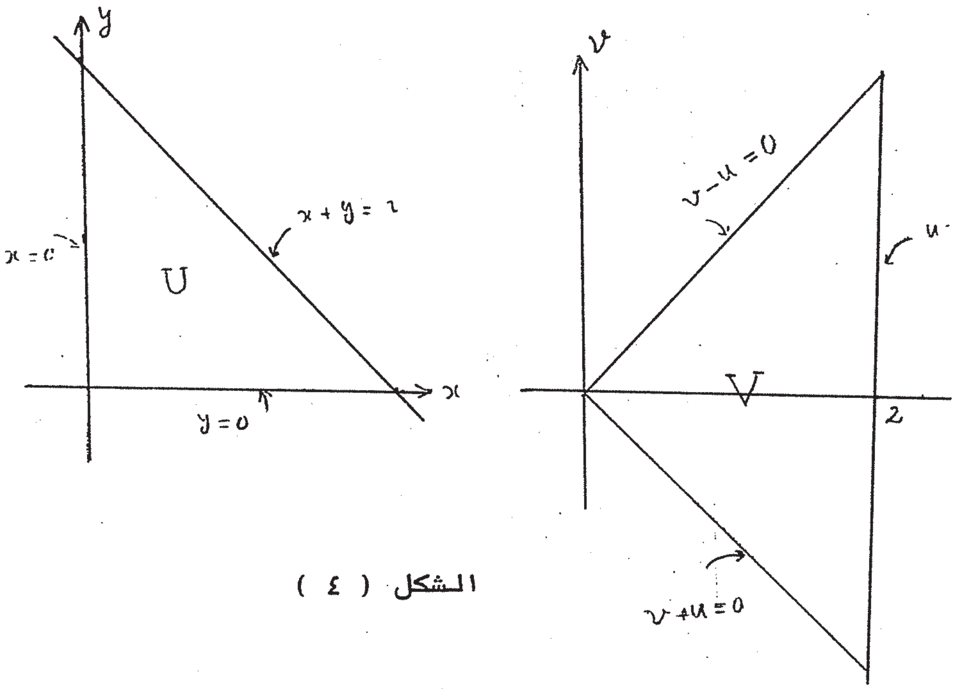
وأن

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0$$

ونترك للقارئ التحقق من أن المجموعة V التي تحقق الشرط $f(V)=U$ هي

$$V=\{(u,v):\ v-u<0,\ v+u>0,\ u<2\}$$

ويمثل الشكلان التاليان المجموعتين U و V



الشكل (٤)

وبالتالي ، فاننا نجد استنادا الى النظرية ٥٤ر٥ أن

$$\iint_{U} \sin(x-y)\cos(x+y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{V} \sin u \cos v \left(\tfrac{1}{2}\right) du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} du \int_{-u}^{u} \sin u \cos v \, dv = 0$$

تمارين

(٥-١)

اذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة ،
فأثبت أن المنحني

$$\{(x,y) : y=f(x) , a\leq x\leq b\}$$

صفري السعة في $\mathbb{R}^2$.

(٥-٢)

برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة X من $\mathbb{R}^n$ صفرية السعة ، هو أن يوجد لكل عدد موجب ε مجوعة منتهية $K_1, \ldots, K_n$ من المكعبات بحيث يكون

$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i \supseteq X \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} c(K_i) < \varepsilon$$

(٥-٣)

أثبت صحة مايلي :

(١) اذا كانت E_1 , E_2 مجموعتين صفريتي السعة ، فان $E_1 \cup E_2$ مجموعة صفرية السعة كذلك .

(٢) اذا كانت E_1 مجموعة صفرية السعة ، وكان $E_2 \subseteq E_1$ ، فان E_2 صفرية السعة أيضا .

(٣) اذا كانت E مجموعة صفرية السعة ، فان لصاقتها $\bar{E}$ صفرية السعة كذلك .

