الدكتور
عبد الواحد ابو حمدة
كلية العلوم ـ جامعة دمشق

التحليل

«١»

١٤٠٨ ـ ١٤٠٩ هـ

١٩٨٨ ـ ١٩٨٩ م

مطبعة ريـاض ـ دمشق

الدكتور
عبد الواحد أبو حمدة

التحليل

«١»

١٤٠٥ – ١٤٠٦ هـ
١٩٨٥ – ١٩٨٦ م

مطبعة رياض – دمشق

2.50

المقدمـة والمنهـاج

يتضمن هذا الكتاب بعض المواضيع الأساسية في التفاضل الـذي يشكل جزءاً هاماً من التحليل الرياضي . وقد كتبت المواضيع بصورة مناسبة بحيث يستطيع القارئ حسب رأيي فهمها بسهولة . وقد أتبعت معظم الفقرات بأمثلة محلولة وتمارين للحل مع أجوبتها لكي يعمق القارئ فهمه للمواضيع المدروسة .

وقد حاولت أن يغطي هذا الكتاب مفردات منهاج التحليل (١) المقرر لطلاب السنة الاولى (ر.ف) في كلية العلوم بحيث يتضمن هذا المنهاج المواضيع التاليـة :

حقل الأعداد الحقيقية (جبرياً وطبولوجيـاً) .

تقارب المتتاليات والمتسلسلات ، واختبارات التقارب الابتدائية (كوشي ، والامبير ، ...) .

التوابع (الدوال) الحقيقية على مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ ، النهاية ، الاستمرار ، الاستمرار المنتظم ، الاشتقاق والمفاضلة ، نظرية (مبرهنة) القيمة الوسطى ، النشر المنتهي [المحدود] للدوال (التوابع) ، اللامتناهيات في الصغر والكبر ، حالات عدم التعيين ، تطبيقات في رسم المنحنيات والبحث عن القيم القصوى .

وتجدر الاشارة إلى أن الطلاب الذين يدرسون الرياضيات في صفوف متقدمة بكلية العلوم والذين يدرسون الرياضيات في كليات أخرى يجدون في هذا الكتاب مايفيدهم في بعض الأحيان .

وأخيراً ، أرجو أن يكون هذا الكتاب مصدراً إلى جانب المصادر العربية الأخرى وأن يحقق الغاية المرجوة من تأليفه .

د. عبد الواحد أبو حمده

الفصـــــل الاول

حقل الأعداد الحقيقيــــة (جبريـــاً)

مقدمــــــة :

إن دراسة المفاهيم الأساسية للتحليل (مثل التقارب والاستمرار والتفاضل والتكامل) تتوقف على تعريف دقيق لمفهوم العدد . إلا أننا لن ندخل في مناقشة موضوعات حساب الأعداد الصحيحة بل سنفرض أن القارئ يعرف خواص الأعداد المنطقة (العادية) [أيّ الأعداد ذات الشكل $\frac{m}{n}$ حيث m و n عددان صحيحان و $n \neq 0$] .

هذا وإن في مجموعة الأعداد المنطقة بعض النقص على الرغم من أنها عبارة عن حقل وعن مجموعة مرتبة (وسوف نعرّف هذين المفهومين في البندين ١ ــ ٦ و ١ ــ ١٢) . فمثلاً لا يوجد عدد منطق p بحيث يكون $p^2 = 2$ $p = \sqrt{2} = 1.7$ (وسوف نبرهن على هذا بعد قليل) . وهذا يقود إلى إدخال مفهوم الأعداد المسماة بـ ((الأعداد الصماء (غير العادية))) التي تكتب غالباً على صورة كسر عشري غير منته والتي تكون الكسور العشرية المنتهية الموافقة لها قيماً ((تقريبية)) لها . وهكذا ، فالمتتالية ... و 1.4142 و 1.414 و 1.41 و 1.4 و 1 (تسعى إلى $\sqrt{2}$) . ولكننا لم نعرف حتى الآن العدد الأصم $\sqrt{2}$ ، ولذلك يبقى السؤال التالي مفتوحاً : إلى أين تسعى هذه المتتالية ؟ وسوف تكون الإجابة على مثل هذا النوع من الأسئلة ممكنة بعد أن يتم بناء المجموعة المسماة بـ ((مجموعة الأعداد الحقيقيـــة)) .

١ ــ ١ مثـــــال :

لنبيّن الآن أن المعادلـــة $p^2 = 2$ .... (١)

لا تتحقق من أجل أيِّ عدد منطق p •

من أجل هذا نفرض جدلاً أنه يوجد عدد منطق يحقق المعادلة (١) وليكن $p = \frac{m}{n}$ ، حيث $n \neq 0$ و m و n عددان صحيحان أحدهما على الأقل فردي • ومنه ، بحسب (١) ، يكون :

$m^2 = 2n^2$ .... (٢)

وهذا يعني أن العدد m^2 زوجي ، وبالتالي فإن العدد m يكون زوجياً (لأنه لوكان m فردياً لكان m^2 فردياً وهذا غير صحيح لأن m^2 زوجي) • إذن فالعدد m^2 يقبل القسمة على 4 بدون باق.

وهذا يؤدي الى أن الطرف الأيمن للصيغة (٢) يقبل القسمة على 4 بدون باق ، وبالتالي فالعدد n^2 يكون زوجياً ، وهذا يقتضي أن يكون n زوجياً • إذن يكون m و n عددين زوجيين مما يناقض كون أحدهما على الأقل فردياً • وبهذا يمكننا أن نقول إن المساواة (١) مستحيلة من أجل أيِّ عدد منطق •

لنتناول الآن هذا الوضع بشكل أدق • لتكن A مجموعة كل الأعداد المنطقة الموجبة p بحيث أن $p^2 < 2$ ، ولتكن B مجموعة كل الأعداد المنطقة الموجبة p بحيث أن $p^2 > 2$. وسنبيّن أنه لا يوجد في A عنصر أعظمي وأنه لا يوجد في B عنصر أصغري • (نقول عن العدد x إنه عنصر أعظمي في مجموعة من الأعداد H إذا كان لا يوجد في المجموعة H عدد أكبر منه • ونقول عن العدد y إنه عنصر أصغري في مجموعة من الأعداد K إذا كان لا يوجد في المجموعة K عدد أصغر منه) ، أيّ أننا سنبرهن على أنه من أجل أيِّ عدد p من A يمكننا إيجاد عدد منطق q من A بحيث أن $p < q$ ، وعلى أنه

من أجل أيّ عدد p من B يمكننا إيجاد عدد منطق q من B بحيث أن $q < p$.

من أجل هذا ، نُلحق بكل عدد منطق $p > 0$ العدد

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2} \quad \cdots\cdots\cdots (٣)$$

عندئذ يكون :

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (٤)$$

فاذا كان p من A فإن $p^2 - 2 < 0$ ، وبالتالي يكون $q > p$ بحسب (٣) و $q^2 < 2$ بحسب (٤) ، وبهذا يكون q من A .

أما إذا كان p من B فإنّ $p^2 - 2 > 0$ ، وبالتالي يكون : $0 < q < p$ بحسب (٣) و $q^2 > 2$ بحسب (٤) ، وبهذا يكون q من B

١ ـ ٢ ملاحظة :

إن الهدف من المناقشات السابقة هو تبيان أنه يوجد بعض النقص في مجموعة الأعداد المنطقة على الرغم من أنه يوجد بين كل عددين منطقين عدد منطق ثالث (لأنه إذا كان $r < s$ فإنّ $r < \frac{r + s}{2} < s$) ، ولذلك فإن مجموعة الأعداد الحقيقية سوف لن تحوي مثل هذه النواقص. وهذا هو المبرر الرئيسي للدور الأساسي الذي تلعبه هذه المجموعة في التحليل .

ومن أجل الاختصار والسهولة سوف نذكر فيما يأتي بعض الاصطلاحات المتعارف عليها في نظرية المجموعات .

١ ـ ٣ ـ تعاريف وطرق البرهان الرياضي :

إذا كانت A أية مجموعة (عناصرها ربما تكون أعداداً أو أيـة أشياء أخرى) فإننا نكتب $x \in A$ لكي نعبّر عن أن x عنصر مـن A (أو أن x ينتمي الى A). واذا لم يكن x عنصراً في A فإننا نكتب : $x \notin A$. إن المجموعة التي لا يوجد فيها أيّ عنصـر سـوف تدعى بالمجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ .

أما اذا كان يوجد في المجموعة عنصر واحد على الاقل فإنها تسمى بالمجموعة غير الخاليـــة .

ونقول عن المجموعة إنها منتهية اذا احتوت على عدد محدود m مـن العناصر ، حيث $m \geq 0$.

ونقول عن المجموعة إنها غير منتهية إذا كانت ليســت منتهيـة .

إذا كانت A و B مجموعتين واذا كان كل عنصر في A عنصراً في B فإننا نقول إن A مجموعة جزئية من B (أو إن A جزء من B) ونكتب $A \subseteq B$ أو $B \supseteq A$.

وإذا كان $A \subseteq B$ وكان يوجد عنصر في B بحيث أن هذا العنصر لا ينتمي إلى A فإننا نقول إن A مجموعة جزئية مـن B محتواة تماماً في B ونكتب $A \subsetneqq B$. ويجب أن نلاحظ أن $A \subseteq A$ من أجل كل مجموعـة A .

أما اذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ فإننا نكتب $B = A$.

واذا لم يتحقق ذلك فإننا نكتب $A \neq B$.

ويمكن كتابة مجموعة كل العناصر x التي تحقق شروطاً معينـة بالشـكل $\{x : \text{تحقق شروطاً معينة } x\}$ ، أو بالشـكل المفصل الذي نكتب فيه جميع عناصر المجموعة. فمثلاً ، إن مجموعة الاعـداد

الطبيعية هي :

$$\mathcal{N} = \{0 , 1 , 2 , \dots , n , \dots\} .$$

وتسمى مجموعة العناصر التي تنتمي الى المجموعتين A و B بآن واحد بتقاطع هاتين المجموعتين ويرمز لها بالرمز $A \cap B$. وتسمى مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B (أو إلى كليهما) باتحاد (اجتماع) هاتين المجموعتين ويرمز لها بالرمز $A \cup B$.

إذا أردنا أن نبرهن على صحة قضية ما فإننا نكون أمام إحدى طريقتين :

إما أن ننطلق من الفرض ونناقش منطقياً حتى نصل إلى صحة المطلوب بشكل مباشر ، أو أن ننطلق من نقيض المطلوب ونناقش منطقياً حتى نصل إلى نتيجة لا يمكن قبولها وبالتالي نصل الى صحة المطلوب بشكل غير مباشر .

وتجدر الاشارة الى طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي أو بالتدريج أو بالتراجع) التي تتضمن مايلي :

((لنفرض أنه من أجل قضية رياضية S يتحقق مايلي :

١ ـ يوجد عدد طبيعي واحد على الأقل مثل m ، بحيث تتحقق من أجله القضية S .

٢ ـ إذا كانت القضية S صحيحة من أجل العدد الطبيعي n ، $m \leq n$ فإنها تكون صحيحة من أجل العدد ($n + 1$) .

عندئذ تكون القضية S صحيحة من أجل جميع الأعداد الطبيعية التي هي أكبر أو تساوي m)) .

وسنضرب فيما يلي أمثلة توضح طرق البرهان الرياضي المذكورة :

مثال (١) : برهن على صحة كل من الصيغتين التاليتين :

$$\text{I)}\ a+(a+r)+(a+2r)+\dots+[a+(n-1)r]=\frac{n[2a+(n-1)\cdot r]}{2}$$

$$\text{II)}\ a+(a\cdot r)+(a\cdot r^2)+\dots+(a\cdot r^{n-1})=\frac{a\cdot(1-r^n)}{1-r}$$

وذلك :

(بفرض أن $r \neq 1$ في الصيغة الثانيـــة) .

الحـــل : لنفرض أن $\sum_1 = a+(a+r)+\dots+[a+(n-1)\cdot r]$

عند ئذ يمكننا أن نكتـــب :

$$\sum_1 = a+(a+r)+\dots+[a+(n-2)\cdot r]+[a+(n-1)\cdot r]$$

$$\sum_1 = [a+(n-1)\cdot r]+[a+(n-2)\cdot r]+\dots+(a+r)+a$$

ومنه بجمع كل حد مع الحد الذي يقع تحته نحصل على الصيغـــة

$$2\sum_1 = [2a+(n-1)\cdot r]+[2a+(n-1)\cdot r]+\dots+$$
$$+[2a+(n-1)\cdot r]+[2a+(n-1)\cdot r]$$

وبالتالي : $2\sum_1 = n\cdot[2a+(n-1)\cdot r]$

ومنـــه : $\sum_1 = \dfrac{n\cdot[2a+(n-1)\cdot r]}{2}$ وهو المطلوب الاول

لنفرض الآن أن : $\sum_2 = a+(a\cdot r)+\dots+a\cdot r^{n-2}+a\cdot r^{n-1}$

ومنـــه : $r \cdot \Sigma_2 = a \cdot r + (a \cdot r^2) + \cdots + a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^n$

وبالتالي : $\Sigma_2 - r \cdot \Sigma_2 = a - a \cdot r^n$

ومنـــه : $(1 - r) \cdot \Sigma_2 = a - a \cdot r^n$

وبالتالي : $\Sigma_2 = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ وهو المطلوب الثانـــي

مثـــال (٢) : برهن على صحة القضية التاليـــــة :

" $\forall n \in \mathcal{N}^*$ فإنّ $\dfrac{1}{n^2} \geq \dfrac{3}{n\cdot(n+1)}$ " حيـــث $\mathcal{N}^* = \mathcal{N} \setminus \{0\}$.

الحـــل : نفرض جدلاً أنه $\exists n_0 \in \mathcal{N}^*$ بحيث يكون $\dfrac{1}{n_0^2} < \dfrac{3}{n_0(n_0+1)}$ ، عند ئذ $\dfrac{n_0^2}{1} > \dfrac{n_0^2 + n_0}{3}$ وبالتالـــي :

$n_0^2 + n_0 > 3n_0^2$ وبالتالي : $n_0 > 2n_0^2$ أيْ : $n_0 < \dfrac{1}{2}$ وهذا غيـــر

ممكن لأنّ $n_0 \geq 1$ (طالما أن $n_0 \in \mathcal{N}^*$) ، إذن $\forall n \in \mathcal{N}^*$

فإنّ $\dfrac{1}{n^2} \geq \dfrac{3}{n\cdot(n+1)}$ وبهذا يتم المطلوب اثباتـــه .

مثـــال (٣) : أثبت أنه $\forall n \in \mathcal{N}^*$ فإنّ :

$$1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + n^2 \underset{(*)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

الحـــــل :

عندما $n = 1$ تأخذ الصيغة ($\#$) الشكل $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

وهذا صحيح ، أيّ أن الصيغة ($\#$) صحيحة من أجل

$n = 1$. لنفرض أن الصيغة ($\#$) صحيحه من أجل

$n = k \geqslant 1$ وسنثبت على صحتها من أجل $n = k + 1$ كما

يلي :

لدينا (بحسب فرضنا) ($1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

ومنه :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) +$$

$$+ (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{(k+1)^2}{1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

وهذا يعني أن الصيغة ($\#$) صحيحة من أجل $k + 1$ بفرض

أنها صحيحة من أجل k .

إذن فالصيغة ($\#$) صحيحة من أجل كل $n \in N^*$ وذلك استناداً

إلى طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي وبهذا يتم المطلوب .

تمارين للحل

١ ـ برهن بطريقة الاستقراء الرياضي صحة كل من الصيغ التالية :

$$1)\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$II)\ \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1} \cdot \sin\alpha}$$

$$III)\ \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx =$$

$$= \left(\sin \frac{n}{2} x\right) \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$IV)\ \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$V)\ \left| \sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

وذلك من اجل $0 \leq x_k \leq \pi$ و $k = 1 , 2 , \cdots , n$

١ ـ ٤ ـ تعاريـــف :

يرمز لمجموعة الاعداد الطبيعية المغايرة للصفر بالرمز N^* ويرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة بالرمز Z • ويرمز لمجموعة كل الاعداد المنطقة بالرمز Q ولهذا يكون :

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m, n \in Z , n \neq 0 \right\}$$

ونستعمل أحياناً الرمز $Q^{(+)}$ للتعبير عن مجموعة الاعداد المنطقة الموجبة تماماً • وسنرمز بـ $Q^{(-)}$ لمجموعة الاعداد المنطقة السالبة تماماً •

ولذلـــك يكـــــون :

$$Q = Q^{(-)} \cup Q^{(+)} \cup \{0\}$$

المجموعـة المرتبة :

١ ـ ٥ ـ تعريـف :

لتكن S مجموعة ما . إن الترتيب على S هو علاقة ، يرمز لهـا بالرمز $\leqslant$ ، بحيث يتحقق مايلـــي :

(١) ـ إذا كان $x, y, z \in S$ وإذا كان $x \leqslant y$ ، $y \leqslant z$ فإنّ $x \leqslant z$.

(٢) ـ إذا كان $x, y \in S$ وإذا كان $x \leqslant y$ ، $y \leqslant x$ فإن $x = y$.

(٣) ـ من أجل كل عنصرين x ، y من S يكون : إما $x \leqslant y$ أو $y \leqslant x$. وبذلك تكون العلاقة $\leqslant$ هي علاقة ترتيب كلي على S . وتقرأ القضية $x \leqslant y$ بأحد الشـكلين التاليـيـن : (x أصغر أو تسـاوي y) ، (x تسبق y) ، وبدل الرمـز $x \leqslant y$ على أن $x < y$ أو $x = y$ بدون تحديد أيهما محققـة ، ويكتب الرمز $x \leqslant y$ و $x \neq y$ بالشكل $x < y$ أو بالشـكل $y > x$ وتجدر الإشـارة إلى أن القضية $x < y$ هي القضيـة النافية للقضية $y \leqslant x$. زد على ذلك فإنه إذا كانت العلاقة $\leqslant$ ترتيباً على S فإنه يكون لدينا مايلـــي :

(أ) إذا كان $x \in S$ و $y \in S$ فإنّ واحدة وفقط واحدة مـــن

القضايـــــا

$$x < y \text{ ، } x = y \text{ ، } y < x$$

تكون صحيحـــة •

(ii) إذا كان $x, y, z \in S$ وإذا كان $x < y$ و $y < z$ فإن $x < z$. ويتم اثبات (i) استناداً الى (٣) و (٢) واستناداً إلى الفرض وذلك بملاحظة أنه إذا كان $x \neq y$ فإنه بحسب (٢) يكون من المستحيل أن تتحقق القضيتان $x < y$ و $x > y$ بآن واحـــد•

ويتم اثبات (ii) اســتناداً إلى (١) واســتناداً الى الفـــرض حيث نستنتج أولاً أن $x \leqslant z$ • ونلاحظ ثانياً أنه إذا كان $x = z$ فإنه يكون $y < x$ و $x < y$ بوقت واحد ، وهذا غير ممكـــن •

١ ــ ٦ ــ تعريـــــف :

المجموعة المرتبة هي مجموعة S عرّف عليها ترتيب •

مثـــــال :

Q تكون مجموعة مرتبة إذا عرّفنا $r < s$ بأنها تعني أن $0 \leq s - r$ ، حيث $r, s \in Q$ •

١ ــ ٧ ــ تعريـــــف :

لنفرض أن S مجموعة مرتبة و $E \subseteq S$ • اذا وجد $\beta \in S$ بحيث أن $x \leqslant \beta$ من أجل كل $x \in E$ فإننا نقول إن E محدود ة

من الأعلى (في S) ونسمي β بحد أعلى لـ E (في S) .

وتعرف الحدود الدنيا بطريقة مماثلة (مع أخذ $\geqslant$ بدلا من $\leqslant$) .

فإذا وجد $\beta \in S$ بحيث أن $\beta \leq x$ من أجل كل x من E فإننا نقول إن E محدودة من الأدنى (في S) ، ونسمي β حداً أدنى لـ E (في S) . وإذا كانت المجموعة E محدودة من الاعلى ومن الادنى (في S) فإننا نقول إنها محدودة (في S) .

١ ـ ٨ ـ تعريف :

لنفرض أن S مجموعة مرتبة و $E \subseteq S$ و E محدودة من الأعلى (في S) ولنفرض أنه يوجد $\alpha \in S$ بحيث يتمتع بالخاصتين التاليتين :

(i) α حد أعلى لـ E (في S) .

(ii) إذا كان $\gamma \in S$ بحيث أن $\gamma < \alpha$ فإن γ لن يكون حداً أعلى لـ E (في S) ، وبالتالي يوجد في E عنصر مثل β بحيث يكون $\gamma < \beta$.

عندئذ يسمى α بأصغر حد أعلى لـ E (في S) .

[إن وجود واحد على الأكثر مثل هذا الـ α واضح من (ii)]

ويسمى α أيضاً بالـ supremum of E ونكتبه بالشكل $\alpha = \sup E$.

أما أكبر حد أدنى لـ E (في S) (أو الـ [infimum of E])

للمجموعة E المحدودة من الأدنى (في S) فإنه يعرّف

بنفس الطريقة : فالرمز $\alpha = \inf E$ يعني أن α حد أدنى لـ E

(في S) ، وانه لا يوجد أيّ $\beta > \alpha$ بحيث يكون β حداً

أدنى لـ E (في S) .

١ — ٩ — أمثلـــة :

آ — لنعتبر المجموعتين A و B المذكورتين في المثال ١-١

كمجموعتين جزئيتين في المجموعة المرتبة Q فنجد مايلــي :

I) المجموعة A محدودة من الأعلى ، وحدودها العليا هـي

بالضبط جميع عناصر B . وبما أنه لا يوجد في B عنصر أصغـري

فإنه كل عنصر من Q لا يمكن أن يكون أصغر حد أعلـى لـ A .

II) المجموعة B محدودة من الأدنى ، ومجموعة كل حدودها —

الدنيا تتألف من جميع عناصر A وجميع الأعداد المنطقة $r \in Q$ بحيـث

$r \leq 0$. وبما انه لا يوجد في A عنصر أعظمي فإن كل عنصر من Q

لا يمكن أن يكون أكبر حد أدنى لـ B .

ب — إذا كان $\alpha = \sup E$ موجوداً فإن α قد ينتمي إلى E

وقد لا ينتمي إليها . فمثلاً لنأخذ المجموعة :

$E_1 = Q^{(-)} = \{r : r \in Q , r < 0\}$ والمجموعة :

$E_2 = \{r : r \in Q , r \leq 0\}$ مجموعة كل الأعداد المنطقة $r \in Q$

بحيث $0 \leqslant r$ عند ئذ يكـــون :

$$0 \notin E_1 \text{ و } 0 \in E_2 \text{ و } \sup E_1 = \sup E_2 = 0$$

جـ ــ لتكن $E = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ مجموعة كل الاعداد $\frac{1}{n}$ ، حيث $n = 1 ، 2 ، 3 ، \ldots\ldots$. عند ئـــذ يكون : $\sup E = 1 \in E$ و $\inf E = 0 \notin E$.