(٥-٤)

لتكن الدالة $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & (\text{عندما } 0 \leq x < y \leq 1) \\ 8 & (\text{عندما } 0 \leq y \leq x \leq 1) \end{cases}$$

أثبت أن الدالة f قابلة للمكاملة على ساحتها

(٥-٥)

لتكن الدالة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (\text{عندما } x, y \in \mathbb{Q}) \\ 1 & (\text{عندما } x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}) \\ 2 & (\text{عندما } x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}) \\ 3 & (\text{عندما } x, y \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

أثبت أنه اذا كان $R = [a,b] \times [c,d]$ ، فان

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\, dA = 3(b-a)(d-a)$$

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,dA=0$$

(٥-٦)

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة محدودة في $\mathbb{R}^2$ ، ولتكن f دالة حقيقية معرفة على $\mathcal{D}$ بالمساواة $f(x,y)=1$ أيا كان (x,y) من $\mathcal{D}$. برهن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون $\mathcal{D}$ صفرية السعة ، هو أن تكون f قابلة للمكاملة على $\mathcal{D}$ ، وأن يكون

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA=0$$

(٥-٧)

برهن أنه اذا كانت $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة ، وكان

$$g(x,y)=\int_c^y\int_a^x f(u,v)\,du\,dv$$

فان $g_{xy}=f$.

(٥-٨)

أثبت صحة مايلي :

$$\int_0^1 dx\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}\,dy=\frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

(٥–٩)

اذا كانت $\mathcal{D}$ هي المجموعة

$$\mathcal{D} = \{ (x,y) : y^2 \leq x \leq y \ , \ 0 \leq y \leq 1 \}$$

فأثبت أن

$$\iint_D xy \, dA = \frac{1}{24}$$

(٥–١٠)

اذا كانت $\mathcal{D}$ هي المجموعة

$$\mathcal{D} = \{ (x,y) : x^2 + 1 \leq y \leq 9 - x^2 \ , \ -2 \leq x \leq 2 \}$$

فبرهن على صحة المساواة

$$\iint_D dx\,dy = \frac{64}{3}$$

(٥–١١)

أثبت أنه يمكن حساب التكامل

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y e^{-(x-1)^2} dx$$

رغم أن تكامل الدالة $e^{-(x-1)^2}$ لايمكن التعبير منه بدلالة الدوال الابتدائية . بين أن

$$I = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

(٥–١٢)

احسب التكاملات التالية

(١) $\iiint_{\mathcal{D}} x \, dV$ ، وذلك بفرض $\mathcal{D}$ هي المنطقة المحصورة بين المستويات الاحداثية والمستوي

$$3x + y + z = 2$$

(٢) $\iiint_{\mathcal{D}} y e^{z} \, dV$ ، وذلك بفرض

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le \sqrt{x} , 0 \le z \le y^2\}$$

(٣) $\iiint_{\mathcal{D}} xyz \, dV$ ، وذلك بافتراض

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) : 0 \le y \le 1 , 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} , 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$$

(٥–١٣)

اذا كان $R = [a_1 , b_1] \times \cdots \times [a_n , b_n]$

فاحسب كلا من التكاملين

$$\iint \cdots \int_R (x_1 + \cdots + x_n) \, dx_1 \cdots dx_n$$

$$\iint \cdots \int_R x_1 \cdots x_n \, dx_1 \cdots dx_n$$

(٥–١٤)

برهن أنه اذا كانت f دالة حقيقية مستمرة

على المجموعة

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : h(y) \le x \le g(y) \, , \, c \le y \le d\}$$

وكانت h, g دالتين مستمرتين على $[c, d]$ ،
فان f قابلة للمكاملة على $\mathcal{D}$ ، كما يكون التكامل

$$\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\, dx$$

موجودا .

(٥-١٥)

اذا كان $\mathcal{D}$ متوازي الأضلاع المحدود بالمستقيمات

$$x+y=1 \, , \quad x+y=2 \, , \quad x-2y=0 \, , \quad x-2y=3$$

فأثبت أن

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+4y)\, dA = \frac{3}{2}$$

ارشـــاد : قم بتحويل المتغيرات $(x,y) \to (u,v)$
وذلك بفرض

$$u = x+y \quad , \quad v = x-2y$$

(٥-١٦)

أثبت صحة المساواة

$$\int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\, dz = \frac{1}{15}$$

ارشــــاد : قم بتحويل الاحداثيات الديكارتيـــة الى الاحداثيات الكروية وفي المساويات

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

$$(0 \leq \theta < 2\pi \ , \ 0 \leq \varphi \leq \pi \ , \ \rho \geq 0)$$

ارشـــــاد : قم بتحويل الاحداثيات الديكارتيـــة الى الاحداثيات الكروية وفي المساويات

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

$$\left(0 \leq \theta < 2\pi \ , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \ , \quad \rho \geq 0 \right)$$