١ ـــ ١٠ ـــ تعريـــــف

نقول عن المجموعة المرتبة S إنها تتمتع بخاصة أصغر حد أعلـى اذا تحقق مايلــــــي :

إذا كانت $\phi \neq E \subseteq S$ وكانت E محدودة من الأعلى (في S) فإنه يوجد $\sup E$ بحيث أن $(\sup E) \in S$.

يبيّن المثال ١ ـــ ٩ (P) أن Q لا تتمتع بخاصة أصغر حد أعلى .

أما المجموعة المرتبة التي تتمتع بخاصة اكبر حد أدنى فتعرّف بشكل مشابـــه .

وسنبيّن فيما يلي أن كلّ مجموعةٍ مرتبةٍ متمتعةٍ بخاصة أصغر حد أعلى تتمتع حتماً بخاصة أكبر حد أدنى ، وبالعكـــس .

١ ـــ ١١ ـــ مبرهنــــة :

لتكن S مجموعةً مرتبةً متمتعةً بخاصة أصغر حد أعلى و $\phi \neq B \subseteq S$ و B محدودة من الأدنى (في S) . ولتكن L مجموعة كـــل

الحدود الدنيـــا لـ B (في S) .

عندئذ يوجد $\alpha = \sup L$ بحيث $\alpha \in S$ و $\alpha = \inf B$.

[وبالتالي يوجد $\inf B$ بحيث أن $(\inf B\ L) \in S$]

الاثبـــــات :

بما أن B محدودة من الأدنى (في S) فإنّ $L \neq \phi$. ولمـــا كانت L تتألف بالضبط من العناصر $y \in S$ التي تحقق المتباينة (المتراجحة) $y \leq x$ من أجل كل $B \ni x$ فإننا نجد أن كل $B \ni x$ يكون حداً أعلى لـ L . ومنه L تكون محدودة من الأعلى (في S) . إذن يوجد $\sup L$ بحيث أن $(\sup L) \in S$ باعتبار أن S تتمتع بخاصة أصغر حد أعلى (بالفرض) . لنرمز لـ $\sup L$ بالرمـــز α فيكون $\alpha = (\sup L) \in S$. ثم إذا كان $\gamma \in S$ بحيـــث أن $\gamma < \alpha$ فإنّ γ لا يكون حداً أعلى لـ L (في S) [وذلـــك بحسب التعريف ١ ـــ ٨] وبالتالي $\gamma \notin B$. ومنه $\alpha \leq x$ مـــن أجل كل $B \ni x$ وبالتالـــي $\alpha \in L$.

ثم اذا كان $\beta \in S$ بحيث أن $\alpha < \beta$ فإنّ $\beta \notin L$ لأنّ α حد أعلى لـ L (في S) . وبذلك نكون قد برهنا على أن $\beta \notin L$ (إذا كان $\alpha < \beta$) ، وأن $\alpha \in L$ ، وهذا يعني أن α حـــد

ادنى لـ B (في S) ، وأن β ليس حداً أدنى لـ B
عندما $\beta > x$ • إذن $\alpha = \inf B$ وبهذا يتم المطلوب ،
وبطريقة مماثلة يمكننا برهان النص التالــــي :

لتكن S مجموعة مرتبة متمتعة بخاصة أكبر حد أدنى و $\phi \neq B \subseteq S$ و B محدودة من الأعلى (في S) ولتكن L مجموعة كل الحدود العليـا لـ B (في S) • عندئذ يوجد $\alpha = \inf L$ بحيث $\alpha \in S$ و $\alpha = \sup B$ [وبالتالي يوجد $\sup B$ بحيث أن $(\sup B) \in S$] .

الحقــــــول :

١ ــ ١٢ تعريـــــف :

الحقل هو مجموعة F عرّف عليها قانونان يســمى أحدهما بالجمع ويسمى الآخر بالضرب بحيث تتحقق الموضوعات (A) و (M) و (D) المسـماة بـ"موضوعات الحقل" التاليـــــة :

(A) موضوعات الجمــع :

(A_1) إذا كان $x \in F, y \in F$ فإنّ $(x+y) \in F$.

(A_2) الجمع تبادلي (تبديلي) أيْ : $\forall x, y \in F$ فإنّ $x+y = y+x$

(A_3) الجمع تجميعي ، أيْ : $\forall x, y, z \in F$ فإنّ :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

A_4) يوجد في F عنصر 0 بحيث أن $0 + x = x$ من أجل كل $x \in F$.

A_5) يوجد لكل $x \in F$ عنصر $-x$ بحيث $-x \in F$ و $x + (-x) = 0$.

M) موضوعات الضـــرب :

M_1) اذا كان $x \in F$ و $y \in F$ فإنّ $x \cdot y \in F$.

M_2) الضرب تبادلي ، أيْ : $x \cdot y = y \cdot x$ من أجـــل جميـــع $x, y \in F$.

M_3) الضرب تجميعي ، أيْ : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z =$ من أجل جميع x و y و z من F .

M_4) يوجد في F عنصر 1 بحيث أن $1 \neq 0$ و $1 \cdot x = x$ من أجل كل x من F .

M_5) اذا كان $x \in F$ و $x \neq 0$ فإنه يوجد $\frac{1}{x} \in F$ بحيث أن : $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

D) القانون التوزيعـــي :

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ من أجل جميع $x, y, z \in F$.

١ ـ ١٣ ـ ملاحظـــات :

(آ) نكتب عادة (في أيّ حقـل) :

$x+y+z \,,\, x\cdot y\cdot z \,,\, x^2 , x^3 , 2x$ و $3x$ ......

$x - y$ و $\frac{x}{y}$ و.... بدلاً من

$(x+y)+z \,,\, (x\cdot y)\cdot z \,,\, x\cdot x \,,\, x\cdot x\cdot x \,,\, x+x \,,\, x+x+x$ و ....

$x + (-y)$ و $x \cdot (\frac{1}{y})$ و....

(ب) إن موضوعات الحقل تتحقق في Q إذا كان الجمع والضرب همـا الجمع والضرب المألوفان في Q . ولذلك فإنّ Q حقـــل .

(جـ) على الرغم من أن هدفنا ليس دراسة الحقول (أو أية بنية جبرية أخرى) بالتفصيل ، إلاّ أن علنا مناسب لكي نبين أن بعض الخواص المعروفة لـ Q هي نتائج لموضوعات الحقل . ولن تكرر ذلك ثانية من أجل الأعداد الحقيقية .

١ ــ ١٤ ــ مبرهنـــــة :

إن موضوعات الجمع تؤدي إلى القضايا التاليـــة :

(آ) إذا كان $x+y=x+z$ فإن $y=z$.

(ب) إذا كان $x+y=x$ فإن $y=0$.

(جـ) إذا كان $x+y=0$ فإن $y=-x$.

(د) $-(-x)=x$

هذا وان (آ) تعبّر عن قانون الاختصار . أما (ب) فتعبّر عن وحدانيـــة العنصر 0 الموجود بحسب (A_4) . أما (جـ) فتعبّر عن وحدانية العنصر $-x$ الموجود بحســب (A_5) .

الاثبـــــات :

إذا كان $x + y = x + z$ فإن الموضوعات (A) تعطينا $= -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z$

$y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y)$

وهذا يثبت (آ) .

وللحصول على (ب) يكفي أُخذ $z = 0$ في (آ) . أما للحصول على (جـ) فإنه يكفي أخذ $z = -x$ في (آ) . وأخيراً ، للحصول على (د) فإننا نستخدم (جـ) بأن نضع $-x$ بدلاً من x وأن نضع x بدلاً من y ، حيث تكون أمام الصيغة الصحيحة $-x + x = 0$ التي منها نستنتج بحسب (جـ) أن $x = -(-x)$. وبهذا يتم المطلوب اثباتـــــه .

١ ـ ١٥ ـ مبرهنـــــة :

إن موضوعات الضرب تؤدي الى القضايا التاليـــة :

(آ) إذا كان $x \neq 0$ و $x \cdot y = x \cdot z$ فإن $y = z$.

(ب) إذا كان $x \neq 0$ و $x \cdot y = x$ فإن $y = 1$.

(جـ) إذا كان $x \neq 0$ و $x \cdot y = 1$ فإن $y = \frac{1}{x}$.

(د) اذا كان $x \neq 0$ فإن $\frac{1}{1/x} = x$

يتم اثبات هذه المبرهنة بشكل مماثل لاثبات المبرهنة ١ ــ ١٤
ولذلك فاننا لن نكتبه ونتركه للقارئ بمثابة تمريــــن •

١ ــ ١٦ ــ مبرهنـــــة :

إن موضوعات الحقل تؤدي الى القضايا التالية (من أجل أية عناصر x و y و z من F) :

(آ) $0 \cdot x = 0$

(ب) إذا كان $x \neq 0$ و $y \neq 0$ فإن $x \cdot y \neq 0$

(جـ) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$

(د) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

الاثبــــات :

يمكننا أن نكتب $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x = (0+0) \cdot x$ •
ومنه $0 \cdot x = 0$ بحسب ١ ــ ١٤ (ب) وبالتالي فإنه يكون قد تــم إثبــــات (آ) •

وأيضا بفرض $x \neq 0$ و $y \neq 0$ و $x \cdot y = 0$ • عندئذ يكون (بحسب (آ) :

$$1 = \left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x \cdot y = \left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot 0 = 0$$

وهذا غير صحيح . وبذلك يكون قد تم اثبات (ب) .

وفيما يتعلق بالمساواة الأولى في (جـ) فإنها تنتج من :

$$(-x)\cdot y + x\cdot y = (-x + x)\cdot y = 0\cdot y = 0$$

وذلك استناداً إلى ١ ـ ١٤ (جـ) . أما المساواة الثانية في (جـ) فتبرهن بأسلوب مشابه . وأخيراً بحسب (جـ) و ١ ـ ١٤ (د) نجد :

$$(-x)\cdot(-y) = -[x\cdot(-y)] = -[-(x\cdot y)] = x\cdot y$$

<u>١ ـ ١٧ ـ تعريف :</u>

الحقل المرتب هو حقل F بحيث أن F مجموعة مرتبة وبحيث يتحقق مايلي :

(١) اذا كان $x, y, z \in F$ واذا كان $y \leq z$ فإنّ $x + y \leq x + z$.

(٢) اذا كان $x \in F$, $y \in F$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ فإنّ $x \cdot y \geq 0$.

ونلاحظ أنه في الحقل المرتب F يكون محققاً مايلي :

(i) اذا كان $x, y, z \in F$ و $y < z$ فإن $x + y < x + z$.

(ii) اذا كان $x \in F$ و $y \in F$ و $x > 0$ و $y > 0$ فإن $x \cdot y > 0$.

ويتم اثبات (i) استناداً إلى (١) و (A_5) حيث نجد أنه اذا كان $x + y \leq x + z$ فإن $(-x) + x + y \leq -x + x + z$ وبالتالي فإنّ $y \leq z$ وهذا مخالف للفرض .

ويتم اثبات ((( ) بملاحظة أنه إذا كان $x > 0$ و $y > 0$

فإنّ $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و $x \neq 0$ و $y \neq 0$ وبالتالي فـإن

$x \cdot y \geq 0$ (بحسب (٢)) و $x \cdot y \neq 0$ (بحسب ١ ـ ١٦(ب))،

وهذا يعني أن $x \cdot y > 0$.

اذا كان $x > 0$ فإننا نقول عن x إنه موجب،واذا كان $x < 0$

فإننا نقول عن x إنه سالب،واذا كان $x \geq 0$ فإننا نقول عن x إنـه

غير سـالب . أما اذا كان $x \leq 0$ فإننا نقول عن x إنه غير موجب .

مثـــال : Q هو حقل مرتـب .

وتجدر الاشارة الى أن كل القوانين المألوفة المستخدمة أثناء التعامل مـع

المتباينات يمكن تطبيقها في أي حقل مرتـــب :

فالضرب بالكمية الموجبة (السـالبة) يحفظ (يغيّر) اتجاه المتباينـة .

ومربع أيّ كمية يكون غير سالب ... الخ والمبرهنة الآتية تعطينا بعض هـذه

القوانيـــــن :

١ ـ ١٨ ـ مبرهنـــة :

القضايا التالية تكون صحيحة في أيّ حقل مرتـــب :

(آ) اذا كان $x > 0$ فإن $-x < 0$ وبالعكـس .

(ب) اذا كان $x > 0$ و $y < z$ فإن $x \cdot y < x \cdot z$.

(جـ) اذا كان $x<0$ و $y<z$ فإن $x\cdot y>x\cdot z$ •

(د) اذا كان $x\neq 0$ فإن $x^2>0$ • وكحالة خاصة • $1>0$ •

(هـ) اذا كان $0<x<y$ فإن $0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$ •

<u>الاثبـــــات :</u>

(آ) إذا كان $x>0$ فإنّ :

$$0=-x+x>-x+0=-x$$

وبالتالي فإنّ $-x<0$ •

وإذا كان $x<0$ فإن : $0=-x+x<-x+0=-x$

وبالتالي فإن $-x>0$ — وبهذا يتم اثبات (آ) •

(ب) بما أن $z>y$ فإن $z-y>y-y=0$ وبالتالـــــي $x\cdot(z-y)>0$ • ولهذا فإن :

$$x\cdot z=x\cdot(z-y)+x\cdot y>0+x\cdot y=x\cdot y$$

(جـ) بحسب (آ) و (ب) والمبرهنة ١ ـ ١٦ (جـ) يمكننا أن نكتب :

$$-[x\cdot(z-y)]=(-x)\cdot(z-y)>0$$

ومنـــه $x\cdot(z-y)<0$ وبالتالي $x\cdot z<x\cdot y$ •

(د) إذا كان $x>0$ فإن $x^2>0$ بحسب (٢ ٢) من التعريف ١ ـ ١٧ ،

واذا كانت $x<0$ فإن $-x>0$ وبالتالي $(-x)^2>0$ • وبمـا أن $x^2=(-x)^2$ [استناداً الى المبرهنة ١ ـ ١٦ (د)] فانّ :

$x^2 > 0$ طالما أن $(-x)^2 > 0$ • ثم بما أن $1 = 1^2$

فإن $1 > 0$ •

(هـ) بملاحظة أنه إذا كان $y > 0$ و $v \leq 0$ فإن $y \cdot v \leq 0$ ؛

وبملاحظة أن $y \cdot \left(\frac{1}{y}\right) = 1 > 0$ نستنتج أن $\frac{1}{y} > 0$ •

وبطريقة مماثلة نجد أن $\frac{1}{x} > 0$ • فإذا ضربنا طرفي المتباينة $x < y$

بالكمية الموجبة $\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$ فإننا نحصل على المتباينة

$\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ •

الحقل الحقيقي :

سوف نصيغ الآن مبرهنة الوجود التي تعتبر جوهر هذا الفصل •

١ ــ ١٩ ــ مبرهنة :

يوجد حقل مرتب $\mathbb{R}$ يتمتع بخاصة أصغر حد أعلى وبالاضافة

إلى ذلك فإن $\mathbb{R}$ يحوي $\mathbb{Q}$ كحقل جزئي فيه •

إن القضية الأخيرة تعني أن $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ وأن عمليتي الجمع والضرب

في $\mathbb{R}$ تتطابقان مع عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{Q}$ عندما —

نستخدمها من أجل عناصر $\mathbb{Q}$ وأن الاعداد المنطقة الموجبة تكون

عناصر موجبة في $\mathbb{R}$ •

وتدعى عناصر $\mathbb{R}$ بـ «الأعداد الحقيقية» .

إن اثبات المبرهنة ١ ــ ١٩ طويل نوعاً ما وقد يكون مملاً ، ولذلك مثلناه في ملحق لهذا الفصل وهذا الاثبات يقوم ببناء $\mathbb{R}$ انطلاقاً من $\mathbb{Q}$. هذا وان المبرهنة الآتية يمكن استنتاجها من بناء $\mathbb{R}$ المذكور بجهد يسير . ومع ذلك فإننا نفضل استنتاجها من المبرهنة ١ ــ ١٩ لأن هذا العمل يعطينا توضيحاً عن كيفية التعامل مع خاصة أصغر حد أعلى .

١ ــ ٢٠ ــ مبرهنـــة :

(آ) اذا كان $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ و $x > 0$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث أن $n \cdot x > y$.

(ب) اذا كان $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ و $x < y$ فإنه يوجد $P \in \mathbb{Q}$ بحيث ان $x < P < y$.

إن الجزء (آ) يسمى عادة بـ"خاصة أرخميدس" لـ $\mathbb{R}$.

أما الجزء (ب) فإنه يعبّر عن أن $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$: بين أيّ عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد منطق (واحد على الأقل) .

الاثبـــات :

(آ) لتكن $A = \{n \cdot x : n \in \mathbb{N}^*\}$ ولنفرض جدلاً أن القضية (آ) غير صحيحة . عندئذ يكون y حداً أعلى لـ A (في $\mathbb{R}$) ، ومنه يوجد $\alpha = \sup A$ بحيث $\alpha \in \mathbb{R}$ وبما أن $x > 0$ فإنه $\alpha - x < \alpha$ وبالتالي فإن $\alpha - x$ ليس حداً أعلى لـ A (في $\mathbb{R}$) . ومنه يوجد عدد صحيح

موجب m بحيث يكون $\alpha - x < m \cdot x$ اذن :

$\alpha < (m+1)x \in A$ وهذا مستحيل لأن α حدٌّ أعلى لـ A

(في $\mathbb{R}$) وبذلك يتم اثبات (آ) .

(ب) لما كان $x < y$ فإن $y - x > 0$ ، وبحسب (آ) يوجد عدد صحيح موجب n بحيث أن $n \cdot (y - x) > 1$

وتطبيق (آ) مرة أخرى يوجد عددان صحيحان موجبان m_1 و m_2

بحيث يكون $m_1 > n \cdot x$ ، $m_2 > -n \cdot x$ وبالتالي $-m_2 < n \cdot x < m_1$

ومنـــه يوجد عدد صحيح m بحيث أن $-m_2 \leqslant m \leqslant m_1$ و

$m - 1 \leqslant n \cdot x < m$. ومن المتباينات السابقة نجد أن :

$n \cdot x < m \leqslant 1 + n \cdot x < n \cdot y$ وبما أن $0 < n$ فإننا نستنتج أن :

$x < \frac{m}{n} < y$ وهذا يبرهن (ب) حيث $P = \frac{m}{n}$.

(وتجدر) الإشارة إلى أنه [استناداً الى (ب)] يمكننا أن نقول مايلـــي :

"بين كل عددين حقيقيين مختلفين توجد أعداد منطقة كثيرة بحيث تؤلـــف مجموعة غير منتهية" . سنثبت الآن وجود الجذر النوني للعدد الحقيقـــي الموجب وسيبيّن هذا الاثبات كيف يمكننا في $\mathbb{R}$ معالجة الصعوبة التي ظهرت في المقدمة (كون $\sqrt{2}$ أصماً) .

١ ــ ٢١ ــ مبرهنـــة :

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ وكل عدد صحيح $n > 1$ يوجد

عدد حقيقي موجب واحد فقط y بحيث أن $y^n = x$ •

[إن هذا العدد y يكتب عادة بالشكل $\sqrt[n]{x}$ أو $x^{1/n}$] •

<u>الاثبـــــات :</u>

ليكن $x > 0$ و n عدداً صحيحاً أكبر من الواحد • إن وجود عدد حقيقي واحد على الاكثر y بحيث أن $y^n = x$ هو أمر واضـح لأن المتباينة $0 < y_1 < y_2$ تؤدي الى المتباينة $y_1^n < y_2^n$ •

لتكن $E = \{t : t \in \mathbb{R}, t > 0, t^n < x\}$

مجموعة كل الأعداد الحقيقية الموجبة t التي تحقق الصيغـــة $t^n < x$ •

إذا كان $t_1 = \dfrac{x}{1+x}$ فإنّ $1 > t_1 > 0$ وبالتالي $t_1^n < t_1 < x$ • أيّ أن $t_1 \in E$ ؛ وهذا يبيّن أن $E \neq \phi$ •

واذا كان $t_0 > 1 + x$ فإن $t_0^n > t_0 > x$ وبالتالي $t_0 \notin E$ •

ومنه ($1 + x$) يكون حداً أعلى لـ E (في $\mathbb{R}$) •

واستناداً إلى المبرهنة ١ ـ ١٩ يوجد $y = \sup E$ بحيث أن $y \in \mathbb{R}$ • وسنثبت أن $y^n = x$ ، بأن نبرهن على أن كلاً من المتباينتين $y^n < x$ و $y^n > x$ تؤدي الى تناقض :

إذا كان $0 < a < b$ فإن المطابقـــة

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$

تعطي المتباينة $b^n - a^n < (b-a)\, n\, b^{n-1}$.

لنفرض جدلاً أن $y^n < x$ ، ولنختر h بحيث يكون $0 < h < 1$

و $h < \dfrac{x - y^n}{n\,(y+1)^{n-1}}$ عند ئذ (بفرض $a = y$ و $b = y + h$)

يكـــــــــون :

$$(y+h)^n - y^n < h\cdot n(y+h)^{n-1} < h\cdot n(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

ومنه $(y + h)^n < x$ وبالتالـــــي

$(y + h) \in E$. وبما أن $y + h > y$ فإننا نحصـــل

على تناقض مع كون y حداً أعلى لـ E (في $\mathbb{R}$) .

لنفرض الآن جدلاً أن $y^n > x$ ولنضع $K = \dfrac{y^n - x}{n\, y^{n-1}}$.

عند ئذ يكون : $0 < K < y$ ومنه اذا كان $t \geq y - K$ فإن :

$$y^n - t^n \leq y^n - (y - K)^n < K\cdot n\cdot y^{n-1} = y^n - x$$

ومنه $t^n > x$ و $t \notin E$ وهذا يقتضي أن $y - K$ حدٌّ

أعلى لـ E (في $\mathbb{R}$) . وبما أن $y - K < y$ فإننا نحصل علـــى

تناقض لأن y أصغر حد أعلى لـ E (في $\mathbb{R}$) .

إذن $y^n = x$ وبهذا يتم المطلوب اثباتـــــه .

نتيجـــــة :

إذا كان العددان الحقيقيان b و a موجبين وإذا كان n عدداً

صحيحاً أكبر من الواحد فإن : $(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$

البرهـــــان :

لنضع $\alpha = a^{\frac{1}{n}}$ و $\beta = b^{\frac{1}{n}}$. عند ئذ يكون $(\alpha \cdot \beta)^n = \alpha^n \cdot \beta^n =$ $a \cdot b =$ وذلك لأن الضرب تبادلي [بحسب الموضوعة (M_2) في التعريف ١ ــ ١٢] .

وبسبب وحدانية الجذر النوني [الواردة في المبرهنة ١ ــ ٢١] نستنتج أن :

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \alpha \cdot \beta = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$$

١ ــ ٢٢ ــ الكســور العشــرية :

سنبيّن فيما يلي العلاقة بين الأعداد الحقيقية والكسور العشرية :

ليكن x عدداً حقيقياً موجباً . وليكن n_0 أكبر عدد صحيح بحيث أن $n_0 \leq x$. (لاحظ أن وجود n_0 ناتج من خاصة أرخميدس التي تتمتع بها $\mathbb{R}$) . ثم لنفرض أننا قد اخترنا $n_0 , n_1 , \cdots , n_{k-1}$. عند ئذ نختار n_k كأكبر عدد صحيح بحيث أن :

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq x$$

لتكن E مجموعة كل الأعداد

$$\left(n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k}\right) \quad (k = 0 , 1 , 2 , \cdots) \quad \cdots (5)$$

عند ئذ يكون $x = \sup E$ ومنه فالنشــر

العشـــرى لـ x يكون له الشكل التالي :

$$n_0 , n_1 n_2 n_3 \cdots\cdots\cdots \quad (٦)$$

وبالعكس ، من أجل كل كسر عشرى غير منته (٦) ، حيث $0 \leq n_k \leq 9$ و ($K = 1$ و 2 و 3 و ...) ، تكون المجموعة E من الأعداد (٥) محدودة من الأعلى (في $\mathbb{R}$) ، ويكون (٦) هو النشر العشري لـ $\sup E$ ونذكّر بأن النشر العشرى للعدد الحقيقي x هو متوالية الأعداد (٥) التي نحصل على حدودها بواسطة التقريب بالنقص ـ وبالاضافة الى هذا فإن كل كسر عشري منته $n_0 , n_1 n_2 \cdots n_K$ يعطي أفضل تقريب لـ x من اليســار بخطأ لا يتجاوز 10^{-K} .

ولن ندرس الكسور العشرية بالتفصيل لأننا لن نستعملها فيما بعد في هذا الفصل

مجموعة الأعداد الحقيقية الموســـعة $\tilde{\mathbb{R}}$

١ ـ ٢٣ ـ تعريـــف :

إن مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة $\tilde{\mathbb{R}}$ تتألف من الأعداد ـ الحقيقية $x \in \mathbb{R}$ ومن الرمزين $+\infty$ و $-\infty$ ـ أيْ :

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty , +\infty\}$$

ولكي نجعل $\tilde{\mathbb{R}}$ مرتبة سنحافظ على الترتيب الأصلي في $\mathbb{R}$ ونعرّف $-\infty < x < +\infty$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

ومنه نستنتج أن $+\infty$ يكون حداً أعلى (في $\widehat{\mathbb{R}}$) لكـــل مجموعة جزئية من $\widehat{\mathbb{R}}$، وأنه (لكل مجموعة جزئية غير خالية من $\widehat{\mathbb{R}}$) يوجد أصغر حد أعلى (في $\widehat{\mathbb{R}}$). فمثلاً، إذا كانت E مجموعـــة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ وغير محدودة من الاعلى (في $\mathbb{R}$) (أيّ إذا كان من أجل كل عدد حقيقي y يوجد عنصر x من E بحيث يكون $y < x$) فإنّ $\sup E = +\infty$ (في $\widehat{\mathbb{R}}$).

وبطريقة مشابهة يمكننا أن نتحدث عن الحدود الدنيا (في $\widehat{\mathbb{R}}$).

وتجدر الاشارة الى أن $\widehat{\mathbb{R}}$ ليست حقلاً ولكنه من المناسب أن نذكـــر الاتفاقات التاليـــــــة :

(آ) إذا كان x عدداً حقيقياً فـــإن :

$$x+\infty=+\infty \text{ و } x-\infty=-\infty \text{ و } \frac{x}{+\infty}=\frac{x}{-\infty}=0$$

(ب) إذا كان $x>0$ فإنّ $x\cdot(+\infty)=+\infty$ و $x\cdot(-\infty)=-\infty$

(جـ) اذا كان $x<0$ فإنّ $x\cdot(+\infty)=-\infty$ و $x\cdot(-\infty)=+\infty$

ولكي نفرّق بين الرمزين $+\infty$ و $-\infty$ من جهة وبين الأعداد الحقيقية من جهة أخرى فإننا نسمـــي كل x من $\mathbb{R}$ بعدد حقيقـــي

محدود ونسمي ∞ +و ∞ - بالعددين الحقيقيين غير المحدودين الموجب والسالب على الترتيب •

ملحق هذا الفصـــل :

إن المبرهنة ١ ـ ١٩ سوف يتم اثباتها في هذا الملحق بواسـطة بناء $\mathbb{R}$ انطلاقاً من $\mathbb{Q}$ حيث نعتبر أن القارئ يعرف خواص الأعداد المنطقة التي نذكر منها مايلـــــي :

ـ حاصل جمع وحاصل طرح وحاصل ضرب وخارج قسمة أيّ عددين منطقين هو عدد منطق (باستثناء القسـمة على صفر) •

ـ أياً كانت الأعداد المنطقة r و q و p فإنّ :

$$p+q=q+p \quad \text{و} \quad p\cdot q=q\cdot p$$

$$(p+q)+r=p+(q+r) \quad \text{و} \quad (p\cdot q)\cdot r=p\cdot(q\cdot r)$$

$$p\cdot(q+r)=p\cdot q+p\cdot r$$

ـ هناك علاقة ترتيب $\leqslant$ معرفّة على مجموعة الأعداد المنطقة $\mathbb{Q}$ بحيث أنه من أجل كل عددين منطقين p و q يكون :

إما $q=p$ أو $p<q$ أو $q<p$ •

ـ إذا كان $r\leqslant q$ و $q\leqslant p$ فإنّ $r\leqslant p$ •

ـ إذا كان $p\geqslant 0$ و $q\geqslant 0$ فإنّ $p+q\geqslant 0$ و $p\cdot q\geqslant 0$ •

— إذا كان $p < q$ فإنّ $p < \frac{p+q}{2} < q$

— مجموعة الأعداد المنطقة Q تتمتع بخاصة أرخميدس .

وسوف نصطلح على كتابة $Q = Q^{(-)} \cup \{0\} \cup Q^{(+)}$ حيث $Q^{(+)}$ هي مجموعة الأعداد المنطقة الموجبة (تماماً) و $Q^{(-)}$ هي مجموعةالأعداد المنطقة السالبة (تماماً) .

وسنقسم عملية بناء مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ انطلاقاً من Q الى عدة خطوات :

الخطوط الأولـــى :

إن عناصر $\mathbb{R}$ ستكون عبارة عن مجموعات جزئية محتواة تمامــاً في Q وتحقق شروطاً معينة وستدعى بـ"مقاطع ديدكند" . وبذلــك يمكننا أن نقول الآن إن $\mathbb{R}$ هي مجموعة كل المقاطع . ويعرّف — المقطع (مقطع ديدكند) بأنه أيّ مجموعة α من الأعداد المنطقة بحيث يتحقق مايلـــي :

(I) $\alpha \neq \phi$ و $\alpha \neq Q$

(II) إذا كان $p \in \alpha$ وكان $q \in Q$ بحيث أن $q < p$ فإن $q \in \alpha$.

(III) اذا كان $p \in \alpha$ فإنه يوجد عدد منطق r بحيث يكون $r \in \alpha$ و $p < r$.

هذا وسوف نستعمل الحروف p و q و
r و ..... كرموز للأعداد المنطقـــة .

أما الرموز α و β و γ و ..... فإننا سنستعملها كرموز للمقاطع.

وتجدر الاشـــارة الى أن (III) تكافئ مايلـــي :

(III') لا يوجد في α عنصر أعظمي (أكبر) .

<u>مبرهنـــة (١) :</u>

إذا كان α مقطعاً وإذا كان $p \in \alpha$ و $q \notin \alpha$ فإن $p < q$.

<u>الاثبـــات :</u>

إذا كان $p \in \alpha$ و $q \leq p$ فإنه بحسب (II) ينتج أن
$q \in \alpha$ وهذا يناقض كون $q \notin \alpha$ فرضاً . وبهذا يتم اثبـــات
المطلـــــوب .

<u>نتيجـــة (١) :</u>

اذا كان α مقطعاً واذا كان $r \notin \alpha$ و $r < s$ فإنّ $s \notin \alpha$.

إذا أخذنا المبرهنة (١) بعين الاعتبار فإنّ عناصر المجموعة α تدعـى
أحياناً بـ «الأعداد الدنيا للمقطع α » .

أما الأعداد المنطقة التي لا تنتمي الى المجموعة α فتدعى أحيانـاً بـ
« الأعداد العليا للمقطـــع α » .

ويسمى المقطع α بمقطع منطق (عادي) اذا كان يوجد في مجموعة

أعداده العليا عنصر أصغـــري •

ويسمى المقطع α بمقطع أصم (غير عادي) اذا كان لا يوجد في مجموعـة أعداده العليا عنصر أصغري • ونقول عن المقطع المنطق إنه عدد حقيقي منطق ، ونقول عن المقطع الأصم إنه عدد حقيقي أصـم •

<u>مثال (١) :</u>

لنأخذ المجموعتين $0^* = \{x : x \in Q , x < 0\}$ و $1^* = \{x : x \in Q , x < 1\}$

فنجد أن كلاً منهما تكون مقطعاً منطقـــاً •

لما كان $-2 \in 0^*$ فإنّ $0^* \neq \phi$ وبما أن $2 \notin 0^*$ فإنّ $0^* \neq Q$ •

ثم إذا كان $x \in 0^*, y \in Q$ بحيث أن $y < x$ فإن $y < 0$ وبالتالـي فإن $y \in 0^*$ • وأخيراً • إذا كان $p \in 0^*$ فإن $p < 0$ وبالتالي فإن $p < \frac{p}{2} < 0$ ، أيّ أنه يوجد في 0^* عنصر أكبر من p •

وبما أن المتباينة $p < 0$ تؤدي إلى أن $p \in 0^*$ فإن 0 يكـون العنصر الأصغري في مجموعة الأعداد العليا للمقطع 0^* • وهذا يعني أن المقطع 0^* هو مقطع منطـــق •

وبطريقة مماثلة نبرهن على أن المجموعة 1^* هي مقطع • وهـــذا المقطع منطق لأنه يوجد في مجموعة أعداده العليا عنصر أصغري ألا وهو العدد 1 • ولذلك سنترك تفاصيل البرهان للقـــارئ •

مثـــــال (٢) :

لنأخذ المجموعة $\beta = Q^{(-)} \cup \{0\} \cup \{x \in Q^{(+)} , x^2 < 2\}$ فنجد أن β هي مقطع أصم لأنه مقطعُ مجموعةُ أعداده العليا هي المجموعة $B = \{x : x \in Q^{(+)} , x^2 > 2\}$ التي لا يوجد فيها عنصر أصغري.

وعلى الرغم من أننا سنترك تفاصيل البرهان للقارئ إلاّ أننا نلفت انتباهه الى المناقشة التي تسبق الملاحظة ١ ــ ٢ (مباشرة) لكي يستفيد منها من أجل هذا البرهان ٠

الخطوة الثانيـــة :

نفرض أن α و β مقطعان اختياريان ٠ سوف نقول إن هذين المقطعين متساويان (ونكتب $\beta = \alpha$) عندما تكون المجموعتان α و β متساويتين (متطابقتين) ٠ [أيّ من كون $p \in \alpha$ ينتج أن $p \in \beta$ ، ثم من كون $q \in \beta$ ينتج أن $q \in \alpha$] ٠

واذا كان المقطعان α و β غير متســاويين فإننا نكتب $\alpha \neq \beta$ ٠

وبالاضافة الى ذلك ، نكتب $\alpha < \beta$ (أو $\beta > \alpha$) إذا كان $\alpha \subsetneq \beta$ ٠

هذا ويمكننا أن نكتب تعريفاً آخر مكافئاً لهذا التعريف ألا وهو التالي :

نقول إن $\alpha < \beta$ اذا كان يوجد عدد منطق p (واحد على الاقل) بحيث يكون $p \in \beta$ و $p \notin \alpha$ ٠ (برهن على صحة هذا التكافؤ؟) ٠

وكذلك ، فإن $\alpha \leqslant \beta$ تعني أن $\alpha = \beta$ أو $\alpha < \beta$ ،

أو بعبارة أخرى ، $\alpha \leqslant \beta$ تعني أن $\alpha \subseteq \beta$ • أما $\alpha \geqslant \beta$

فتعني أن $\beta \leqslant \alpha$. واذا كان $\alpha > 0^{*}$ فإننا سوف نقول إن القطع

α موجب ، واذا كان $\alpha \geqslant 0^{*}$ فإننا سنقول إن القطع α غير

سالب • وبشكل مماثل ، اذا كان $\alpha < 0^{*}$ فإن المقطع α

يسمى مقطعاً سالباً ، واذا كان $\alpha \leqslant 0^{*}$ فإن المقطع α يسمى

مقطعاً غير موجب •

ولنبيّن فيما يلي أن العلاقة $\leqslant$ المعرفة على مجموعة المقاطع تحقق

شروط التعريف ١ ـ ٥ :

(١) ـ اذا كانت γ و β و α ثلاثة مقاطع بحيث أن $\beta \leqslant \gamma$ و

$\alpha \leqslant \beta$ فإنّ $\beta \subseteq \gamma$ و $\alpha \subseteq \beta$ وبالتالي $\alpha \subseteq \gamma$ وهذا

يعني أن $\alpha \leqslant \gamma$ •

(٢) ـ اذا كان β و α مقطعين بحيث أن $\beta \leqslant \alpha$ و $\alpha \leqslant \beta$ فإنّ

$\beta \subseteq \alpha$ و $\alpha \subseteq \beta$ وبالتالي فإن $\alpha = \beta$ ، وهذا يعني

تساوي المقطعين α و β •

(٣) ـ من أجل كل مقطعين α و β يكون :

إما $\alpha \leqslant \beta$ أو $\beta \leqslant \alpha$ •

لنفرض جدلاً أن $\beta \not\subseteq \alpha$ و $\alpha \not\subseteq \beta$. عندئذ يوجد في α عنصر واحد على الأقل مثل x بحيث يكون $x \notin \beta$.

ويوجد في β عنصر واحد على الأقل مثل y بحيث يكون $y \notin \alpha$.

ومنه [استناداً الى المبرهنة (١)] يكون $x<y$ و $y<x$ بآن واحد ، وهذا غير صحيح في Q .

إذن : إما $\beta \subseteq \alpha$ أو $\alpha \subseteq \beta$ وبالتالي :

إما $\beta \leq \alpha$ أو $\alpha \leq \beta$.

ومنه نستنتج أنه اذا كان $\beta<\gamma$ و $\alpha<\beta$ فان $\alpha<\gamma$ [وكان من الممكن استنتاج هذا مباشرة بملاحظة أن الصيغتين $\beta \subsetneqq \gamma$ و $\alpha \subsetneqq \beta$ تقتضيان الصيغة $\alpha \subsetneqq \gamma$] .وكذلك نستنتج أنه من أجل أيّ مقطعين β و α تتحقق واحدة وفقط واحدة من الصيغ التالية :

$\beta<\alpha$ و $\alpha=\beta$ و $\alpha<\beta$.

[وكان من الممكن استنتاج هذا مباشرة بملاحظة أن واحدة على الأكثر من الصيغ المذكورة يمكن أن تتحقق ، ثم بملاحظة أن واحدة على الأقل منها تتحقق بسبب مايلي :

لنفرض أن $\alpha \not< \beta$ و $\alpha \neq \beta$. عندئذ α ليست مجموعة جزئية في β . ومنه يوجد p بحيث أن $p \in \alpha$ و $p \notin \beta$.

ومنه بفرض أن $q \in \beta$ نستنتج أن $q<p$ وبالتالي يكون $q \in \alpha$ ؛

وبهذا نستنتج أن $\beta \subseteq \alpha$.

وبما أن $\beta \neq \alpha$ فإن $\beta \subsetneqq \alpha$ وبالتالي فإن $[\beta < \alpha$

وهكذا فإن $\mathbb{R}$ تكون مجموعة مرتبـــة .

<u>الخطوة الثالثة</u> : المجموعة المرتبة $\mathbb{R}$ تتمتع بخاصة أصغر حد أعلى .

<u>البرهـــــــان</u> :

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ ولنفرض أن $\beta \in \mathbb{R}$ هو حد أعلى لـ A (في $\mathbb{R}$) . عندئذ تكون A مجموعة مقاطـــع ، ويكون β مقطعاً . ولنفرض أن $\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ [أيّ : بفرض $p \in Q$ يكون : $(p \in \gamma$ عندما وفقط عندما يوجد α في A بحيث يكـــون $[(p \in \alpha$. وسوف نثبت أن γ هو مقطع (وبالتالي يكـــون $\gamma \in \mathbb{R}$) ثم نثبت أن : $\gamma = \sup A$.

ويتم اثبات كل ذلك كما يلـــــي :

(I) بما أن $A \neq \phi$ فإنه يوجد α_0 بحيث أن $A \ni \alpha_0$.

ولما كان $\phi \neq \alpha_0 \subseteq \gamma$ فإن $\gamma \neq \phi$.

وبما أن β حد أعلى لـ A فإن $\alpha \leqslant \beta$ من أجل كل عنصـــــر α من A . ومنه $\alpha \subseteq \beta$ من أجل كل عنصر α من A ؛

وبالتالي $\gamma \subseteq \beta \subsetneqq Q$. ومنه $\gamma \neq Q$.

(II) ليكن $p \in \gamma$ و $q \in \mathbb{Q}$ و $q < p$ • عند ئذ $p < q$ ويوجد في A عنصر α_1 بحيث أن $p \in \alpha_1$ •
ومنه $q \in \alpha_1$ (لأن α_1 مقطع) وبالتالي $q \in \gamma$•

(III) ليكن $x \in \gamma$ • عند ئذ يوجد عنصر α_2 في A بحيث أن $x \in \alpha_2$ ومنه (باعتبار أن α_2 مقطع) يوجد في α_2 عنصر مثل y بحيث أن $y > x$ • وبما أن $\alpha_2 \subseteq \gamma$ فإنّ $y \in \gamma$
اذن يوجد في γ عنصر y بحيث أن $y > x$ •

إذن $\gamma \in \mathbb{R}$.

ومن جهة أخرى ، نلاحظ أن $\alpha \subseteq \gamma$ من أجل كل α من A •
وبالتالي فإن $\alpha \leq \gamma$ من أجل كل عنصر α من A • ثم بفرض أن $\delta \in \mathbb{R}$ بحيث $\delta < \gamma$ نستنتج أنه يوجد في γ عنصر s بحيث أن $s \notin \delta$ • وبما أن $s \in \gamma$ فإنه يوجد في A عنصر α_3 بحيث يكون $s \in \alpha_3$ • ولما كان $s \in \alpha_3$ و $s \notin \delta$ فإن $\delta < \alpha_3$ • ومنه δ ليس حداً أعلى لـ A (في $\mathbb{R}$) • إذ ن $\gamma = \sup A$ • وبهذا يتم المطلوب برهانـــه •

الخطوة الرابعـــة :

إذا كان $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$ فإننا نعرّف $\alpha + \beta$ بأنـــه مجموعة كل المجاميع $r + s$ بحيث $r \in \alpha$ و $s \in \beta$ ، أيْ :

$$\alpha + \beta = \{r + s : r \in \alpha \text{ و } s \in \beta\}$$

وسنبرهن على أن موضوعات الجمع (المذكورة في التعريف ١ ـ ١٢) تتحقق في $\mathbb{R}$ ، حيث المقطع 0^* يلعب دور الصفر 0 .

A_1) لنبرهن على أن المجموعة $\alpha + \beta$ هي مقطع (أي لنبرهن على أنه اذا كان $\beta \in \mathbb{R}$ و α فإنّ $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$) :

I) من الواضح أن $\alpha + \beta$ مجموعة جزئية غير خالية في Q .

ثم لنأخذ $s' \notin \beta$ و $r' \notin \alpha$ ، حيث $r' \in Q$ و s' ، فنجد أن $r' + s' > r + s$ من أجل جميع الاختيارات لـ $r \in \alpha$ و $s \in \beta$.

وهكذا فإنّ $r' + s' \notin \alpha + \beta$ ، ومنه $\alpha + \beta \neq Q$.

II) ليكن $p \in \alpha + \beta$ و $q \in Q$ و $q < p$. عندئذ $q < p$ ويوجد في α عنصر r ويوجد في β عنصر s بحيث يكون $p = r + s$. ومنه $q - s < r$ وبالتالي $(q - s) \in \alpha$. ومنه $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$.

III) ليكن $z \in \alpha + \beta$. عندئذ يوجد في α عنصر x ويوجد في β عنصر y بحيث يكون $z = x + y$

لما كان α مقطعاً فإنه يوجد في α عدد منطق t بحيث $x < t$.

عندئذ يكون $z < t + y$ و $t + y \in \alpha + \beta$.

هذا ويسمى المقطع $\alpha + \beta$ بـ"مجموع المقطعين α و β"

أو بحاصل جمع المقطعين α و β .

نتيجـــــــة :

حاصل جمع أيّ مقطعين هو مقطع ، أيّ أن عملية جمع المقاطع

المعرفة على $\mathbb{R}$ هي قانون تشكيل داخلي معرف على $\mathbb{R}$.

(A_2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ من أجل كل عنصرين α و β من $\mathbb{R}$

بالحقيقة، إن $\beta + \alpha$ هي مجموعة كل المجاميع $s + r$ ، حيث

$r \in \alpha$ و $s \in \beta$. وكذلك ، إن $\beta + \alpha$ هي مجموعة كل المجاميع

$s + r$ ، حيث $s \in \beta$ و $r \in \alpha$. ولما كان $r + s = s + r$

من أجل كل عددين منطقين r و s فإنه يكون :

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

نتيجة : عملية جمع المقاطع تبادلية (تبديلية) .

(A_3) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ من أجل كل ثلاثة

عناصر α و β و γ من $\mathbb{R}$. (وهذا صحيح) بملاحظة أن $r + (s + t) =$

$= (r + s) + t$ من أجل كل ثلاثة اعداد منطقة (حيث) يمكننا أن نكتب :

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \{(r+s) + t : r \in \alpha , s \in \beta , t \in \gamma\} =$$

$$= \{r + (s+t) : r \in \alpha , s \in \beta , t \in \gamma\} = \alpha + (\beta + \gamma)$$

نتيجة : عملية جمع المقاطع تجميعيـــــة .

(A_4) $\alpha + 0^{\#} = 0^{\#} + \alpha = \alpha$ من أجل كل عنصر α من $\mathbb{R}$.

في الواقع، بحسب (A_2) يكفي اثبات أن $\alpha + 0^{\#} = \alpha$ كما يلــــــــــي :

ليكن $t \in \alpha + 0^{\#}$. عندئذ يوجد في α عنصر مثل r ويوجد في $0^{\#}$ عنصر مثل s بحيث يكون $t = r + s$. ومنه $t = r + s < r$

وبالتالي $t \in \alpha$. وبذلك نكون قد برهنا على أن $\alpha + 0^{\#} \subseteq \alpha$. وللحصول على الاحتواء المعاكس نأخذ $p \in \alpha$. عنـدئـذ يوجد في α عنصر مثل r بحيث يكون $p < r$. ومنه :

وبالتالي $(p - r) \in 0^{\#}$. $p = r + (p - r) \in \alpha + 0^{\#}$

وبذلك يكون $\alpha \subseteq \alpha + 0^{\#}$. إذن $\alpha + 0^{\#} = \alpha$.

نتيجـــــة : عملية جمع المقاطع تقبل عنصراً محايداً منتمياً إلى $\mathbb{R}$ ألا وهو المقطع المنطـــــق $0^{\#}$.