ثبت المصطلحات

نورد فيما يلي قائمة بأهم المصطلحات المستعملة في الكتاب ، مرتبة وفق حروف الهجاء العربية ، مع مقابل كل منها باللغة الانجليزية

(أ)

اجتماع	Union
احداثيات	Coordinates
ـ دالة	- of a function
ـ ديكارتية	cartesian -
ـ قطبية	Polar -
ـ كروية	spherical -
ـ متجه	- of a vector

(ب)

باقي	Remainder
ـ تايلور	- in Taylor's formula

(ت)

Partition	تجزئـــة
Change	تحويـــل
- of variables	– المتغيرات
Mapping(transtormation)	تطبيـــق
affine -	– آفيني (متآلف)
linear -	– خطـي
inverse -	– عكسي
Covering	تغطيـــة
Subcovering	– جزئيـــة
Refinement	تفتيـــت
Differential	تفاضـــل
- of a function	– دالـــة
Integral	تكامـــل
triple -	– ثلاثـــي
double -	– ثنائـــي
line -	– خطـــي

lower Riemann -	- ريمان الأدنى
upper Riemann -	- ريمان الأعلى
surface -	- سطحي
multiple -	- مضاعف

(ج)

Product	جداء
inner -	- داخلي
Cartesian -	- ديكارتي
scalar -	- عددي
Sub set	جزء (مجموعة جزئية)
Family	جماعة
Neighborhood	جوار

(ح)

Bound	حد
lower -	- أدنى

upper -	ـ أعلــى
greatest lower -(Infimum)	الـ ـ الأدنــى
least upper - (supremum)	الـ ـ الأعلــى
Side	حـــــرف
Image	خيـــــال
inverse -	ـ عكسي
direct	ـ مباشر

(٥)

Interior	داخـــل
- of a set	ـ مجموعــة
Function	دالــــة
- tends to	ـ تسعى الى
real -	ـ حقيقيـــــة
real-of a real variable	ـ حقيقية لمتغير حقيقي
real-of several variables	ـ حقيقية لعدة متغيرات
linear	ـ خطيــة
Dirichlet's	ـ دير يخلية
implicit -	ـ ضمنيــة

inverse - ـ عكسية
differentiable - قابلة للاشتقاق (مُفاضَلَة)
continuously differentiable - قابلة للاشتقاق باستمرار
integrable - قابلة للمكاملة
homogeneous - متجانسة
real-valued - متجهة
(strictly) increasing - متزايدة (تماما)
(strictly) decreasing - متناقصة (تماما)
bounded - محدودة
bounded above - محدودة من الأعلى
bounded below - محدودة من الأدنى
continuons - مستمرة
uniformly continuons - منتظمة الاستمرار

Index دليل

(ز)

Pair زوج (ثنائية)
ordered - مرتب

(س)

Domain	ســاحة
- of convergence	ـ تقارب
- of a function	ـ دالـــة
Content	ســعة
of - zero	ـ صفريـــة
- of an interval	ـ مجـــال

(ط)

End - point	طـــــرف
- of an interval	ـ مجـــال

(ع)

Number	عـــــدد
real -	ـ حقيقي
integer, whole -	ـ صحيح
positive integer , natural -	ـ طبيعي

rationl -	ـ عـادي
irrational -	ـ غير عادي
Operation	عمليــة
external -	ـ خارجيــة
internal -	ـ داخليــة

(غ)

Cover	غطـــاء
Subcover	ـ جزئـي
Open cover	ـ مفتوح

(ف)

Separation	فصــل
Space	فضــاء
(n-dimensional) euclidean	ـ اقليدي (ذو بعد n)
complete -	ـ تـام
inner product -	ـ جـداءداخلي
Subspace	ـ جزئـي

rationl -	ـ عـادي
irrational -	ـ غير عادي
Operation	عمليــة
external -	ـ خارجيــة
internal -	ـ داخليــة

(غ)

Cover	غطـــاء
Subcover	ـ جزئـي
Open cover	ـ مفتوح

(ف)

Separation	فصــل
Space	فضـــاء
(n-dimensional) euclidean	ـ اقليدي (ذو بعد n)
complete -	ـ تــام
inner product -	ـ جـداء داخلي
Subspace	ـ جزئـي

linear	– خطـي
Cartesian –	– ديكارتي
disconnected –	– غير متـرابـط
vector –	– متجـه
connected	– متـرابـط
compact	– متـراص
metric –	– متـري
normed –	– منظـم