(A_5) ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$. ولتكن $\beta = \{p / p \in \mathbb{Q}, \exists r \in \mathbb{Q}^{(+)} : -p - r \notin \alpha\}$

أي أن β هي مجموعة كل الأعداد المنطقة p بحيث يكـون $-p$ عدداً أعلى للمقطع α وليس العدد الأصغري بين الأعداد العليا للمقطع α. عند ئذ يكون :

$\beta \in \mathbb{R}$ و $\alpha + \beta = 0^{\#}$ للأسباب التاليـــة :

(I) إذا كان $s \notin \alpha$ و $p = s - 1$ فإن $-p - 1 \notin \alpha$

وبالتالي $p \in \beta$.و هكذا فإن $\beta \neq \phi$.

واذا كان $q \in \alpha$ فإن $-q \notin \beta$ وبالتالي فإن $\beta \neq Q$

(II) ليكن $p \in \beta$ و $q \in Q$ و $q < p$. عند ئذ $-q > -p$
ويوجد عدد منطق موجب r بحيث يكون $(-p-r) \notin \alpha$. ومنه
بملاحظة أن $-q-r > -p-r$ نستنتج أن $-q-r \notin \alpha$ وبالتالـي
$q \in \beta$.

(III) ليكن $p \in \beta$. عند ئذ يوجد r بحيث يكون $r \in Q^{(+)}$
و $-p-r \notin \alpha$ ومنه يوجد $t = p + \frac{r}{2}$ بحيث
أن $t > p$ و $-t - \frac{r}{2} = -p-r \notin \alpha$ وبالتالي $t \in \beta$
إذن β مقطع وبالتالـي $\beta \in \mathbb{R}$.

لنفرض الآن أن $x \in \alpha + \beta$. عند ئذ يوجد $r \in \alpha$ و $s \in \beta$
بحيث يكون $x = r + s$ ومنه $r \in \alpha$ و $-s \notin \alpha$ و
$x = r+s$ وبالتالي $r < -s$ و $x = r + s$. إذن $x < 0$
وهذا يعني أن $x \in 0^*$. وبذلك يكون $\alpha + \beta \subseteq 0^*$.
وبالعكس ، ليكن $v \in 0^*$ ولنضع $w = -\frac{v}{2}$ فيكون $w > 0$.
ولما كان $\alpha \neq \phi$ فإنه يوجد عدد منطق مثل p بحيث
$p \in \alpha$. وبحسب خاصة أرخميدس في Q يوجد عدد صحيح
موجب n_0 بحيث يكون $n_0 \cdot w > -p$ ، أيّ $(-n_0) \cdot w < p$

وبالتالي $(-n_0)\cdot w^* \in \alpha$ ولما كان $\alpha \neq Q$ فإنه يوجد عدد منطق موجب تماماً بحيث يكون $b \notin \alpha$ ومنه بحسب خاصة أرخميدس في Q يوجد عدد صحيح موجب n_1 بحيث يكون $n_1 \cdot w^* > b$ وبالتالي $n_1 \cdot w^* \in \alpha$ ومنه بفرض أن n عدد صحيح يكون لدينا الاقتضاء الصحيح $[n \geqslant n_1 \Longrightarrow n \cdot w^* \notin \alpha]$ الذي يؤدي إلى الاقتضاء الصحيح التالي : $[n \cdot w^* \in \alpha \Longrightarrow n < n_1]$

ثم لنأخذ المجموعة $H = \{n : n \in \mathbb{Z}$ و $n \cdot w^* \in \alpha$ و $-n_0 \leqslant n\}$

فنجد أنها غير خالية (لأن $-n_0 \in H$)

وأنها منتهية لأنها محدودة من الأعلى بـ n_1 ومن الأدنى بـ $-n_0$.

لذا فإنه يوجد فيها عنصر أكبر وليكن m_0 . وبالتالي $m_0 \cdot w^* \in \alpha$.

وبما أن $m_0 + 1$ لاينتمي الى H فإن $(m_0 + 1)\cdot w^* \notin \alpha$.

وبذلك يمكننا أن نقول بأنه يوجد عدد صحيح n بحيث أن $n \cdot w^* \in \alpha$ و $(n+1)\cdot w^* \notin \alpha$ ومنه ، بفرض :

$p = -(n+2)\,w^*$ ، نستنتج أن $p \in \beta$ [باعتبار أن $-p - w^* \notin \alpha$]

وأن $v = n \cdot w^* + p \in \alpha + \beta$ ، وبذلك

يكون $0^* \subseteq \alpha + \beta$.

إذن $\alpha + \beta = 0^*$

هذا ويسمى المقطع β المبيّن في (A_5) بنظير المقطع α

بالنسبة لجمع المقاطع، ولذلك يرمز له عادة بالرمز $-\alpha$.

نتيجة : لكل مقطع نظير وحيد بالنسبة لجمع المقاطع وهذا النظير هو مقطع طبعاً .

الخطوة الخامسة :

بعد أن برهنا على أن الجمع المعرّف في الخطوة الرابعة يحقق الموضوعات (A) المذكورة في التعريف ١ ـ ١٢ يمكننا أن نقول بأن المبرهنة ١ ـ ١٤ تكون صحيحة في $\mathbb{R}$ ويمكننا أن نبرهن على صحة (١) المذكور في التعريف ١ ـ ١٧ كما يلي :

اذا كان $\gamma \in \mathbb{R}$ و β و α واذا كان $\beta \leqslant \gamma$ فإن $\beta \subseteq \gamma$.
وبالتالي $\alpha + \beta \subseteq \alpha + \gamma$ استناداً الى تعريف جمع المقاطع (المعرف على $\mathbb{R}$) .

إذن $\alpha + \beta \leqslant \alpha + \gamma$

ومنه نستنتج أنه اذا كان $\gamma \in \mathbb{R}$ و β و α و $\beta < \gamma$ فإنّ $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. [وكان من الممكن استنتاج هذا مباشرة بملاحظة أن الفرضيات تقتضي أن يكون $\alpha + \beta \subseteq \alpha + \gamma$ ، ثم بملاحظة أن $\alpha + \beta \neq \alpha + \gamma$ لأنه لو كان $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ لكان بحسب قانون الاختصار (انظر المبرهنة ١ ـ ١٤) $\beta = \gamma$ وهذا مخالف للفرض] .

وكذلك يمكننا أن نستنتج مايلي :

» $-\alpha < 0^{*}$ اذا وفقط اذا $\alpha > 0^{*}$ « .

الخطوة السادسة :

إن دراسة ضرب المقاطع قد تكون مضجرة نوعاً مالأن حاصل ضرب أيّ عددين منطقين سالبين يكون موجباً . ولهذا السبب سنبدأ أولاً بدراسة $\mathbb{R}^{(+)}$ التي هي مجموعة كل العناصر α من $\mathbb{R}$ بحيث أن $\alpha > 0^{*}$ ؛ إذا كان $\alpha \in \mathbb{R}^{(+)}$ و $\beta \in \mathbb{R}^{(+)}$ فإننا نعرّف حاصل الضرب $\alpha \cdot \beta$ للمقطعين الموجبين α و β بأنه مجموعة الأعداد المنطقة التي من أجل كل منها p يوجد عددان منطقان موجبان r و s أحدهما r ينتمي إلى α والآخر s ينتمي الى β بحيث يكون $p \leq r \cdot s$ ، أي :

$$\alpha \cdot \beta = \{ p / p \in \mathbb{Q} , \exists r \in \alpha \cap \mathbb{Q}^{(+)} , \exists s \in \beta \cap \mathbb{Q}^{(+)} : p \leq r \cdot s \}$$

[وتجدر الاشارة الى أن r و s غير ثابتين (في الحالة العامة) من أجل جميع عناصر $\alpha \cdot \beta$] . عندئذ تتحقق الموضوعات (M) و (D) المذكورة في التعريف ١ ـ ١٢ بعد وضع $\mathbb{R}^{(+)}$ بدلاً من F ووضع 1^{*} بدلاً من 1 .

بما أن براهين هذه القضايا مماثلة للبراهين المذكورة بالتفصيل في الخطوة الرابعة فإننا لن نكتب هذه البراهين .

ونلاحظ بشكل خاص أن حاصل ضرب أيّ مقطعين موجبين هو مقطع موجب ، أيْ : إذا كان $\alpha > 0^{\#}$ و $\beta > 0^{\#}$ فإن $\alpha \cdot \beta > 0^{\#}$.

الخطوه السابعة :

لكي نتمم تعريف الضرب نضع $0^{\#} = \alpha \cdot 0^{\#} = 0^{\#} \cdot \alpha$

من أجل كل مقطع α ، ونضع أيضاً :

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} (-\alpha) \cdot (-\beta) & (\text{عندما } \beta < 0^{\#} \text{ و } \alpha < 0^{\#}) \\ -[(-\alpha) \cdot \beta] & (\text{عندما } \beta > 0^{\#} \text{ و } \alpha < 0^{\#}) \\ -[\alpha \cdot (-\beta)] & (\text{عندما } \beta < 0^{\#} \text{ و } \alpha > 0^{\#}) \end{cases}$$

((إن الجداءات المذكورة في الطرف الأيمن معرّفة في الخطوة السادسة)) .

نلاحظ أنه بعد أن نكون قد برهنا (في الخطوة السادسة) على تحقق الموضوعات (M) في $\mathbb{R}^{(+)}$ يمكننا أن نبرهن على تحقق هذه الموضوعات في $\mathbb{R}$ باستخدام المطابقة $\gamma = -(-\gamma)$

التي هي جزء من المبرهنة ١ ـ ١٤ (انظر الخطوة الخامسة) .

وبذلك يكون لدينا مايلي :

(1) أياً كان المقطعان α و β فإنّ $\alpha \cdot \beta$ يكون مقطعاً .

(2) قانون ضرب المقاطع تبادلي وتجميعي ، أيْ :

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ و $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ وذلك من أجل أية مقاطع γ و β و α .

٣) $1^{*} \cdot \alpha = \alpha \cdot 1^{*} = \alpha$ وذلك من أجل كل مقطع α

٤) إذا كان α مقطعاً غير مساوٍ للمقطع 0^{*} فإنه يوجد مقطع β بحيث يكون : $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1^{*}$

٥) اذا كان α و β مقطعين بحيث أن $\alpha \geq 0^{*}$ و $\beta \geq 0^{*}$ ، فإنه يكون : $\alpha \cdot \beta \geq 0^{*}$.

أما البرهان على صحة القانون التوزيعي $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ فيتم بتمييز عدة حالات . فمثلاً ، ليكن $\alpha > 0^{*}$ و $\beta < 0^{*}$ و $\beta + \gamma > 0^{*}$. عندئذ يكون :

$\gamma = (\beta + \gamma) + (-\beta) > 0^{*}$ (برهن هذا ؟) .

وبما أن القانون التوزيعي محقق في $\mathbb{R}^{(+)}$ فإنّ :

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot (-\beta)$$

ولما كان $\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta)$ فإنّ $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ ويمكن التحقق من صحة القانون التوزيعي في بقية الحالات بطريقة مماثلة .

وبالاضافة الى ذلك فإن البرهان على صحة (٢) المذكور في التعريف (١ ـ ١٧) يتم بسهولة وبذلك نكون قد برهنا حتى الآن على أن $\mathbb{R}$ هي حقل مرتب يتمتع بخاصة أصغر حد أعلى .

<u>الخطوة الثامنة</u> : لنربط بكل عدد منطق r المجموعة :

$$r^* = \{ p : p \in Q \text{ و } p < r \}$$

فنجد أن r^* مقطع ، وبالتالي $r^* \in \Re$ وهذا المقطع هو مقطع منطق للأسباب التاليـــة :

(I) إن العدد المنطق ($r - 1$) ينتمي الى r^* مما يدل على أن $r^* \neq \phi$ ، وكذلك فإن $r \notin r^*$ مما يبرهن أن $r^* \neq Q$.

(II) اذا كان $p \in r^*$ و $q \in Q$ و $q < p$ فإن : $q < p < r$ وبالتالي $q \in r^*$.

(III) اذا كان $p \in r^*$ فإن $p < r$ وبالتالي $p < \frac{p+r}{2} < r$ ومنه $\frac{p+r}{2} \in r^*$ و $\frac{p+r}{2} > p$.

إذن r^* مقطع .

ثم بما أن $r \notin r^*$ وأن المتباينة $p < r$ تؤدى إلى أن $p \in r^*$. فإنّ r يكون العنصر الأصغري في مجموعة الأعداد العليا للمقطع r^* .

إذن فالمقطع r^* هو مقطع منطق .

ويسمى r^* عادة بالمقطع المنطق المرتبط بالعدد المنطق r .

ونجد أيضاً أن المقاطع المنطقة تحقق القضايا الصحيحة التاليـة :

(أ) $r^* + s^* = (r + s)^*$

(ب) $r^* \cdot s^* = (r \cdot s)^*$

حيث أن الأعداد غير منطقية r و s .

(ج) $r^* < s^*$ اذا وفقط اذا $r < s$ ⎫ من أجل كل عددين منطقيين
(د) $r^* \leqslant s^*$ اذا وفقط اذا $r \leqslant s$ ⎭ r و s

ولبرهان القضية (آ) نأخذ $p \in r^* + s^*$ فنجد أن $p = u + v$ ،
حيث $u < r$ و $v < s$ ، ومنه $p < r + s$ مما يدل على أن $p \in (r + s)^*$. وبالعكس ليكن $p \in (r + s)^*$.
عندئذ يكون $p < r + s$. ثم لنفرض أن $2t = r + s - p$
ولنضع $r' = r - t$ و $s' = s - t$ فنجد أن $r' \in r^*$ و $s' \in s^*$
وأن $p = r' + s'$ وبالتالي $p \in r^* + s^*$.

أما القضية (ب) فتبرهن بطريقة مماثلة .

ولبرهان القضية (ح) نفرض أن $r < s$. عندئذ يكون $r \in s^*$.
وبملاحظة أن $r \notin r^*$ نستنتج أن $r^* < s^*$.
وبالعكس ، اذا كان $r^* < s^*$ فإنه يوجد p بحيث يكون $p \in s^*$ و $p \notin r^*$ ومنه $r \leqslant p < s$ وبالتالي $r < s$.

أما القضية (د) فتستنتج من القضية (ح) مباشرة .

الخطوة التاسعة :

لنرمز بـ Q^* لمجموعة كل المقاطع المنطقة . نعرّف الإيزومورفيزم (التشاكل التقابلي) بين حقلين مرتبين F و F' بأنه تقابل مثل

$\varphi : F \longrightarrow F'$ بحيث تكون صورة مجموع أيّ عنصرين من F تساوى مجموع صورتيهما ، وصورة جداء أيّ عنصرين من F تساوي جداء صورتيهما ، ويحافظ على الترتيب ، أيّ :

اذا كان x و y عنصرين من F فإنّ $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$ وإنّ $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$ وإنّ : $[\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ اذا وفقط اذا $x \leqslant y]$.

ويتميز الإيزومور فيزم بأنه يحافظ على الخواص أيّ أن الحقلين المرتبين اللذين يوجد بينهما ايزومور فيزم تكون لهما خواص متشابهه .

يمكننا استناداً إلى الخطوة الثامنة أن نقول بأنه يوجد أيزومور فيز م $[\varphi : Q \longrightarrow Q^{*}$ بين حقل الأعداد المنطقة المرتب Q وحقل المقاطع المنطقة المرتب $Q^{*}]$ معرّف بالصيغة التاليـــة :

$\varphi(r) = r^{*}$ من أجل كل r من Q .

وهذا يسمح لنا أن نطابق بين المقطع المنطق r^{*} ، الذى هو عدد حقيقي منطق ، وبين العدد المنطق r .

وبالطبع فإنّ هذا لا يعني أن r^{*} هو نفس r ، إلاّ أن خواصهما متشابهة في الحقلين Q^{*} و Q على الترتيب ، وهذه المطابقة بين Q و Q^{*} تسمح لنا أن نعتبر Q حقلاً جزئياً في $\mathbb{R}$.

وبهذا نكون قد أثبتنا على صحة الطلب الأخير من المبرهنة (١ــ١٩) الذي يجب أن يُفسَّر بأن الحقل المرتب Q إيزومورفيّ للحقل المرتب $Q^{\#}$ [أيّ: Q يشاكل $Q^{\#}$]، وبالتالي فإنّ Q تطابق $Q^{\#}$ المحتواة في $\mathbb{R}$ وفقاً لما شرحنا أعلاه.

وهناك حقيقة (نريد ذكرها دون برهان) تنص على مايلي:

"إن كل حقلين مرتبين متمتعين بخاصة أصغر حد أعلى يكونان إيزومورفيين (أيّ يوجد بينهما ايزومورفيزم)". وأخيراً تجدر الاشارة الى أن تمديد (توسيع) مجموعة الأعداد الحقيقية المذكور في ١ ــ ٢٢ قد تم بإضافة رمزين جديدين $+\infty$ و $-\infty$ يحققان موضوعات معينة. إلاّ أنه كان من الممكن بناء $\mathbb{R}$ مباشرة بأن نعرّف المقطع بأنه مجموعة أعداد منطقة تحقق الشرطين (II) و (III) فقط [من شروط تعريف مقطع ديدكند المذكور سابقاً]، وعندها يكون $\phi = -\infty$ و $Q = +\infty$.

ملاحظـــة :

يوجد تقابل (تطبيق متباين وغامر) بين عناصر $\mathbb{R}$ ونقاط محور (السينات) ولذلك فإن قولنا ((العدد الحقيقي x محصور بين العددين الحقيقيين y و z)) يكافئ قولنا ((النقطة x تقع بين النقطتين y و z)).

ملاحظة أخرى :

سنعتبر أن $\mathbb{R} = \mathbb{R}^{(-)} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^{(+)}$ ، حيث $\mathbb{R}^{(-)}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة (تماماً) و $\mathbb{R}^{(+)}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (تماماً) •

ومنه فالمجموعات $\mathbb{R}^{(-)}$ و $\{0\}$ و $\mathbb{R}^{(+)}$ غير متقاطعة مثنى مثنى ،

كما ونستعمل ، كالعادة ، الرمز $\mathbb{R}^{\neq}$ لكي نعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر ، أي $\mathbb{R}^{\neq} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ •

تمارين

١ ـ أثبت أن $\sqrt{3} \notin Q$.

٢ ـ أثبت أنه لا يوجد عدد منطق p بحيث يكون $p^3 = 2$.

٣ ـ أثبت أنه لا يوجد عدد منطق q بحيث أن $q^3 = 3$.

٤ ـ أثبت أنه لا يوجد عدد منطق x بحيث أن $x^2 = 12$.

٥ ـ برهن على أن كلاً من المجموعتين الآتيتين تكون مقطعاً أصماً :

$$\alpha = \{x : x \in Q , x^3 < 2\}$$

$$\beta = \{x : x \in Q , x^3 < 3\}$$

٦ ـ ليكن r عدداً حقيقياً منطقاً مغايراً للصفر . وليكن x عدداً حقيقياً أصماً . أثبت أن كلاً من العددين الحقيقيين $x + r$ و $x . r$ يكون أصماً . ثم اضرب أمثلة تدل على أنه إذا كان α و β عددين حقيقيين أصمين فإنه ليس من الضروري أن يكون كل من العددين الحقيقيين $\alpha + \beta$ و $\alpha . \beta$ أصماً .

٧ ـ برهن على صحة القضية التالية :

((بين كل عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد حقيقي أصم [واحد على الأقل]))

٨ ـ برهن على أنه إذا كان p عدداً منطقاً فإنّ $\left[(p)^*\right] = -\left[(-p)^*\right]$.

٩ ـ برهن على أن حاصل جمع أيّ مقطعين موجبين هو مقطع موجب .

١٠ ـ ليكن α مقطعاً ما . أثبت أن :

$p \in \alpha$ اذا وفقط اذا $p^{\#} < \alpha$

١١ ـ ليكن α و β مقطعين بحيث أن $\alpha < \beta$. أثبت أنه يوجد مقطع منطق $r^{\#}$ بحيث يكون $\alpha < r^{\#} < \beta$.

١٢ ـ نعرّف القيمة المطلقة للمقطع الاختياري α بأنها المقطع

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & (\text{عندما } \alpha \geq 0^{\#}) \\ -\alpha & (\text{عندما } \alpha < 0^{\#}) \end{cases}$$

أثبت أن $|\alpha| \geq 0^{\#}$ ثم برهن على أن :

$|\alpha| = 0^{\#}$ اذا وفقط اذا $\alpha = 0^{\#}$

ثم برهن على أنه اذا كان p عدداً منطقاً فإن $(|p|)^{\#} = |p^{\#}|$

ثم تحقق من صحة الخواص الآتية للقيمة المطلقة للعدد الحقيقي

(باعتبار ان المقطع هو عدد حقيقي) :

بفرض أن x و y و α أعداد حقيقية اختيارية فإنّ :

$|x| = |-x|$ و $-|x| \leq x \leq |x|$ و $|x| = \sqrt{x^2}$

$$|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$$

$$|x| < \alpha \iff -\alpha < x < \alpha$$

$$|x| \geq \alpha \Longleftrightarrow x \geq \alpha$$ أو $$x \leqslant -\alpha$$

$$|x| > \alpha \Longleftrightarrow x > \alpha$$ أو $$x < -\alpha$$

$$||x|-|y|| \leqslant |x \mp y| \leqslant |x| + |y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$ و $$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$ [بشرط $(y \neq 0)$]

$$|x^n| = |x|^n$$

$[|x+y| = |x|+|y|] \Longleftrightarrow [x$ و y من اشارة واحدة$]$

$[|x-y| = |x|-|y|] \Longleftrightarrow [x$ و y من اشارة واحدة و $|x| \geqslant |y|]$

١٣ — ليكن لدينا المقطع α والعدد المنطق الموجب تماماً ٢ .

أثبت أنه يوجد عددان منطقان p و q بحيث يكون $p \in \alpha$ و $q \notin \alpha$ و q ليس العدد الأصغري بين الأعداد العليا للمقطع α و $q - p = 2$.

١٤ — تحقق من صحة كل نص لم نكتب اثباته في البحث النظرى ، كالمبرهنة (١ — ١٥) مثلاً .

١٥ — إذا كانت لدينا المقاطع α و β و γ بحيث أن $\alpha < \beta$ و $\gamma > 0^{\#}$ فأثبت أن $\beta \cdot \gamma < \alpha \cdot \gamma$.

١٦ — لتكن E مجموعة جزئية غير خالية في المجموعة المرتبة S .

ولنفرض أن α هو حد أدنى لـ E (في S) و β هو

حد أعلى لـ E (في S) ، أثبت أن $\alpha \leqslant \beta$.

١٧ ــ برهن على أنه لكي تكون المجموعة الجزئية X' محدودة (في $\mathbb{R}$)
يلزم ويكفي أن يوجد عدد صحيح n بحيث يكون $|x| \leqslant n$
من أجل كل x من X .

١٨ ــ لتكن A و B مجموعتين (من الأعداد الحقيقية) محدودتين
(في $\mathbb{R}$) وغير خاليتين بحيث أن $a \leqslant b$ من أجل كل
عدد a من A وكل عدد b من B . والمطلوب :
ناقش صحة كل من المتباينتين التاليتين :

$$\sup A \leqslant \sup B \quad \text{و} \quad \inf A \leqslant \inf B$$

١٩ ــ لتكن لدينا المجموعتان غير الخاليتين X و X' من الأعداد
الحقيقية المرتبطتان بالشرط التالي : $(x \in X \Leftrightarrow -x \in X')$.
ولنفرض أن X محدودة (في $\mathbb{R}$) .
برهن على أن : ١ ــ X' محدودة (في $\mathbb{R}$) .
٢ ــ $\inf X' = -\sup X$.
٣ ــ $\sup X' = -\inf X$.

٢٠ ــ لتكن لدينا المجموعتان المحدودتان (في $\mathbb{R}$) وغير الخاليتين
X و X' من الأعداد الحقيقية . ولنأخذ المجموعتين :

$$Y = \{x + x' : x \in X, x' \in X'\} \ , \ Z = \{x \cdot x' : x \in X , x' \in X'\}$$

والمطلـــــــــوب :

أً — أثبت أن : $\sup Y = \sup X + \sup X'$.

٢ً — أثبت أن : $\inf Y = \inf X + \inf X'$.

٣ً — إذا فرضنا أن كل عنصر من عناصر المجموعة $X \cup X'$ هو عـــدد حقيقي غير ســالب فأثبت صحة كل مما يلـــي :

$\sup Z = (\sup X) \cdot (\sup X')$ و

$\inf Z = (\inf X) \cdot (\inf X')$

٢١ — ليكن b عدداً حقيقياً أكبر من الواحد و r عدداً منطقاً غير صحيح (أيْ : $r = \frac{m}{n}$ حيث $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ و $m \in \mathbb{Z}^*$ و m لا يقبل القسمة على n) .

والمطلـــــــــوب :

أً — إذا كان r عدداً منطقاً غير صحيح وإذا كان $\left[= \frac{p}{q} \right.$ $\left. r = \frac{m}{n} \right] =$ فأثبت أن : $(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}$

[وهكذا يمكننا أن نضع بالتعريف : $b^r = (b^m)^{1/n} = \sqrt[n]{b^m}$]

ثم أثبت أن $b^r = (\sqrt[n]{b})^m$

٢ً — أثبت أن $b^{r+s} = b^r \cdot b^s$ من أجل كل عددين منطقين r و s .

٣ً — اثبت أن $b^p < b^q$ من أجل كل عددين منطقين p و q مرتبطين

بالمتباينة $p < q$.

٤ — اذا كان x عدداً حقيقياً فإننا نعرّف المجموعة $B(x)$ بأنها مجموعة كل الأعداد الحقيقية ذات الشكل b^t ، حيث t عدد منطق و $t \leq x$.

برهن على أنه اذا كان r عدداً منطقاً فإن :

$$b^r = \sup B(r)$$

[ولذلك يمكننا أن نضع بالتعريف $b^x = \sup B(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x] .

٥ — برهن على أن $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$ من أجل كل عددين حقيقيين x و y .

٢٢ — لتكن لدينا المجموعة $B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^*, m < n \right\}$

والمطلوب :

١ — أثبت أنه لا يوجد في B عنصر أصغري .

٢ — أثبت أنه لا يوجد في B عنصر أعظمي (أكبر) .

٣ — أوجد $\inf B$ و $\sup B$.

٢٣ — لتكن A و B مجموعتين من المقاطع بحيث أن :

آ — $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$

ب — $A \cap B = \phi$

جـ ـ إن كل مقطع إما أن ينتمي إلى A أو أن ينتمي الى B

د ـ اذا كان $\alpha \in A$ و $\beta \in B$ فإن $\alpha < \beta$

ولنأخذ المجموعة $\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. والمطلوب :

أ ـ أثبت أنّ γ مقطع

٢ ـ أثبت أنّ $\alpha \leq \gamma$ من أجل كل α من A ، وأنّ $\gamma \leq \beta$.

من أجل كل β من B ، وأنّ γ هو المقطع الوحيد الذي يحقق ذلـــــك .

٣ ـ برهن على أنه إما أن يوجد في A عنصر أعظمي (أكبر) أو أن يوجد في B عنصر أصغري .

٢٤ ـ لتكن H مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية بحيث أن H محدودة من الأعلى (في $\mathbb{R}$) . ولنأخذ المجموعـــة .

$$A = \{\alpha / \alpha \in \mathbb{R},\ \exists x \in H ; \alpha < x\}$$

ولتكن $B = \mathbb{R} \setminus A = \{\beta : \beta \in \mathbb{R},\ \beta \notin A\}$. والمطلـوب :

١ ـ برهن أن المجموعتين A و B تحققان الشروط (أ) و (ب) و (جـ) و (د) المذكورة في المسألة (٢٣) [باعتبار أن العدد الحقيقي هو مقطـــع] .

٢ ـ أثبت أنه لا يوجد في A عدد أعظمي (أكبر) واستنتج أنه يوجـد في B عنصر أصغـــــرى .

٢٣ ـ أثبت أنه لا يمكن لأيّ عنصر من عناصر A أن يكون حداً أعلى ل H (في $\mathbb{R}$)

٢٤ ـ أثبت أن كل عنصر من عناصر B يكون حداً أعلى ل H (في $\mathbb{R}$)

ثم استنتج أن العنصر الأصغري في B ليس إلا $\sup H$.

٢٥ ـ ليكن α مقطعاً ما . برهن على صحة القضايا التالية :

١ ـ إذا كان المقطع α موجباً ، أيّ $\alpha > 0^*$ ، وإذا كان r عدداً منطقاً بحيث أن $0 < r < 1$ فإنه يوجد عددان منطقان p و q بحيث يكون $p \in \alpha$ و $q \notin \alpha$ و q ليس العدد الأصغري بين الأعداد العليا للمقطع α و $r = p \cdot q^{-1}$.

٢ ـ إذا كان المقطع α موجباً ، فإنه يوجد مقطع موجب واحد فقط β بحيث يكون $\alpha \cdot \beta = 1^*$.

٣ ـ إذا كان المقطع α سالباً ، أيّ $\alpha < 0^*$ ، فإنه يوجد مقطع سالب واحد فقط β بحيث يكون $\alpha \cdot \beta = 1^*$.

٤ ـ اذا كان المقطع α غير مساو للقطع 0^* ، أيّ : $\alpha \neq 0^*$ ، فإنه يوجد مقطع واحد فقط β بحيث يكون $\beta \neq 0^*$ و $\alpha \cdot \beta = 1^*$.

٥ ـ اذا كان المقطع α غير مساوٍ للقطع 0^* فإنـــــه

(من أجل كل مقطع β) يوجد مقطع واحد فقط γ بحيث يكون $\alpha \cdot \gamma = \beta$.

٢٦ — ليكن b عدداً حقيقياً أكبر من الواحد و y عدداً حقيقياً موجباً تماماً . برهن على أنه يوجد عدد حقيقي واحد فقط x بحيث يكون $y = b^x$. (يسمى هذا العدد x بلوغاريتم y ذي الأساس b ، أيّ : $x = \log_b y$) .

ولانجاز البرهان اتبع الخطوات التاليـــة :

آ — اثبت أنه من أجل كل عدد صحيح موجب n يكون :

$$b^n - 1 \geqslant n(b-1)$$

ب — استنتج أن : $b - 1 \geqslant n(b^{1/n} - 1)$

ج — اذا كان t عدداً حقيقياً أكبر من الواحد و $n > \dfrac{b-1}{t-1}$ فاثبــــت أن $b^{1/n} < t$.

د — إذا كان w عدداً حقيقياً بحيث أن $b^w < y$ فأثبت أن $b^{w+\frac{1}{n}} < y$ من أجل قيمة كبيرة بقدر كافٍ لـ n . [(للحصول على هذا طبق (ج) آخذاً $t = y \cdot b^{-w}$) وآخذاً بعين الاعتبار المسألة (١ج)] .

هـ - إذا كان $b^w > y$ فأثبت أن $b^{w-\frac{1}{n}} > y$ من أجل قيمة كبيرة بقدر كافٍ لـ n .

و - لتكن A مجموعة الأعداد الحقيقية w بحيث أن $b^w < y$. عندئذ برهن على أن العدد $x = \sup A$ يحقق المساواة $b^x = y$ ، ثم أثبت أن هذا العدد الحقيقي x وحيد .

الفصل الثاني

المتتاليات (المتواليات) العددية الحقيقية اللانهائية وحقل الأعداد الحقيقية (طبولوجياً)

٢-١- تعريف :

المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية هي تطبيق منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathcal{N}$ (أو أيّ مجموعة جزئية غير منتهية من $\mathcal{N}$) ومستقره مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

إذن، إذا وضعنا مقابل كل عدد طبيعي n عدداً حقيقياً x_n فإننا نحصل على مجموعة من الأعداد الحقيقية

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\ldots$$

المرقمة بواسطة الأعداد الطبيعية، ونتيجة ذلك، نقول بأنه لدينا المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots\ldots$$

وسوف ندعو الأعداد التي تؤلف هذه المتتالية بـ «حدود المتتالية» وندعو الحد x_n بـ «الحد العام» لهذه المتتالية. وسوف نكتب المتتالية بشكل

مختصر باستخدام حدها العام على النحو التالي : $\{x_n\}$.

وسوف نصطلح على أن منطلق المتتالية العددية هو المجموعة :

$N^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ، اذن ، عندما نقول : [لدينا المتتالية العددية $\{x_n\}$] فإن هذا يعني أنه [لدينا المتتاليةالعددية الحقيقية اللانهائية التي حدها العام x_n ، حيث $n \in N^*$ ،

أي :لدينا المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية .

$$\left[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\ldots\ldots \right.$$

إذاً لانقصد بالرمز $\{x_n\}$ مجموعة وحيدة العنصر x_n إلا إذا ذكرنا ذلك بشكل واضح .ينتج مما سبق أن الاكثر أهمية في المتتالية العددية اللانهائية هو معرفة (من أجل كل n) أن العدد x_{n+1} يلي العدد x_n وأن العدد x_n يسبق العدد x_{n+1} وذلك بغض النظر عن قيمتي x_{n+1} و x_n إذْ من الممكن أن تكون قيمة x_{n+1} أكبر أو أصغر أو تساوي قيمة x_n . ولذلك ،إذا غيّرنا ترتيب حدود متتالية ما فإننا نحصل في الحالة العامه على متتالية أخرى جديدة تختلف عن المتتالية الأُصلية على الرغم من أنهما تتألفان من نفس الأعداد .

مثال (١) : إن الحد العام x_n للمتتالية العددية اللانهائية

$x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$ هو $0, 1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{3}, \ldots\ldots$

ونلاحظ أن $x_1 = x_3 = x_5 = \cdots\cdots = 0$ ؛

بينما $x_1 \neq x_2$ و $x_2 \neq x_3$ ، $x_4 \neq x_5$ (مثلاً) ،

مثـــال (٢) ـ :

الحد العام للمتتالية العددية الحقيقية اللانهائية ؛

$a, b, a, b, a, b, \ldots, \ldots$ هو :

$$x_n = \frac{1}{2}\left[(b+a) + (-1)^n \cdot (b-a)\right]$$

وللوصول الى هذه النتيجة نستعين بالصيغة التاليـــة :

$$x_n = \begin{cases} a & (\text{عندما يكون } n \text{ فردياً}) \\ b & (\text{عندما يكون } n \text{ زوجياً}) \end{cases}$$

مثـــال (٣) :

لتكن لدينا المتتالية العددية $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$ ، عندئذ يكـــو ن $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ويمكننا أن نكتب هذه المتتالية بالشـــكل المفصل التالـــــي :

$$x_1 = \frac{1}{2} ، x_2 = \frac{2}{3} ، x_3 = \frac{3}{4} ، \ldots ، x_n = \frac{n}{n+1} ، \ldots\ldots$$

أو بعبارة أخرى ، تكون هذه المتتالية هي المتتالية العددية

$$\frac{1}{2} ، \frac{2}{3} ، \frac{3}{4} ، \ldots\ldots ، \frac{n}{n+1} ، \ldots\ldots$$

مثـــال ٤ ـ :

المتتاليتان العدديتان الحقيقيتان اللانهائيتان :

$2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10 ، 12 ، \ldots ، 2n ، 2n+2 ، \ldots$

و $\ldots , 2n , 2n+2 , \ldots , 10 , 12 , 6 , 8 , 2 , 4$ هما متتاليتان مختلفتان على الرغم من أنهما تتألفان من نفس الأعداد •

٢ ـ ٢ ـ المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية المحدودة :

تعرّف مجموعة قيم المتتالية العددية $\{x_n\}$ بأنها مجموعة كل القيم العددية المختلفة لجميع حدود هذه المتتالية •

ومنه نستنتج أن مجموعة قيم أية متتالية عددية حقيقية لا نهائية تكون ـ مجموعة إما منتهية وغير خالية أو غير منتهية ، وتكون إما محدودة أو غير محدودة . نقول عن المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية إنها محدودة إذا كانت مجموعة قيمها محدودة (في $\mathbb{R}$) •

ونقول إنها محدودة من الأعلى إذا كانت مجموعة قيمها محدودة من الأعلى • ونقول إنها محدودة من الأدنى إذا كانت مجموعة قيمها محدودة من الأدنى • ونقول إنها غير محدودة من الأعلى (الأدنى) إذا كانت مجموعة قيمها غير محدودة من الأعلى (الأدنى) • ونقول إنها غير محدودة إذا كانت مجموعة قيمها غير محدودة •

مثال (١) :

إن مجموعة قيم المتتالية العددية $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ هي المجموعة

$\left\{ \cdots\cdots ، \frac{1}{n+1} \text{ و } \frac{1}{n} \text{ و} \cdots\cdots \text{ و } \frac{1}{2} \text{ و } 1 \right\}$ التي

نلاحظ أنها عبارة عن مجموعة محدودة وغير منتهية ، وبالتالي يمكننا أن نقول بأن المتتالية $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ هي متتالية عددية حقيقية لانهائية محدودة .

مثـــــال (٢) :

إن مجموعة قيم المتتالية العددية $\left\{ n^2 \right\}$ هي المجموعة :

$\left\{ \cdots \text{ و } (n+1)^2 \text{ و } n^2 \text{ و } \cdots\cdots \text{ و } 2^2 \text{ و } 1^2 \right\}$ التي نلاحظ أنها عبارة عن مجموعة غير محدودة من الأعلى وغير منتهية ، وبالتالـــي يمكننا أن نقول بأن المتتالية $\left\{ n^2 \right\}$ غير محدودة من الأعلى ، ولكنها محدودة من الأدنى . ومنه فالمتتالية $\left\{ n^2 \right\}$ غير محدودة .

مثـــــال (٣) :

إن مجموعة قيم المتتالية العددية $\left\{ (-1)^n \right\}$ هي المجموعة

$\left\{ +1 \text{ و } -1 \right\}$ التي نلاحظ أنها عبارة عن مجموعة محدودة ومنتهية ، وبالتالي يمكننا أن نقول بأن المتتالية $\left\{ (-1)^n \right\}$ محـــــدودة .

مثـــــال (٤) :

إن مجموعة قيم المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية :

.... و 2 و 2 و 2 هي المجموعة $\{2\}$ التي نلاحظ أنها عبارة عن مجموعة محدودة ومنتهية ومؤلفة من عنصر واحد ألا وهو العدد 2 . ومنه يمكننا أن نقول بأن هذه المتتالية محدودة .

ويمكننا أن نعرّف المتتالية العددية المحدودة بتعريف آخر مكافئ للتعريف السابق، حيث نقول عن المتتالية العددية $\{x_n\}$ إنها محدودة إذا كان يوجد عدد حقيقي موجب k ، $k \ni \mathbb{R}^{(+)}$ ، بحيث يكون $|x_n| < k$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

بالحقيقة ، إذا كان يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $|x_n| < k$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، فإنّ هذا يعني أنّ $-k < x_n < k$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، وبالتالي فإن العدد k يكون حداً أعلى لمجموعة قيم المتتالية $\{x_n\}$ والعدد $-k$ يكون حداً أدنى لها ، وبالتالي فإن مجموعة قيم المتتالية $\{x_n\}$ تكون محدودة من الأعلى ومن الأدنى (بآن واحد) وهذا يعني أنها محدودة .

وبالعكس ، إذا فرضنا أن مجموعة قيم المتتالية $\{x_n\}$ محدودة فإنها تكون محدودة من الأعلى ومن الأدنى، وهذا يعني أنه يوجد عددان حقيقيان k_1 و k_2 بحيث أنه $\forall n \ni \mathbb{N}^*$ فإنّ $x_n \leq k_1$ و $k_2 \leq x_n$. ثم بفرض أن :

$k = max(|k_1| , |k_2|) + 1$ نستنتج أن :

$-k < -|k_2| \leq k_2 \leq x_n \leq k_1 \leq |k_1| < k$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$. وهذا يعني أنه يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $-k < x_n < k$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ ، وبالتالي : $E\ k \ni \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكون $|x_n| < k$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ وبهذا يتم اثبات تكافؤ التعريفين .

ونلاحظ أنه في كل من المثالين (١) و (٣) السابقين يوجد العدد الحقيقي الموجب $k = 2$ بحيث يكون $|x_n| < 2$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ ، مما يدل على أن المتتالية العددية $\{ \frac{1}{n} \}$ محدودة وعلى أن المتتالية العددية $\{ (-1)^n \}$ محدودة . أما في المثال (٤) السابق فإنه يوجد العدد $K = 3$ بحيث يكون $|x_n| < 3$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$. مما يدل على أن المتتالية العددية ..... و 2 و 2 و 2 و 2 و 2 و 2 محدودة . أما في المثال (٢) فإنه لا يوجد أيّ عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $|x_n| < k$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$.

وهذا يعني أنه $\forall\ k \ni \mathbb{R}^{(+)}$ فإنه $E\ n \ni \mathcal{N}^*$ بحيث يكون $|x_n| > k$ مما يدل على أن المتتالية $\{ n^2 \}$ غير محدودة .

٢ ـ ٣ ـ المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية المتقاربة :

نقول عن العدد الحقيقي المحدود a إنه نهاية المتتاليـــة العددية $\{x_n\}$ ونكتب $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ أو $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ عندما وفقط عندما يتحقق مايلـــي :

« $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ فإنه $\exists\ N_\varepsilon \in \mathcal{N}^*$ بحيث يكون $|x_n - a| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_\varepsilon$ » .

ونقول عن المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية التي توجد لها نهاية بأنها متتالية متقاربة . وإذا كانت هذه النهاية تساوي a فإننا نقول عن هذه المتتالية بأنهـا متقاربة من a . وبشكل أدق ، لتكن $X \subseteq \mathbb{R}$ ولتكن $\{x_n\}$ متتالية عددية حقيقية لا نهائية جميع حدودها تنتمي إلى X . نقـول عن هذه المتتالية العددية $\{x_n\}$ إنها متقاربة في X اذا كانت نهايتها موجودة (ومحدودة) وتنتمي إلى X .

وبما أننا سندرس معظم الحالات (إن لم نقل كلها) ضمن الشـرط $X = \mathbb{R}$ فإنّ تعريف المتتالية المتقاربة (في $\mathbb{R}$) يمكننا أن نكتبه بالشكل التالـــي :

نقول عن المتتالية العددية $\{X_n\}$ إنها متقاربة (في $\mathbb{R}$) من العدد الحقيقي $a \in \mathbb{R}$ اذا وفقط اذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

أيّ إذا وفقط إذا تحقق مايلـــــي :

$$\forall \ \varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$$ فإنه $\exists \ N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون :

$$n \geq N_\varepsilon \implies |x_n - a| < \varepsilon$$ وتجدر الاشارة إلى أن العدد

الطبيعي N_ε يتغير في الحالة العامة بتغيير ε وبالتالي فهو

دالة (تابع) لـ ε . وسوف نصطلح على أن قولنا [المتتالية العددية

$\{x_n\}$ متقاربة في $\mathbb{R}$ من a] يكافئ قولنا [المتتالية العددية $\{x_n\}$ متقاربة من a] .

مثـــال (١) :

المتتالية العددية التي حدها العام $x_n = a$ ، بحيث a

عدد حقيقي محدود ، تكون متقاربة من a .

الحـــل :

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$. عندئذ يوجد $N = 1$ بحيث يكون

$$n \geq N = 1 \implies |x_n - a| = |a - a| = |0| = 0 < \varepsilon$$

مثـــال (٢) :

إن المتتالية العددية $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ متقاربة من 1 لأن :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in \mathbb{R}$$ للأسباب التاليـــة :

لنفرض $x_n = \frac{n}{n+1}$ وليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$. لما كان

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$ فإنه للبحث عن قيم n

التي تحقق المتباينة $|x_n - 1| < \varepsilon$ يكفي حل المتباينة $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

من أجل ذلك ، نلاحظ أن المتباينة الأخيرة تكافئ المتباينة $\frac{1}{\varepsilon} > n+1$ التي تكافئ المتباينة $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. ومنه يمكننا أن نأخذ بمثابة N_ε أصغر عدد طبيعي مغاير للصفر N بحيث يكون $N > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. إذن (من أجل العدد الحقيقي — الموجب ε) يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر N_ε بحيث $N_\varepsilon > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ بحيث يكون :

$$n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Longrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$$

أي بحيث

يكون : $|x_n - 1| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_\varepsilon$.

إذن : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

ملاحظـــــات :

١) — نلاحظ في المثال السابق (٢) أنه إذا كان $\varepsilon = 0{,}01$ فإن $N_\varepsilon = 100$ وإذا كان $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ، فإن $N_\varepsilon = 2$ ؛ وإذا كان $\varepsilon = 10$ فإنّ $N_\varepsilon = 1$ وهكذا. هذا يبيّن أن العدد الطبيعي N_ε يتغير ، في الحالة العامة ، بتغير ε .

٢) — في المثال السابق (٢) يمكننا أن نأخذ بمثابة N_ε أيّ عـدد طبيعي مغاير للصفر N بحيث يكون $N > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

٣) — إذا كانت $X = [0, 1[$ فإن المتتالية العددية $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ المذكورة في المثال السابق (٢) تكون غير متقاربة في X، وذلك لأن $1 \notin X$ ولأن النهاية تكون وحيدة إذا كانت موجودة [انظر المبرهنة (1) التي سنبرهن على صحتها بعد قليل].

مثـــال (٣):

المتتالية العددية $\{ (-1)^n \}$ غير متقاربة لأنه ليس لها نهاية.

الحـــل:

إن الشكل المفصل لهذه المتتالية العددية هو الشكل التالي:

$-1, +1, -1, +1, \ldots, (-1)^n, (-1)^{n+1}, \ldots\ldots$

حيث $x_n = (-1)^n$

لنفرض جدلاً أنه توجد لهذه المتتالية العددية $\{(-1)^n\}$ نهاية ولتكن $a \in \mathbb{R}$. عندئذ يوجد، من أجل كل عدد حقيقي موجب ε، وبالتالي من أجل العدد الحقيقي $\varepsilon = \frac{1}{2}$، عدد طبيعي مغاير للصفر N بحيث يكون $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ عندما $n > N$.