(ق)

Segment	قطعة مستقيمة
Measure	قيـاس
value	قيـمة
intermediate –	– متـوسطة
mean –	– وسطي

(ك)

Ball	كـــرة

closed -	ـ مغلقـة
open -	ـ مفتوحـة

(ل)

Closure	لصاقـة

(م)

Sequence	متتاليـة
fundmental -	ـ أساسيـة
sub -	ـ جزئيـة
Cauchy -	ـ كوشـي
divergent -	ـ متباعدة
bounded -	ـ محدودة
increasing -	ـ متزايدة
strictly Increasing -	ـ متزايدة تماما
convergent	ـ متقاربة
limit Of a -	نهايـة ـ
Vector	متجـه
- space	فضاء ـ

Inequality	متراجحة (متباينة)
Metric	متـرك
- induced by a norm	ـ مولد ينظم
Series	متسلسلة
Variable	متغير
Interval	مجال
sub -	ـ جزئي
n - dimensional -	ـ ذو بعد n
end - point Of an -	طـرف ـ
Sum	مجموع
lower -	ـ أدنى
upper -	ـ أعلى
Set	مجموعة
- of real numbers	ـ الاعداد الحقيقية
- of integers	ـ الاعداد الصحيحة
- of natural numbers	ـ الاعداد الطبيعية
- ofrational numbers	ـ الاعدادية العادية
- of definition	ـ تعريف
Sub set	ـ جزئية (جزء)

empty or null -	ـ خاليـة
- of content zero	ـ صفرية السعة
disconnected -	ـ غير مترابطة
infinite -	ـ غير منتهية
connected -	ـ مترابطة
compact -	ـ متراصة
bounded -	ـ محدودة
bounded below -	ـ محدودة من الادنى
bounded above -	ـ محدودة من الأعلى
derived -	ـ مشتقة
finite -	ـ منتهية

Bounded	محـــدود
Range	مـــدى
n - tuple	مرتبـة n
Components	مركبـات
Composite function	مركبة دالتين
Parallelogram equality	مساواة متوازي الأضلاع

Rectangle	مستطيل
Sub -	– جزئي
Completeness axiom	مسلمة التمام
Derivative	مشتق
directional -	– اتجاهي
Partial -	– جزئي
Pure partial	– جزئي صرف
mixed partial	
Frechet -	– فريشية
mixed Partial	– جزئي مختلط
first derivatives	مشتقات أولى
Criterion	معيار
Differentiation	مفاضلة
Restriction of a function	مقصور دالة
Inverse	مقلوب
Integration	مكاملة

Extension of a function	ممدّد دالة
Operator	موءثر

(ن)

Theorem	نظرية (مبرهنة)
Maximum and minimun value -	ـ القيمة الأكبر والقيمة الأصغر
Intermediate value -	ـ القيمة المتوسطة
Mean value -	ـ القيمة الوسطى
Norm	نظيم
Point	نقطة
accumulation -	ـ تجمع (تراكم)
limit -	ـ حدية
critical -	ـ حرجة
interior -	ـ داخلية
fixed -	ـ ثابتة
-of relative minimum	ـ قيمة صغرى نسبية
- of relative maximum	ـ قيمة عظمى نسبية
- of relative extremum	ـ قيمة قصوى نسبية

ـ ملاصقـــة	cluster -
نـهايـــة	Limit

(ي)

يـعقوبـــي	Jacobian

مراجع الكتــــاب

1- خضر الاحمد ، المدخل الى التحليل الرياضي - عمـادة شئون المكتبات ،جامعة الرياض ، (١٩٧٩).

2- خضر الاحمد ، مبادئ التوبولوجيا العامة ،مطبعــة جامعة دمشق (١٩٧٥) .

3 - Friedman,A., Advanced Calculus, Holt,Rinehart and Winston . Inc. (1971)

4 - Flett,T., Mathematical Analysis Mcgraw-Hill (1966) .

5 - Trench,W., Advanced Calculus , Harper and Row Pub . (1978) .

6 - Simon , A ., Calculus, The Macmillan co.(1970)

7 - Bartle , R ., The Elements of Real Analysis, john Wiley (1976) .

8 - Apostol , T . , Mathematical Analysis ,Addison - Wesley Pub . Co., (1963) .

الفهـــــرس