ولما كانت x_n تأخذ بصورة متعاقبة القيمتين 1 و -1 فإنه يجب أن يكون: $|1 - a| < \frac{1}{2}$ و $|(-1) - a| < \frac{1}{2}$

وذلك عندما $n \geqslant N$ ، ومنه ، بفرض $n \geqslant N$ ،

نجد أن : $2=|2|=|(1-a)-[(-1)-a]|\leq|1-a|+|(-1)-a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

وبالتالي : $2<1$ وهذا مستحيل .

إذن لا توجد للمتتالية $\{(-1)^n\}$ نهاية وبالتالي فهذه المتتالية غير متقاربة .

تعريف :

إذا كانت المتتالية العددية $\{x_n\}$ غير متقاربة فإننا نقول إنها متباعدة . وبناء على هذا التعريف يمكننا أن نقول بأن المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية المذكورة في المثال (٣) السابق هي متتالية متباعدة .

مبرهنة (١) :

إذا كانت المتتالية العددية $\{x_n\}$ متقاربة من العدد a ومن العدد b فإنّ $a=b$.

الاثبات :

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ عندئذ $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}^{(+)}$ ويوجد عددان طبيعيان مغايران للصفر N_1 و N_2 بحيث يكون :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: n \geqslant N_1 \Longrightarrow |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^{*}: n \geq N_2 \Longrightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه يوجد العدد الطبيعي $N = max (N_1 , N_2)$ بحيث يكون :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{*}: n \geq N \Longrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} , |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وبذلك نكون قد برهنا على صحة القضية التاليـــــة :

« $\forall \ \varepsilon \ni \mathbb{R}^{(+)}$ فإنه $N \in \ni \mathbb{N}^{*}$ بحيث يكون $|a - b| < \varepsilon$

عندما $n \geq N$ » وبناء على هذه القضية الصحيحة يمكننا أن

نستنتج أن $a = b$ كما يلـــي :

لو كان $a \neq b$ لكان $|a - b| > 0$ وبالتالي لكان يوجد $N \ni \mathbb{N}^{*}$

بحيث يكون $|a - b| < |a - b|$ (عندما $n \geq N$) وهذا غير

ممكـــــــن •

اذن $a = b$ وهو المطلوب اثباتـــــــه •

مبرهنـــــــة (٢) :

إن كل متتالية عددية متقاربة تكون محدودة •

الاثبـــــات :

لتكن $\{ x_n \}$ متتالية عددية متقاربة ، ولنفرض أن نهايتها

هي a • عند ئذ يوجد (من أجل العدد الحقيقي الموجب 1)

عدد طبيعي مغاير للصفر N بحيث يكون :

$$n \geq N \Longrightarrow |x_n - a| < 1$$

ومنه يوجد العدد الحقيقي الموجب ;

$K = max(1, |x_1 - a|, \dots, |x_{N-1} - a|) + 1$ بحيث يكون :

$|x_n - a| < K$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$.

ومنه $a - K < x_n < a + K$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ،

وهذا يعني أن مجموعة قيم المتتالية $\{x_n\}$ محدودة ، وبالتالي

فالمتتالية $\{x_n\}$ تكون محدودة .

ملاحظة :

ليس من الضروري أن تكون كلُّ متتاليةٍ محدودةٍ متتاليةً متقاربة .

فمثلاً ، المتتالية $\{(-1)^n\}$ هي متتالية محدودة ولكنها غير متقاربة ،

أيْ متباعدة .

مبرهنة (٢) :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية عددية . وليكن $N_0 \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}$.

ولنفرض أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون $y_n = x_{N_0+n-1}$. ولنأخذ

المتتالية العددية $\{y_n\}$ عندئذ :

١) ـ المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من a $\Longleftrightarrow$ المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة من a

٢) ـ المتتالية $\{x_n\}$ متباعدة $\Longleftrightarrow$ المتتالية $\{y_n\}$ متباعدة .

الاثبـــــات :

١) ـ لنفرض أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من a ، وليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ ،
عند ئذ يوجد $N_1 \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون :

$$n \geq N_1 \Longrightarrow | x_n - a | < \varepsilon$$

ثم لنفرض أن (N_1 , N_0) $N_2 = max$ عند ئذ يكون :

$$n \geq N_2 \Longrightarrow | x_n - a | < \varepsilon$$

ومنه بحسب تعريف y_n يمكننا أن نقول بأنه يوجد عدد طبيعي N' بحيث يكـــــون :

$$n \geq N' \Longrightarrow | y_n - a | < \varepsilon$$

إذن $\lim_{n \to \infty} y_n = a$ ، وهذا يعني أن المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة من a .

وبالعكس ، لنفرض أن المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة من a ، وليكـن $\varepsilon' \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، عند ئذ يوجد $N_3 \in \mathbb{N}$ بحيث يكون :

$$n \geq N_3 \Longrightarrow | y_n - a | < \varepsilon'$$

ومنه بحسب تعريف y_n يمكننا إيجاد عدد طبيعي N'' بحيث يكون :

$$n \geq N'' \Longrightarrow | x_n - a | < \varepsilon'$$

إذن $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ ، وهذا يعني أن المتتالية $\{x_n\}$ مقاربة مـــــــن a .

٢ً) ـ لتكن $\{x_n\}$ متباعدة • ولنفرض جدلاً أن $\{y_n\}$ متقاربة •
عند ئذ بحسب أً) تكون $\{x_n\}$ متقاربة وهذا غير صحيح •
إذن $\{y_n\}$ متباعدة .
وبالعكس ، لتكن $\{y_n\}$ متباعدة • ولنفرض
موقتاً أن $\{x_n\}$ متقاربة • عند ئذ بحسب أً) ،
تكون $\{y_n\}$ متقاربة وهذا غير ممكن • اذن $\{x_n\}$ متباعدة ؛
وبهذا يتم المطلوب اثباتـــه •

نتيجـــة :

إن حذف عدد محدود من الحدود الأولى لمتتالية عددية لا يوثر
على نوعها (من حيث كونها متقاربة أو متباعدة) •

تعريـــف :

إن الحد العام x_n للمتتالية العددية الحقيقية اللانهائية

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$$

هو ((متغير)) مجموعة قيمه هي مجموعة قيم هذه المتتالية العدديـــة
$\{x_n\}$ • ولهذا تدعى نهاية المتتالية العددية $\{x_n\}$
بـ ((نهاية المتغير x_n)) • وان الصيغة التي يعطى بواسطتهـــا
الحد العام x_n للمتتالية $\{x_n\}$ تسمى بـ ((عبارة الحد العـــام
للمتتالية $\{x_n\}$)) • وهذه العبارة بدورها تعيّن لنا المتغيـــر

x_n كدالة في n . فمثلاً ، $x_n = \frac{2^n}{2^n+1}$

يمكن النظر إليه كمتغير يأخذ بشكل متتابع القيم :

$\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$ و $\frac{8}{9}$ و $\frac{16}{17}$ و ...... و $\frac{2^n}{2^n+1}$ و ......

كما يمكن النظر إليه كعبارة للحد العام للمتتالية $\left\{\frac{2^n}{2^n+1}\right\}$

أو كحد عام لها .

إذن فالرمز $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ يمكن اعتباره نهاية للمتغير x_n ويمكن اعتباره نهاية للمتتالية $\{x_n\}$. ومنه يكون المتغير x_n متقارباً من a اذا وفقط اذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من a .

وكذلك فإنّ المتغير x_n يكون محدوداً عندما وفقط عندما تكون المتتالية $\{x_n\}$ محدودة . هذا وتوجد متغيرات x تتغير بدون قفزات وبالتالي تكون مستمرة أيّ تأخذ جميع القيم العددية المحصورة بين كل قيمتين من قيمها أثناء انتقالها من قيمة لأخرى . ولذلك فهي تختلف عن المتغيرات x_n . وكمثال على هذه المتغيرات x يمكن أن نأخذ سرعة قطار متحرك ، أو الطريق المقطوع من قبل سيارة .... الخ .

وبالاضافة إلى ما رأيناه توجد طرق أخرى لتعريف المتتالية العددية ، منها الطريقة التدريجية التي يمكن أن نبينها في المثال التالي :

مثـــال :

لتكن لدينا المتتالية العددية $\{a_n\}$ ، حيث $a_1 = 1$ ، $\forall n \in \mathbb{N}^*$

فإنّ $a_{n+1} = (n+1)a_n$.

عند ئذ يمكننا معرفة قيمة كل حد من حدود هذه المتتالية العددية $\{a_n\}$ بالتدريج كما يلي :

$a_1 = 1$, $a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 1 = 2!$, $a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$, $a_4 = 4 \cdot a_3 =$
$= 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$, ... , $a_n = n!$,

, $a_{n+1} = (n+1)!$ و ....

ومنه يمكن القول بأنه لدينا المتتالية العددية الحقيقية اللانهائيـــــة

$1!$ و $2!$ و $3!$ و $4!$ و .... و $n!$ و ....

التي حدها العام $a_n = n!$ ، حيث :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n$$

٢ ـ ٤ ـ اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر (عندما $n \to \infty$) :

نقول عن المتغير x_n إنه لامتناهٍ في الصغر عندما $n \to \infty$ إذا كانت له نهاية تساوي الصفر ، أي : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ ، وهذا يكافئ ما يلي :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$ فإنه $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون :

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$$

ونلاحظ أنه إذا كان للمتغير x_n نهاية مساوية للعدد الحقيقي a

فإنّ حاصل الطرح $x_n - a = \alpha_n$ يكون لامتناهياً في الصغر عندما $n \longrightarrow \infty$ لأنه من أجل كل $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*(+)}$ يوجد $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون : $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ عندما $n \geqslant N_\varepsilon$.

وبالعكس ، اذا كان α_n لامتناهياً في الصغر عندما $n \longrightarrow \infty$ بحيث $\alpha_n = x_n - a$ ، فإن a يكون نهاية للمتغير x_n ، لأنه من أجل كل $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*(+)}$ يمكن إيجاد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون :

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad \text{عندما} \quad n \geqslant N$$

وبذلك يمكننا أن نقول : أ) إذا كانت لمتغير x_n نهاية a فإنّ $x_n = a + \alpha_n$ حيث α_n هو لامتناهٍ في الصغر عندما $n \longrightarrow \infty$.

ب) إذا امكن كتابة متغير x_n بالشكل $x_n = a + \alpha_n$ ، حيث a هو عدد حقيقي و α_n هو لامتناه في الصغر عندما $n \longrightarrow \infty$ فإنّ نهايـــة x_n تســـاوي a عندما $n \longrightarrow \infty$.

مثال (١) :

إذا كان $x_n = \frac{1}{n}$ فإن المتغير x_n يكون لامتناهيـاً في الصغر عندما $n \longrightarrow \infty$ ، أي : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

الحـــــل :

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، من المتباينة $|x_n| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ نجد $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ، فإذا أخذنا $N \in \mathcal{N}^{*}$ بحيث $N > \frac{1}{\varepsilon}$ فإننا نجد أن :

$$n \geq N \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow |x_n| < \varepsilon$$

تعريف : نقول عن المتغير x_n إنه لامتناهٍ في الكبر عندما $n \longrightarrow \infty$ إذا وفقط إذا تحقق مايلي :

« $\forall M \in \mathbb{R}^{(+)}$ فإنه $\exists N \in \mathcal{N}^{*}$ بحيث يكون $|x_n| > M$ عندما $n \geq N$ » ، هذا ويقال عن اللامتناهي في الكبر x_n عندما $n \longrightarrow \infty$ بأنه متغير يسعى إلى اللانهاية أو له نهاية غير محدودة عندما $n \longrightarrow \infty$ ، ولذلك نصطلح على كتابته بالشكل $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ أو بالشكل $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$. وبهذه المناسبة وحيث أن $\infty \notin \mathbb{R}$ سوف نقول عن نهاية المتغير أو نهاية المتتالية التي عرفناها في البند السابق بأنها نهاية محدودة ، أما نهاية اللا متناهي في الكبر فهي نهاية غير محدودة (وذلك عندما $n \longrightarrow \infty$) .

مثال (٢) :

إذا كان $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ فإنّ المتغير x_n يكون لامتناهياً في الكبر عندما $n \longrightarrow \infty$ ، أيّ : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} 2^{\sqrt{n}} = \infty$

الحل :

ليكن $M \in \overset{(+)}{\mathbb{R}}$ ولنحل المتباينة $M < |x_n|$ أيّ المتباينة $2^{\sqrt{n}} > M$ التي تكافئ المتباينة $\sqrt{n}\ln 2 > \ln M$ وبالتالي تكافئ المتباينة $\sqrt{n} > \frac{\ln M}{\ln 2}$ ، ومنه $n > \left(\frac{\ln M}{\ln 2}\right)^2$

اذن ، اذا اخذنا $N \in \overset{*}{\mathcal{N}}$ بحيث $N > \left(\frac{\ln M}{\ln 2}\right)^2$ فإننا نجد أن:

$$n \geqslant N \Rightarrow n > \left(\frac{\ln M}{\ln 2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{\ln M}{\ln 2} \Rightarrow \sqrt{n}\ln 2 > \ln M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{n}} > M \Rightarrow |x_n| > M \,. \qquad (\text{———})$$

ملاحظـــة :

لما كان المتغير x_n دالة في n فإنه عندما نقول إن x_n هو لامتناه في الصغر أو هو لامتناه في الكبر فإن هذا يعني أنه x_n هو لامتناه في الصغر عندما $n \to \infty$ أو أنه x_n هو لامتناه في الكبر عندما $n \to \infty$ ، أيّ أننا لن نذكر العبارة (عندما $n \longrightarrow \infty$) في كل مرة إلا حين اللزوم . إلا أنه ، في بعض الفصول القادمة ، عندما يكون المتغير $y = f(x)$ ، الذي هو دالة في x ، لامتناهياً في الصغر (أيْ: $y \to 0$) أو لا متناهية في الكبر (أيْ $y \to \infty$) عندما: $x \longrightarrow a$ ؛ بحيث $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ ، فإننا لانستطيع إلا أن نذكر العبارة (عندما $x \longrightarrow a$) . وتجدر الاشارة الى مايلي:

اذا كان اللامتناهي في الكبر x_n يأخذ قيماً موجبة اعتباراً من رقم معين n ، حيث $n > 1$ ، فإننا نكتب $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$. ونقول عن x_n إنه لامتناه في الكبر موجب . أما إذا كانت قيم اللامتناهي في الكبر x_n سالبة اعتباراً من رقم معين n .

حيث $n \geq 1$ ، فإننا نكتب $\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty$. ونقول عن x_n إنه لامتناه في الكبر سالب . أما اذا كان اللامتناهي في الكبر x_n يغيّر اشارته دوماً فإنه لا يمكننا تسميته موجباً أو سالباً بل نكتب $\lim_{n \to +\infty} x_n = \infty$ دون أن نضع أية إشارة موجبة أو سالبة للرمز ∞ .

مثـــــال (٣) :

1) المتغير $x_n = n$ هو لامتناه في الكبر موجب لأن جميع قيمه موجبة بحيث نلاحظ أنه يأخذ القيم التاليـــــة :

$$1 , 2 , 3 , \cdots , n , n+1 , \cdots$$

ولذلك فإنّ : $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

2) المتغير $x_n = n^2 - 5$ هو لامتناه في الكبر موجب لأن قيمه موجبة اعتباراً من الحد الثالث بحيث نلاحظ أنه يأخذ القيم التالية :

$$-4 , -1 , 4 , 11 , 20 , 31 , \cdots$$

ولذلك فإنّ $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} (n^2 - 5) = +\infty$

3) المتغير $x_n = -n$ هو لامتناه في الكبر سالب لأن جميع قيمه سالبة بحيث نلاحظ أنه يأخذ القيم التاليـــــة :

$$-1 , -2 , -3 , \cdots , -n , \cdots$$

ولذلك نكتب $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$

4) المتغير $x_n = 6 - n$ هو لامتناه في الكبر سالب لأنـــه يأخذ قيماً سالبة اعتباراً من الحد السادس بحيث أن مجموعة قيمه هي:

$$\{5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots\dots\dots\}$$

ولذلك فإنّ $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} (6 - n) = -\infty$

5) المتغير $x_n = (-1)^n \cdot n$ هو لامتناه في الكبـــر ، ولا يمكن تسميته موجبــاً أو سالباً لأنّ قيمه تغيّر إشارتها كل الوقت ، حيث أن مجموعة قيمه هـــــــي :

$$\{-1 \text{ و } +2 \text{ و } -3 \text{ و } +4 \text{ و } -5 \text{ و } +6 \text{ و } \dots\}$$

ولذلك نكتب $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} (-1)^n n = \infty$

وتجدر الاشارة الى أنه يمكن تعريف اللامتناهيين في الكبر الموجـــــــب والســـالب كما يلـــــــــي :

نقول عن المتغير x_n إنه لامتناه في الكبر موجب (ونكتب $x_n \longrightarrow +\infty$) اذا وفقط اذا كان من أجل كل عدد حقيقي M يوجد عدد طبيعي $N \geq 1$ بحيـــــث أن :

$$n \geq N \Longrightarrow x_n > M$$

ونقول عن المتغير x_n إنه لامتناه في الكبر سالب (ونكتب $x_n \longrightarrow -\infty$) اذا وفقط اذا كان من أجل كل عدد حقيقي M يوجد عدد طبيعـــي $N \geq 1$ بحيـــــث أن :

$$n \geqslant N \Longrightarrow x_n < M$$

وترتبط اللامتناهيات في الكبر باللامتناهيات في الصغر وفق مايلـــــي :

ليكن لدينا المتغير x_n الذى لايساوي الصفر من أجل كـــــل قيمة لـ n ، أيْ : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ فإنّ $x_n \neq 0$ عندئذ :

أ) إذا كان x_n لامتناهياً في الكبر فإن المتغير $y_n = \frac{1}{x_n}$ يكـــون لامتناهياً في الصغــــــر •

ب) إذا كان x_n لامتناهياً في الصغر فإن المتغير $y_n = \frac{1}{x_n}$ يكون لامتناهياً في الكبـــــر •

ولبرهان أ نفرض أن x_n لامتناه في الكبر ونأخذ $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*(+)}$ ثم نضع $M = \frac{1}{\varepsilon}$ فنجد أن $M \in \mathbb{R}^{(+)}$ وبالتالي يوجد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون $|x_n| > M$ عندما $n \geqslant N$ أيْ يوجد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون $\varepsilon = \frac{1}{M} > \frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right| = |y_n|$ عندما $n \geqslant N$ •

إذن يوجد (من اجل العدد الحقيقي الموجب ε) عدد طبيعـــــي $N \geqslant 1$ بحيث يكون $|y_n| < \varepsilon$ عندما $n \geqslant N$ • وهذا يعني ان المتغير $\frac{1}{x_n} = y_n$ هو لامتناه في الصغر،وتبرهن ب) بطريقة مماثلـــــــة •

<u>مبرهنــــــــة (١) :</u>

إن حاصل ضرب متغير محدود x_n بلامتناه في الصغر α_n هو لامتنـــاه في الصغـــــــر •

الاثبـــــات :

بما أن المتغير x_n محدود فإنه يوجد عدد حقيقي موجب K

بحيث يكون $|x_n| < K$ من اجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، ثم بفـــرض

$\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ يكون $\frac{\varepsilon}{K} \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، ولما كان α_n لامتناهياً

في الصغر فإنه يوجد (من اجل العدد الحقيقي الموجب $\frac{\varepsilon}{K}$) عدد

طبيعي $N \geq 1$ بحيث يكون $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ عندما $n \geq N$.

ومنه يوجد (من اجل العدد الحقيقي الموجب ε) عدد طبيعي $N \geq 1$

بحيث يكـــــون :

$$n \geq N \Longrightarrow |x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

وهذا يعني أن حاصل الضرب $x_n \cdot \alpha_n$ هو لامتناه في الصغر وبهذا ينتم

المطلوب اثباتـــــه .

مثـــال (٤) :

المتغير $y_n = \frac{\sin n}{n^2}$ هو لامتناه في الصغر لانه يســاوى

حاصل ضرب المتغير المحدود $\sin n$ ، حيث $|\sin n| \leq 1$ من

أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، باللامتناهي في الصغر $\frac{1}{n^2}$ حيـــث

n^2 هو لامتناه في الكبر عندما $n \longrightarrow \infty$.

مثـــال (٥) :

المتغير $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ هو لامتناه في الصغر لانه يســاوي

حاصل ضرب المتغير المحدود $(-1)^n$ باللامتناهي في الصغر $\frac{1}{n}$.

مبرهنة (٢) :

إذا كانت لدينا اللامتناهيات في الصغر α_n و β_n و .... و γ_n التي عددها k ، فإن مجموعها $\alpha_n+\beta_n+\dots+\gamma_n$ يكون لامتناهياً في الصغر .

الاثبات :

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، عندئذ $\frac{\varepsilon}{k} \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، لما كان كل من α_n و β_n و .... و γ_n لامتناهياً في الصغر فإنه توجد أعداد طبيعية N_α و N_β و .... و N_γ بحيث يكون :

$$n \geq N_\alpha \Longrightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{k}$$

$$n \geq N_\beta \Longrightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{k}$$

....

$$n \geq N_\gamma \Longrightarrow |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{k}$$

ومنه يوجد العدد الطبيعي $N=\max(N_\alpha, N_\beta, \dots, N_\gamma)$

بحيث يكون :

$$n \geq N \Longrightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{k} , |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{k} , \dots , |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{k} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha_n + \beta_n + \cdots + \gamma_n| \leq$$
$$\leq |\alpha_n| + |\beta_n| + \cdots + |\gamma_n| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{K} + \frac{\varepsilon}{K} + \cdots + \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

إذن فالمجموع ($\gamma_n + \cdots\cdots + \beta_n + \alpha_n$) يكـــو ن لامتناهياً في الصغر .

مبرهنـــــة (٣) :

إن حاصل ضرب لامتناهيين في الصغر هو لامتناه في الصغر .

الاثبـــــات :

ليكن α_n و β_n لامتناهيين في الصغر . عند ئذ يكون كـــل من α_n و β_n محدوداً [بحسب المبرهنة (٢) في ٢ ـ ٣] . ومنه يمكن اعتبار الجداء $\alpha_n \cdot \beta_n$ بأنه حاصل ضرب متغير محدو د α_n بلامتناه في الصغر β_n . وبالتالي فالجداء $\alpha_n \cdot \beta_n$ يكون لامتناهياً في الصغر [بحسب المبرهنة (١)] .

ملاحظـــــة :

يمكننا بالاستقراء اثبات أن حاصل ضرب عدد محدود من اللامتناهيات في الصغر يكون لامتناهياً في الصغـــــر .

مبرهنـــــة (٤) :

إن حاصل ضرب مقدار ثابت بلامتناه في الصغر هو لامتناه في الصغر •

الاثبات :

بما أن كل مقدار ثابت هو مقدار محدود فإن حاصل ضرب مقدار ثابت بلامتناه في الصغر يكون حاصل ضرب متغير محدود بلامتناه في الصغر، وبالتالي يكون لامتناهياً في الصغر [بحسب المبرهنة (١)] •

مبرهنة (٥) :

إذا كان α_n و β_n لامتناهيين في الصغر فإن حاصل طرحهما $\alpha_n - \beta_n$ يكون لامتناهياً في الصغر •

الاثبات :

لما كان $\alpha_n - \beta_n = \alpha_n + (-1) \cdot \beta_n$ فإنه بحسب المبرهنتين (٤) و (٢) يكون $\alpha_n - \beta_n$ لامتناهياً في الصغر •

نتيجة :

المجموع الجبري لعدد محدود من اللامتناهيات في الصغر هو لامتناهي في الصغر •

الاثبات :

استناداً الى المبرهنتين (٥) و (٢) يتم (بسهولة) البرهان على صحة المطلوب اثباته •

مثـــــال (٦) :

اثبت ان $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} = 0$

الحـــــل :

نفرض ان $x_n = \frac{1-(-1)^n}{n}$ ، عند ئذ $x_n = \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}$

، حيث $\frac{1}{n}$ هو لامتناه في الصغر و $\frac{(-1)^n}{n}$ هـــو

لامتناه في الصغر ، ومنه فالمتغير x_n هو لامتناه في الصغر وبالتالي

فإن $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

مثـــــال (٧) :

أدرس بحسب قيم q ، حيث $q \in R$ ، تقارب المتتالية الآتية :

1 و q و q^2 و q^3 و ...... و q^n و ....

الحـــــل :

لنرمز للحد العام لهذه المتتالية بالرمز x_n ولنميز اربـــع

حالات [حيث ... و 3 و 2 و 1 و 0 = n] :

١) اذا كان $q = 1$ فإن $x_n = q^n = 1$ وبالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$

وهذا يعني أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من العدد 1

٢) اذا كان $q = -1$ فإن $x_n = q^n = (-1)^n$ وبالتالي فالمتتاليـــة

$\{x_n\}$ تكون متباعدة لأنه لا توجد لها نهايـــة .

٣) إذا كان $|q| < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ للأسباب التاليـــة :

بالحقيقة المتباينة $|x_n - 0| < \varepsilon$ تكافىء المتباينة $|q^n - 0| < \varepsilon$ التي

بدورها تكافئ المتباينة $\varepsilon > |q|^n$ أيّ: $n \ln|q| < \ln\varepsilon$ وهذا يكافئ

$n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$ [لأن $|q| < 1$ وبالتالي $\ln|q| < 0$] •

اذن $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ فإنه $\exists N \in \mathcal{N}^*$ بحيث يكون $N > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$

وبالتالي يكون :

$$n \geq N \Rightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \Rightarrow n.\ln|q| < \ln\varepsilon \Rightarrow |q|^n < \varepsilon \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$$

إذن فالمتتالية $\{x_n\}$ تكون متقاربة من الصفر •

٤) إذا كان $|q| > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ للاسباب التالية :

ليكن $M \in \mathbb{R}^{(+)}$ فنجد المتباينة $|x_n| > M$ [أيّ المتباينة $|q^n| > M$] تكافئ المتباينة $|q|^n > M$ التي تكافئ المتباينة $n > \dfrac{\ln M}{\ln|q|}$ • ومنه $\exists N \in \mathcal{N}^*$ بحيث يكون $N > \dfrac{\ln M}{\ln|q|}$ وبالتالي يكون :

$$n \geq N \Rightarrow n > \frac{\ln M}{\ln|q|} \Rightarrow n\cdot\ln|q| > \ln M \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |q|^n > M \Longrightarrow |x_n| > M$$

اذن فالمتتالية $\{x_n\}$ تكون متباعدة وبهذا يتم المطلوب دراسته •

ينتج من المثال السابق أنه :

أ) إذا كان $|q| < 1$ فإن q^n يكون لامتناهياً في الصغر عندما $n \longrightarrow \infty$ •

$2°$) إذا كان $|q| > 1$ فإن q^n يكون لامتناهياً في الكبر عندما $n \longrightarrow \infty$ • وبصورة خاصة نجد أنه :

I) اذا كان $0 < a < 1$ فإنّ $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$

II) اذا كان $a > 1$ فإنّ $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$

٢ ـ ٥ ـ المبرهنات الأساسية حول نهايات المتتاليات :

مبرهنة (١) :

اذا كانت نهاية المتغير x_n تساوي a واذا كان $a > b$ فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون $x_n > b$ عندما $n \geq N$ • أما اذا كان $a < b$ فإنه يوجد $N_1 \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون $x_n < b$ عندما $n \geq N_1$ •

الاثبات :

بما أن $a > b$ فإنّ $a - b > 0$ • لنأخذ $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكون $a - b > \varepsilon > 0$ • ومنه $a - \varepsilon > b$ • ولما كان $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ فإنه من أجل العدد الحقيقي الموجب ε يوجد عدد طبيعي $N \geq 1$ بحيث يكون $|x_n - a| < \varepsilon$ عندما $n \geq N$ • أيْ بحيث يكون :

$$n \geq N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n$$

وبما أن $a - \varepsilon > b$ فإنه يمكننا أن نقول بأنه يوجد $N \in \mathbb{N}^*$

بحيث يكون $x_n > b$ عندما $n \geq N$ ، وهو المطلوب الأول

أما عندما $a < b$ فيتم الاثبات بطريقة مشـــابهة •

مبرهنـــــــة (٢) :

اذا كانت لدينا المتتاليتان العددية المتقاربتان $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ بحيث أن $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ •

واذا كان $x_n \leq y_n$ من أجل كل n من N^* فإنّ $a \leq b$ •

أيّ :
$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

الاثبـــــــات :

لنفرض جدلاً أن $a > b$ ، ولنأخذ $r \in R$ بحيث يكـــون $a > r > b$ • لما كان $\lim_{n\to\infty} x_n = a > r$ فإنه بحســب المبرهنـــــة (١) السابقة يوجد $N_1 \in N^*$ بحيث يكون $x_n > r$ عندما $n \geq N_1$•

وبما أن $\lim_{n\to\infty} y_n = b < r$ فإنه بحسب المبرهنة (١) يوجـــد $N_2 \in N^*$ بحيث يكون $y_n < r$ عندما $n \geq N_2$ • ثم بفرض : $N = max\ (N_1, N_2)$ نستنتج أن $r < x_n$ و $y_n < r$ عندما $n \geq N$ • ومنه $y_n < x_n$ عندما $n \geq N$ وهذا يخالــف الفـــــرض •

اذن $a \leq b$ وهو المطلوب اثباتــــــه •

مبرهنـــــة (٣) :

لتكن لدينا المتتاليتان العددیتان المتقاربتان $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$

بحيث أن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. عندئذ :

1°) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2°) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3°) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4°) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ [بشرط أن يكون $y_n \neq 0$

من أجل كل n من N^* ، ويكون $b \neq 0$] .

الاثبـــات :

1°) بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ فإنه يمكننا أن

نكتب $x_n = a + \alpha_n$ و $y_n = b + \beta_n$ حيث α_n ، β_n لامتناهيان

في الصغر . ومنه $x_n + y_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$ حيث

$(\alpha_n + \beta_n)$ هو لامتناهي في الصغر . ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

وهذا يعني أن $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2°) يبرهن بطريقة مماثلـــــة .

3°) كما في 1°) يمكننا أن نكتب $x_n = a + \alpha_n$ و

$y_n = b + \beta_n$. ومنه :

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b+\beta_n) = a\cdot b + (a\cdot\beta_n + b\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n)$$

حيث $(a\cdot\beta_n + b\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n)$ هو لامتناهي في الصغـــــر •

ومنه $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a\cdot b$ أيْ: $\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$

4°) بما أن $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ فإن $x_n = a+\alpha_n$ و $y_n = b + \beta_n$ ، حيث α_n و β_n لامتناهيان في الصغر •

ومنه: $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{b\,x_n - a\,y_n}{b\,y_n} = \dfrac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{b\cdot y_n} = \dfrac{1}{b\cdot y_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$

وبفرض: $\gamma_n = \dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}$ نستنتج أن:

$$\gamma_n = \frac{1}{b\cdot y_n}(b\alpha_n - a\beta_n) \quad \dots\dots\dots (\star)$$

ولكن المتغير $(b\alpha_n - a\beta_n)$ هو لامتناه في الصغر [استناداً الى المبرهنتين (٤) و (٥) في ٢ — ٤] • وسنبرهن فيما يلي علــى أن المتغير $\dfrac{1}{b\cdot y_n}$ محدود :

لما كان $\beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ فإنه يوجد (من أجل العدد الحقيقي الموجب $\dfrac{|b|}{2}$) عدد طبيعي $N \geq 1$ بحيث يكون :

$$n \geq N \Longrightarrow |\beta_n| < \frac{|b|}{2}$$

ومنــــه (بفرض $n \geq N$) يكـــون :

$$|y_n| = |b+\beta_n| \geq |b| - |\beta_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$$

ومنـــه نجد أن :

$$n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{b\,y_n}\right| = \frac{1}{|b|\cdot|y_n|} < \frac{1}{|b|}\cdot\frac{2}{|b|} = \frac{2}{b^2}$$

ثم لنفرض أن $K = \max\left(\frac{2}{b^2} \text{ و } \left|\frac{1}{b\cdot y_1}\right| \text{ و } \left|\frac{1}{b\cdot y_2}\right| \text{ و } \cdots\cdots \text{ و } \left|\frac{1}{b\cdot y_{N-1}}\right|\right)+1$.

عندئذ يكون :

$\left|\frac{1}{b\cdot y_n}\right| < K$ من أجل كل n من N^* ، وهذا يعنـــي أن المتغير $\frac{1}{b\cdot y_n}$ محدود . وبحسب (*) تكون γ_n مساوية لحاصل ضرب متغير محدود بلامتناه في الصغر ، وبالتالـــي يكون γ_n لامتناهياً في الصغر [وذلك استناداً الى المبرهنة (١) في ٢ ــ ٤] . ومنه وبملاحظة أن $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \gamma_n$ ، نستنتج أن : $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$.

وبهذا يتم المطلوب اثباتـــــه .

<u>ملاحظـــة (١) :</u>

يمكننا في 4°) من المبرهنة (٣) السابقة أن نقتصر على الشرط $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ وذلك لانه إذا كان $b \neq 0$ فإنـــه [بحسب المبرهنة (١)] يكون $y_n \neq 0$ اعتباراً من رقم معين n_0 .

وبالتالي فإنه يكون للكسر $\frac{x_n}{y_n}$ معنى عندما $n \geq n_0$ ومنـــه [بأخذ المبرهنة (٣) في ٢ ــ ٣ بعين الاعتبار] عندما نتحدث

عن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ فإننا نتحدث عن نهاية المتتاليـــة

$\frac{x_{n_0}}{y_{n_0}}$ و $\frac{x_{n_0+1}}{y_{n_0+1}}$ و $\frac{x_{n_0+2}}{y_{n_0+2}}$ و ..... و $\frac{x_n}{y_n}$ و .....

ملاحظـــة (٢) :

يمكن بسهولة اثبات أنه اذا كان لدينا عدد محدود من المتغيـــرات

x_n ، y_n ، z_n و ..... و t_n المتقاربة فإن نهاية المجموع

الجبري لهذه المتغيرات تساوي المجموع الجبري لنهايات هـــــذه

المتغيرات ، أيْ :

$$= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} z_n + \cdots + \lim_{n\to\infty} t_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n - z_n + \cdots + t_n) =$$

كما ويمكن بالاســـتقراء إثبات أن :

أً) ـ نهاية مجموع عدد محدود من المتغيرات المتقاربة تساوي مجموع

نهايات هذه المتغيـــرات .

٢ً) ـ نهاية حاصل ضرب عدد محدود من المتغيرات المتقاربة تســاوي

حاصل ضرب نهايات هذه المتغيرات .

أمثلــــــة :

(I) نلاحظ أن : $\frac{3}{5} = \frac{3-0}{5+0} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{5+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}$

ونلاحظ أيضاً أن كل قيمة للمتغيــــر

$x_n = \frac{3n-1}{5n+1}$ تكون أصغر من قيمة النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{5}$ ،
وذلك لأن $\frac{3}{5} = \frac{3n}{5n} < \frac{3n-1}{5n+1}$
من أجل n من $\mathcal{N}^*$. ونلاحظ أيضاً أن $x_n < x_{n+1}$ من
أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ ، وذلك لأنه $\forall\ n \ni \mathcal{N}^*$ فإن :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3n+2}{5n+6} - \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{8}{(5n+6)(5n+1)} > 0$$

ومنه فإن x_n يسعى إلى نهايته $\frac{3}{5}$ بقيم متزايدة .

(II) نلاحظ أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1} = \frac{1+0}{1} = 1$
ونلاحظ أيضاً أن كل قيمة للمتغير $x_n = \frac{2^n+1}{2^n}$
تكون أكبر من قيمة النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ ، وذلك لأن
$1 = \frac{2^n}{2^n} > \frac{2^n+1}{2^n}$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$.
ونلاحظ أيضاً أن $x_n > x_{n+1}$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ ، وذلك لأنه
$\forall\ n \ni \mathcal{N}^*$ فإن :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} - \frac{2^n+1}{2^n} = \frac{-1}{2^{n+1}} < 0$$

ومنه فإن x_n يسعى الى نهايته 1 بقيم متناقصة .

(III) برهنا أعلاه على أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. ونلاحظ أن
المتغير $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ يسعى الى نهايته بقيم متناوبة الاشارة :
[مرة — ، ومرة +] .

($\overline{IV}$) برهنا أعلاه على أن $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1-(-1)^n}{n} = 0$.

ونلاحظ أن المتغير $x_n = \frac{1-(-1)^n}{n}$ يأخذ القيمة صفر من بين قيمه التي يأخذها عندما تتغير n ، وهذه القيمة صفر تطابق قيمة النهاية $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

مبرهنـــــة (٤) :

إذا كان المتغير $x_n \geq 0$ من أجل كل n من N^* ، وإذا كان $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ ، وإذا كان k عدداً صحيحاً أكبر من الواحـــد ، فإن :

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{\lim_{n \to \infty} x_n}$$

الاثبـــات :

بما أن $x_n \geq 0$ (من أجل كل n من N^*) فإنه بحسب المبرهنة (٢) يكون $a \geq 0$ • وبالتالي هناك احتمالان :

الاحتمال الأول ($a > 0$) : بما أن $\lim x_n = a$ فإن $(x_n - a)$ هو لامتناه في الصغر • لنأخذ المطابقة التاليـــة :

$$u^K - v^K = (u-v)(u^{K-1} + u^{K-2} \cdot v + u^{K-3} \cdot v^2 + \cdots + v^{K-1})$$

ولنبدل فيها $u = \sqrt[k]{x_n}$ و $v = \sqrt[k]{a}$ فنجد :

$$x_n - a = (\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{a}) \left[(\sqrt[k]{x_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{x_n})^{k-2} \sqrt[k]{a} + \cdots + (\sqrt[k]{a})^{k-1} \right] \quad (\star)$$

وبما أن $a > 0$ فإنه يكون لدينا من أجـــل

جميع قيم x_n (بما فيها القيمة $x_n = 0$) :

$$(\sqrt[k]{x_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{x_n})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \cdots + (\sqrt[k]{a})^{k-1} \neq 0$$

ومنه تأخذ المساواة ($*$) الشكل التالي :

$$\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{a} = \frac{1}{(\sqrt[k]{x_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{x_n})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \cdots + (\sqrt[k]{a})^{k-1}} \times (x_n - a). \quad (**)$$

ولكن :

$$(\sqrt[k]{x_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{x_n})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \cdots + (\sqrt[k]{a})^{k-1} \geqslant (\sqrt[k]{a})^{k-1}$$

[لأنّ $x_n \geqslant 0$ و $a > 0$] . إذن :

$$\frac{1}{(\sqrt[k]{x_n})^{k-1} + \cdots + (\sqrt[k]{a})^{k-1}} \leqslant \frac{1}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}}$$

وهذا يعني أن المضروب الأيسر الموجود في الطرف الأيمن من المساواة ($**$) هو متغير محدود ، أما المضروب الأيمن فهو لامتناه في الصفر. ومنه فالمتغير $\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{a}$ هو لامتناه في الصغر [حسب المبرهنة (١) في ٢ ـ ٤] . إذاً $\lim\limits_{n \to \infty}(\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{a}) = 0$

أو $\sqrt[k]{a} = \lim\limits_{n \to \infty}\sqrt[k]{x_n}$.

الاحتمال الثاني ($a = 0$) : ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، عند ئذ $\varepsilon^k \in \mathbb{R}^{(+)}$.

لما كان $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a = 0$ إذاً يوجد عدد طبيعي $N \geqslant 1$

بحيث يكون : $|x_n| < \varepsilon^k$ عندما $n \geqslant N$. وبما أن $x_n \geqslant 0$

فإنّ $|x_n| = x_n$ وبالتالي $x_n < \varepsilon^k$ عندما $n \geqslant N$. ومنه :

$|\sqrt[k]{x_n}| = \sqrt[k]{x_n} < \varepsilon$ عندما $n \geqslant N$. وهذا يعني أن :

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = 0$ • ولما كان $0 = \sqrt[k]{0} = \sqrt[k]{a}$ فإن :

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$ وبذلك يتم المطلوب اثباته

مثـــال :(١) :

أثبت أن المتغير $\sqrt{2n-1}$ ـــ $x_n = \sqrt{n^2+2}$ هو لامتناه في

الكبـــــــر •

الحــــــل :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{2n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}} = \infty$$

مبرهنـــــة (٥) :

لتكن لدينا المتغيرات x_n ، y_n ، z_n بحيث أن $x_n \leq y_n \leq z_n$ من أجل كل n من N^* • ولنفرض أن : $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$ •

عندئذ يكون $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ •

الاثبـــــات :

ليكن $\varepsilon \in R^{(+)}$. بما أن $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ فإنه يوجد $N_1 \in N^*$ بحيث تكون المتباينة $|x_n - a| < \varepsilon$ محققة عندما $n \geq N_1$ أي بحيث يكـــون :

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ (*) عندما $n \geq N_1$ • وبما أن $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

فإنه يوجد $N_2 \in N^*$ بحيث يكون : $|z_n - a| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_2$ •

أيّ بحيث يكـــون :

(* *) $a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$ عندما $n \geqslant N_2$. وبأخذ:

$N = max(N_1, N_2)$ نستنتج من الفرض ومن (*) و (* *)

أنّ : $a-\varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a+\varepsilon$ عندما $n \geqslant N$. ومنه $a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$

عندمـــا $n \geqslant N$.

اذن يوجد (من أجل العدد الحقيقي الموجب ε) عدد طبيعي $N \geqslant 1$

بحيث يكون $|y_n - a| < \varepsilon$ عندما $n \geqslant N$ وهذا يعني أن $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

وبهذا يتم المطلوب اثباتـــــه

<u>مثـــال (٢) :</u>

اثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

<u>الحـــــل :</u>

باستخدام دستور الكرخي ــ نيوتن نجـــد :

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \cdots + 1 = 1 + n + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) + \cdots + 1$$

ولكن $\quad 1+n+\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right)+\cdots+1 > 1+n+\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right) > \frac{n^2}{2}$

لأنّ الحدود التي أهملناها

هي حدود موجبة . ومنه نجد أن $\frac{2}{n^2} < \frac{1}{2^n} > 0$ وبالتالي

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n} \ .$$

ولما كان $\lim_{n \to \infty} 0 = 0$ و $\lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$ فإننا نجد [بحسب المبرهنة السابقة (٥)] أن $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

مثــــــال (٣) :

برهن على ان $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

الحـــــل :

نفرض أن $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ فنجد أن $x_n \geq 0$ من أجل كل n من N^* ، وأن $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$ ، وبالتالــي :

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + n\, x_n + \frac{n(n-1)}{2!} x_n^2 + \cdots\cdots + x_n^n$$

ومنه : $n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$ أيْ

$n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$ ، وبالتالي $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ بحيث $n \geq 2$.

وبملاحظة أن $\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$ نستنتج أن $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$.

وهذا يعني أن x_n هو لامتناه في الصغر ، ولما كان $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$ فإنه يمكننا أن نكتب $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

مثــــــال (٤) :

أثبت أنه $\forall a \in \mathbb{R}^{(+)}$ فإنّ $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

الحـــــل :

$x_n = 2n \to \infty$ $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ $y_n = 2n \to \infty$

بالحقيقة ، يوجد (بحسب خاصة أرخميدس) عدد طبيعي $N \in \mathbb{N}^*$

بحيث يكون $\frac{1}{n} < a < n$ عندما $n \geqslant N$.

ومنه $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ عندما $n \geqslant N$.

وبما ان $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

٢ ـ ٦ ـ بعض حالات عدم التعيين :

1 ـ حاصل القسمة $\frac{x_n}{y_n}$ حيث $y_n \neq 0$:

I • إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ فإنّ $\frac{x_n}{y_n}$ يكون لامتناهياً في الصغر لأنه يكتب بالشكل $x_n \cdot \frac{1}{y_n}$ ، حيث $\frac{1}{y_n}$ هو لامتناه في الصغر و x_n هو متغير محدود . إذاً

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = 0 .$$

II • إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ، حيث $a \neq 0$ ، وإذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ ، حيث $y_n \neq 0$ فإنّ $\frac{x_n}{y_n}$ يكون لامتناهياً في الكبر لأنّ $\frac{1}{x_n} \cdot y_n = \frac{y_n}{x_n}$ هو لامتناه في الصغر (بملاحظة أن $\frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{a}$) .

III • إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ ، حيث $y_n \neq 0$ ، فإنّ $\frac{x_n}{y_n}$ يكون لامتناهياً في الكبر لأنّ $\frac{1}{x_n} \cdot y_n = \frac{y_n}{x_n}$ هو لامتناه في الصغر (للكسر

$\frac{y_n}{x_n}$ معنى وذلك لأنّ x_n لامتناه في الكبر وبالتالي فقيم x_n ، منذ قيمة معينة ، تكون مغايرة للصفر) .

IV • إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ ، حيث $b \neq 0$ ، فإنّ $\frac{x_n}{y_n}$ يكون لامتناهياً في الكبر لأنّ مقلوبه (حسب I .) لامتناه في الصغـــــر .

V • إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ واذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ فإننـــا نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ كما تدل على ذلـــك الأمثلة التاليـــــــة :

أ) إذا كان $x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ و $y_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ فإنّ $\frac{x_n}{y_n} = 1 \longrightarrow 1$.

ب) إذا كان $x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ و $y_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ فإنّ $\frac{x_n}{y_n} = n \longrightarrow \infty$.

ج) إذا كان $x_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ و $y_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ فإنّ $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

د) إذا كان $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$ و $y_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ فإنّ $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ وهذا المتغير لاتوجد لـه نهايـــــــة .

VI • إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ فإننا نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

أمثلة :

آ) اذا كان $x_n = n^2 \longrightarrow \infty$ و $y_n = n \longrightarrow \infty$ فإنّ :

$$\frac{x_n}{y_n} = n \longrightarrow \infty$$

ب) اذا كان $x_n = n \longrightarrow \infty$ و $y_n = n^2 \longrightarrow \infty$ فإنّ :

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

جـ) اذا كان $x_n = n \longrightarrow \infty$ و $y_n = n \longrightarrow \infty$ فإنّ :

$$\frac{x_n}{y_n} = 1 \longrightarrow 1$$

د) اذا كان $x_n = n(-1)^n \longrightarrow \infty$ و $y_n = n \longrightarrow \infty$ فإنّ :

$\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ وهذا المتغير ليس له نهايـــة .

2 — حاصل الجمع $x_n + y_n$:

I • إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ وإذا كان $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ فإن : $\left[\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty\right.$ • بالحقيقة، ليكن $M \in \mathbb{R}^{(+)}$.

لما كان $y_n \longrightarrow b$ فإن المتغير y_n يكون محدوداً ، وبالتالـي يوجد $k \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكون $|y_n| < k$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$.

وبما أن $x_n \longrightarrow \infty$ فإنه من أجل العدد $M + k$ يوجد $N \in \mathbb{N}^*$

بحيث يكون $|x_n| > M + k$ عندما $n \geq N$. ومنـــــه :

$$n \geq N \Rightarrow |x_n + y_n| \geq |x_n| - |y_n| > (M+k) - k = M \Rightarrow |x_n + y_n| > M$$

إذن $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \infty$

وبصورة خاصة ، اذا كان $x_n \longrightarrow +\infty \ (-\infty)$ فإنّ :

$(x_n + y_n) \longrightarrow +\infty \ (-\infty)$.

II • إذا كان $x_n \longrightarrow +\infty \ (-\infty)$ و $y_n \longrightarrow +\infty \ (-\infty)$

فإنّ $x_n + y_n \longrightarrow +\infty \ (-\infty)$ لأنّ حاصل جمع لامتناهيين في الكبر لهما نفس الاشارة هو لامتناه في الكبر (برهن على هذا ؟) .

III • إذا كانت للامتناهيين في الكبر x_n و y_n إشارتان مختلفتا ن فإننا نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$.

أمثلـــــــة :

آ ـ) اذا كان $x_n = (n + \frac{1}{n}) \longrightarrow +\infty$ و $y_n = -n \rightarrow -\infty$ فإنّ $x_n + y_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

ب ـ) اذا كان $x_n = 2n \rightarrow +\infty$ و $y_n = -n \longrightarrow -\infty$ فإنّ :

$x_n + y_n = n \longrightarrow +\infty$.

ج ـ) اذا كان $x_n = (n + 2) \longrightarrow +\infty$ و $y_n = -n \longrightarrow -\infty$ فإنّ

$x_n + y_n = 2 \longrightarrow 2$.

د ـ) اذا كان $x_n = n + (-1)^n \longrightarrow +\infty$ و $y_n = -n \longrightarrow -\infty$

فإنّ : $x_n + y_n = (-1)^n$ ،

وهذا المتغير لا توجد له نهايــــــة

3 ـ حاصل الضرب $x_n \cdot y_n$:

I • إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ فإنّ $x_n\, y_n$ يكون لامتناهياً في الكبر ، [لأنّ $\frac{1}{x_n}$ و $\frac{1}{y_n}$ وبالتالي $\frac{1}{x_n \cdot y_n}$ تكون لامتناهيات في الصغــــر] .

II • [إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ، حيث $a \neq 0$ ، واذا كان : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\, y_n = \infty$] • بالحقيقة ، إن $\frac{1}{y_n}$ هو لامتناه في الصغر ، وإن المتغير $\frac{1}{x_n}$ محدود (لأنّ ; $\frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{a}$) وبالتالي فالمتغير $\frac{1}{x_n \cdot y_n}$ يكون لامتناهياً في الصغر • ومنه $x_n \cdot y_n$ يكون لامتناهيًا في الكبـــــر •

III • إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ وإذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ فإننا نحصل على حالة عدم تعيين من الشــــكل $0 \cdot \infty$ •

أمثلــة :

آ) اذا كان $x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ و $y_n = n^2 \longrightarrow \infty$ فــإنّ :

$$x_n \cdot y_n = n \longrightarrow \infty$$

ب) اذا كان $x_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ و $y_n = n \longrightarrow \infty$ فــإنّ :

$$x_n y_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

جـ) اذا كان $x_n = \frac{3}{n} \longrightarrow 0$ و $y_n = n \longrightarrow \infty$ فـإنّ :

$$x_n \cdot y_n = 3 \longrightarrow 3$$

د) اذا كان $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$ و $y_n = n \longrightarrow \infty$ فـإنّ :

$$x_n y_n = (-1)^n \text{ ،}$$

وهذا المتغير ليس له نهايـــــة .

4 ــ الى جانب حالات عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty - \infty$ أو $0 \cdot \infty$ التي استعرضناها ، توجد حالات عدم تعيين أخرى من الشكل 0^0 أو 1^∞ أو ∞^0 وإن إزالة عدم التعيين في كل حالة من حالات عدم التعيين تتم بطريقة تخص شكل عدم التعيين نفسه . وعندما نستطيع اعطاء جواب معين حول النهاية ، أيّ : عندما نستطيع معرفة قيمة النهاية أو نستطيع القول بأن هذه النهاية غير موجودة ، فإننا نقول إن عدم التعيين قد أزيل وإن حالة عدم التعيين قد عرفت وعينت . وسنبين في الأمثلة الآتية الطرق الكلاسيكية لإزالة عدم التعيين ومعرفـــة النهاية في حالة عدم تعيين :

<u>مثـــــال (I) :</u>

لتكن لدينا الحدودية من الدرجة k (كثير حدود من الدرجة k)

$$x_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \cdots + a_{k-1} n + a_k$$

، حيث $a_0 \neq 0$ ، ولنفرض أن :

$n \longrightarrow +\infty$ • عندئذ يكون لدينا مايلـــــــي :

إذا كانت لجميع معاملات (أمثال) الحدودية نفس الاشارة فإن x_n يكون لامتناهياً في الكبر له نفس هذه الاشارة • أما إذا كانت المعاملات لها إشارات مختلفة فإننا قد نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$ ،

ولازالة عدم التعيين هذا نكتب

$$x_n = n^k \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k} \right)$$

فيكون كل حد من الحدود الواقعة داخل القوسين السابقين (ماعدا الحد a_0) لامتناهياً في الصغر • أما المضروب n^k فيكون لامتناهياً في الكبر موجب • ومنـــــــه :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} n^k \cdot \lim_{n \to \infty} \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots\cdots + \frac{a_k}{n^k} \right) = +\infty \cdot a_0 = \infty$$

وتتحدد إشارة ال ∞ بحسب اشـــارة a_0 •

مثـــــال (II) :

ليكن لدينا المتغير x_n الذى يساوي خارج قسمة حدوديتين ، أيْ :

$$x_n = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \cdots + a_{k-1} \cdot n + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + b_2 n^{m-2} + \cdots + b_{m-1} \cdot n + b_m}$$

حيث $a_0 \neq 0$ و $b_0 \neq 0$ • عندئذ نحصل على حالة عدم تعيين من الشـــكل $\frac{\infty}{\infty}$ عندما $n \longrightarrow +\infty$ وذلك اذا أخذنا بعين الاعتبار

المثـــال (I) السابق ولذلك نكتـــب :

$$x_n = n^{k-m} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{b_m}{n^m}}$$

ومنـــــــه :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n^{k-m} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_m}{n^m}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} n^{k-m} \right) \cdot \frac{a_0}{b_0}$$

حيث $\frac{a_0}{b_0} \neq 0$. وهنا نميز ثلاث حالات :

الحالة الأولى : اذا كان $k > m$ فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-m} = +\infty$ وبالتالي

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mp\infty$ ، حيث تتعين الاشارة استناداً الى اشارة $\frac{a_0}{b_0}$.

الحالة الثانية : اذا كان $k = m$ فإن $n^{k-m} = n^0 = 1$ وبالتالي :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a_0}{b_0} .$$

الحالة الثالثة : اذا كان $k < m$ فان $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-m} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m-k}} = 0$

وبالتالـــي : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

مثـــــال (III) :

لحساب نهاية المتغير $x_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2+1}$ نلاحظ أنــــه

لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ التي نزيلها بتقسيم البسط (الصورة) والمقام (والمخرج) على n^2 [لأننا أمام حالة خاصة من المثال السابق] فنجد

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{2+\frac{1}{n^2}}$$

مثــــال (IV) :

لحساب نهاية المتغير $x_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+5}$ نلاحظ أنه لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ، ولازالة عدم التعيين نلاحظ أن $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ومنه

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{10}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

مثــــال (V) :

لحساب نهاية المتغير $x_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

نلاحظ أن $1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

ومنــــه

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{2^{n+1}})\cdot(1-\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3^{n+1}})} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

مثــــال (VI) :

لحساب نهاية المتغير $x_n = \frac{a^n}{1+a^n}$ ، حيث نميز ثلاث $(a \in \mathbb{R}^{(+)})$

حـــــالات :

الحالة الأولى : اذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ وبالتالي :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \;.$$

الحالة الثانية : اذا كان $a = 1$ فإن $a^n = 1$ وبالتالي :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} \;.$$

الحالة الثالثة : اذا كان $a > 1$ فإنّ $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ وبالتالـــي

تكون لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ التـــي

نزيلها بتقسيم البسط والمقام على a^n فنجد :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n} + 1} = 1$$

مثـــال (VII) :

لحساب نهاية المتغير $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

نلاحظ أن $\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

و $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

ومنـــــه

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ •

٢ ـ ٧ ـ المتتاليات المطّردة :

نقول عن المتتالية العددية $\{x_n\}$ إنها غير متناقصة اذا كان $x_n \leqslant x_{n+1}$ من أجل كل n من N^* • ونقول إنها غير متزايدة اذا كان $x_n \geqslant x_{n+1}$ من أجل كل n من N^* •

ونقول إنها متزايدة إذا كان $x_n < x_{n+1}$ من أجل كل n من N^* •

ونقول إنها متناقصة اذا كان $x_n > x_{n+1}$ من أجل كل n من N^* •

ونقول إنها مطّردة إذا كانت إما متزايدة أو متناقصة أو غيرمتزايدة أو غير متناقصة •

مبرهنة (١) :

إذا كانت المتتاليةُ العدديةُ $\{x_n\}$ محدودةً من الأعلى ومتزايدةً [أو غير متناقصة] ، فإنها تكون متقاربةً من أصغر حد أعلى لمجموعة قيمها .

الاثبات :

لتكن لدينا المتتالية العددية المحدودة من الأعلى والمتزايدة (أوغير المتناقصة) $\{x_n\}$. ولنرمز لمجموعة قيمها بالرمز H • عندئذ تكون H مجموعة غير فارغة من الأعداد الحقيقية ، ومحدودة من الأعلى ، وبالتالي يوجد $\sup H$ الذي سنرمز له بالرمز a • ومنه

$x_n \leq a$ من أجل كل n من N^* ، وبفرض $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$

فإنه يوجد $N \in N^*$ بحيث يكون $x_N > a-\varepsilon$ وبالتالي

$a-\varepsilon < x_N \leq a$ ، ولما كان $x_n < x_{n+1}$ (أو $x_n \leq x_{n+1}$)

من أجل كل n من N^* فإنه يكون :

$$n \geq N \Rightarrow a-\varepsilon < x_N \leq x_n \leq a < a+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ، وهذا يعني أن المتتالية العددية $\{x_n\}$

متقاربة من $\sup H$ وبهذا يتم المطوب .

مبرهنـــة (٢) :

إذا كانت المتتالية العددية $\{x_n\}$ محدودة من الأدنـى

ومتناقصة (أو غير متزايدة) فإنها تكون متقاربة من أكبر حد أدنى لمجموعة

قيمهـــا .

الاثبـــات :

يتم اثبات هذه المبرهنة بطريقة مشابهة لطريقة اثبات المبرهنة ـ

الســـابقة .

مبرهنة (٣) :

لتكن لدنيا المتتالية العددية المطّردة $\{x_n\}$.عندئذ :

([المتتالية العددية $\{x_n\}$ متقاربة] $\Longleftrightarrow$ [المتتالية العددية $\{x_n\}$ محدودة]) .

الاثبـــــات :

تنتج هذه المبرهنة من المبرهنتين السابقتين ومن المبرهنة (٢) المذكورة في البند ٢ ـ ٣ .

ملاحظـــــة :

برهنا سابقاً على أن كل متتالية متقاربة تكون محدودة ، إلاّ أنه ليس من الضروري أن تكون كل متتالية محدودة متقاربة . ولكن المبرهنة (٣) تبين أن كون المتتالية متقاربة يكافئ كونها محدودة ، بشرط أن تكـــون المتتالية مطـــردة .

مثـــــال :

برهن على أن المتتالية العددية $\{x_n\}$ ، حيث $x_n = \frac{a^n}{n!}$ و $a \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، متقاربة ثم أوجد نهايتهــــا .

الحـــل :

نلاحظ أن $x_n > 0$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، وبالتالي فإن مجموعة قيم هذه المتتالية تكون محدودة من الأدنى . ونلاحظ أيضـــاً أنّ :

$$x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{(n+1)} \cdot \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1} \cdot x_n$$

ومنـــه [عندما $n+1 > a$ أيْ عندما $n > a-1$] يكون $x_{n+1} < x_n$ وبالتالي فالمتغير x_n متناقص . وهذا يسمح لنا استناداً الى المبرهنة (٣) في ٢ ـ ٣ أن نقول بأن ـ

المتتالية $\{x_n\}$ متناقصة وبذلك تكون المتتالية العددية $\{x_n\}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى ، وبالتالي فهي متقاربة .
وبفرض $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ نجد أن $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$ [استناداً الى المبرهنة (٣) في ٢ ـ ٣] . ومنه [استناداً إلى المساواة :
$x_{n+1} = \frac{a}{n+1}\cdot x_n$] نجد $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\cdot A = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

مثال (٢) :

برهن على أن للمتتالية العددية $\{x_n\}$ ، حيث :

$$x_n = \frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1} .$$

نهاية ليست أكبر من العدد 1 .

الحل :

إن المتتالية العددية $\{x_n\}$ متزايدة لأن :
$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{n+1}+1}$ وبالتالي $x_{n+1} > x_n$. وبالاضافة الى ذلك ، فإن هذه المتتالية محدودة من الاعلى لأن :

$$x_n = \frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1} <$$

$$< \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n} < 1$$

أي أن $x_n < 1$ من أجل كل n من N^* .

اذن فالمتتالية العددية $\{x_n\}$ متزايدة ومحدودة من الاعلى ،وبالتالي فهي متقاربة ، وهذا يعني أنه توجد لهانهاية مساوية لـ $\sup H$ بحيث H هي مجموعة قيمها .

ثم بملاحظة أنه $\forall h \ni H$ فإن $h < 1$ نستنتج أن $(\sup H) \leq 1$

وبذلك نكون قد برهنا على ان للمتتالية العددية $\{x_n\}$ نهاية ليست أكبر من 1 .

<u>مثال (٣) :</u>

أوجد نهاية المتتالية العددية $\{x_n\}$ بحيث

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad \text{و} \quad x_1 = \sqrt{a} \quad \text{و} \quad a \in \mathbb{R}^{(+)}$$

<u>الحل :</u>

إن الشكل المفصل لهذه المتتالية العددية هو :

$$\sqrt{a}, \sqrt{a+\sqrt{a}}, \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}, \ldots\ldots\ldots$$

وبمقارنة قيمتي x_n , x_{n+1} نجد بالاستقراء أن $x_{n+1} > x_n$. ومنه $x_n < \sqrt{a+x_n}$ وبالتالي $x_n^2 < a + x_n$ ، أيْ أن $x_n^2 - x_n - a < 0$.وبحل هذه المتباينة نجدان $x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ من اجل كل n من $\mathbb{N}^*$. وهذا يعني ان مجموعة قيم هذه المتتالية محدودة من الاعلى

اذن فالمتتالية العددية $\{x_n\}$ متزايدة ومحدودة من الاعلى .

وبالتالي فهي متقاربـــة .

وبفرض $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ نستنتج أن $\lim_{n\to\infty} x_{n-1} = A$ [استناداً الى المبرهنة (٣) في ٢ ـ ٣] . وبما أن $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ فإنّ :

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a + x_{n-1}} = \sqrt{a + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}} = \sqrt{a + A}$$

ومنه $A^2 = a + A$ وبالتالي $A^2 - A - a = 0$ وبالتالي $A = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

وبما أن $a > 0$ والمتتالية العددية $\{x_n\}$ متزايدة ، فإنه يجب أن يكون $A > 0$ وهذا يعني أن القيمة السالبة $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ مرفوضة .

وبالتالي فإن القيمة المقبولة لـ A هي $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$. ومنـــه :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

وبهذا يتم اثبات المطلـــوب .

مثـــال (٤) :

لنفرض أن $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. أثبت أن المتتالية العدديـة $\{x_n\}$ تكون متقاربة ثم أثبت أنها تتقارب من نهايتها بتزايد (أيْ أنها متزايدة) .

الحـــل :

١ً) لنفرض أن $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. عندئذ يكون $y_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > 0$

و $y_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ وبالتالي $\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} =$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1}} =$$

ولكن اذا كان $h > -1$ فإن $(1+h) \geq 1 + mh$ من أجل كل m من $\mathcal{N}$ • [يتم برهان صحة هذه المتباينة بطريقة الاستقراء الرياضي] • وبالاعتماد على هذه المتباينة يمكننا أن نكتب :

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1} = 1+\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

ومنه $\frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$ أيْ : $y_{n-1} \geq y_n$ من أجل جميع قيم $2 \leq n$ • ونلاحظ أيضاً أن :

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+n\cdot\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{n}\right) > 2$$

وذلك من أجل جميع قيم n من $\mathcal{N}^*$ •

اذن فالمتتالية $\{y_n\}$ محدودة من الأدنى وغير متزايدة ، وهذا يعني أنها متقاربة ، أى توجد لها نهاية محدودة •

ثم بملاحظة أن $x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}$ نستنتج أن

$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} y_n$ وهذا يعني أنه

توجد للمتغير x_n نهاية محدودة ، وبالتالي فالمتتالية $\{x_n\}$ تكون متقاربة ،

يرمز عادة لنهاية هذه المتتالية بالرمز e وبذلك يكـــــون

$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ • [ويعتبر $e \approx 2{,}72$] •

٢) لدينا $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ • ومنــــه

وبالتالي $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left[\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \left[\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \quad (\bigstar)$$

ولكن ، اذا كان $h > -1$ و $h \neq 0$ فإن $(1+h)^m > 1 + mh$ من اجل كل m من المجموعة ($\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) [يتم برهان صحة هذ • المتباينة بطريقة الاستقراء الرياضي بحيث $2 \leq m$] • وبالاعتماد على هذه • المتباينة يمكننا ان نكتـــب :

$$\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot (n+1) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

وبحســـب ($\bigstar$) انجـــد :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

أيْ $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ ؛ وبالتالـــي :

$x_{n+1} > x_n$ من اجل كل n من N^* .

٢ ـ ٨ ـ الفترات (المجالات) الحقيقية :

ليكن a و b عددين حقيقيين (أيْ : a و $b \in \mathbb{R}$) بحيث أن $a \leq b$. عندئـــذ :

1°) تعرّف الفترة (المجال) المفتوحة $]a,b[$ كما يلـــي :

$$]a,b[= \{x : x \in \mathbb{R} , a < x < b\}$$

2°) تعرّف الفترة (المجال) المغلقة $[a,b]$ كما يلـــي :

$$[a,b] = \{x : x \in \mathbb{R} , a \leq x \leq b\}$$

3°) تعرّف الفترة (المجال) نصف المفتوحة (أو نصف المغلقة) $[a,b[$ كما يلـــي :

$$[a,b[= \{x : x \in \mathbb{R} , a \leq x < b\}$$

4°) تعرّف الفترة (المجال) نصف المفتوحة (أو نصف المغلقة) $]a,b]$ كما يلـــي :

$$]a,b] = \{x : x \in \mathbb{R} , a < x \leq b\}$$

اذا كان $a , b \in \tilde{\mathbb{R}}$ بحيث أن $a \leq b$ فإن التعاريـــف السابقة للفترات تصاغ بصورة مماثلة . وهكذا يمكننا أن نكتب :

$\tilde{\mathbb{R}} = [-\infty , +\infty]$ و $\mathbb{R} =]-\infty , +\infty[$.

وتجدر الاشارة إلى أنه في كل من التعاريف الأربعة السابقة يسمى العددان b و a بـ ((طرفي الفترة)) ويكون طول الفترة مساوياً للعدد الحقيقي غير السالب $|b - a|$ ، حيث $a , b \in \mathbb{R}$.

ونلاحظ أنه اذا كان $a = b$ فإن $]a,b[=]a , b] = [a, b[= \phi$

و $[a , b] = \{a\} = \{b\}$

أما اذا كان $a \lneqq b$ فإن كل فترة حقيقية من الفترات المذكورة تكون مجموعة غير منتهية .

٢ - ٩ - مبرهنة الفترات المتداخلة :

لتكن لدينا المتتالية $\{[a_n , b_n]\}$ من الفترات المغلقة $[a_n , b_n]$ ، التي حدها العام $x_n = [a_n , b_n]$.

بحيث أن :

$$[a_1 , b_1] \supseteq [a_2 , b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n , b_n] \supseteq \dots$$
$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

عندئذ يوجد عدد حقيقي واحد فقط ينتمي إلى جميع هذه الفترات .

الاثبات :

من الواضح أن $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_1$ وذلك مهما كانت n من $\mathbb{N}^*$.

ومنه فالمتتالية $\{a_n\}$ هي متتالية محدودة من الأعلى وغير متناقصة .

ولذلك فإنها تتقارب من أصغر حد أعلى لمجموعة قيمها الذي سنرمز له بالرمز x' . ومنه $a_n \leq x'$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$.
وبما أن $a_1 \leq b_{n+1} \leq b_n$ مهما كانت n من $\mathcal{N}^*$ فإن المتتالية $\{b_n\}$ تكون محدودة من الأدنى وغير متزايدة ، ولذلك فإنها تتقارب من أكبر حد أدنـــى لمجموعة قيمها الذي سنرمز له بالرمـــز x'' . ومنه $x'' \leq b_n$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$. ولما كانت $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ فإن $x' = x''$.
لنرمز للقيمة المشتركة لـ x' و x'' بالرمز x فيكون $x' = x'' = x$.
عندئذ يكون $a_n \leq x \leq b_n$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$.
وبالتالي يكون $x \in \bigcap_{n\in\mathcal{N}^*}[a_n , b_n]$
بقي اثبات وحدانية العدد x الذي ينتمي الى جميع الفترات $[a_n , b_n]$ المفروضة . من أجل هذا ، نفرض جدلاً أنه يوجد عدد حقيقـــي آخر x_1 بحيث أن $x_1 \neq x$ و $x_1 \in \bigcap_{n\in\mathcal{N}^*}[a_n , b_n]$.
عندئذ يكون : $b_n - a_n \geq |x_1 - x| > 0$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$.
ومنه [بحسب المبرهنة (٢) في ٢ ــ ٥] يكون :

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \geq \lim_{n\to\infty}(|x_1 - x|) = |x_1 - x| > 0$$

وهذا يعني أن المتغير $(b_n - a_n)$ لا يسعى الى الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$ مما يناقص الشرط المفروض . وبهذا يتم المطلوب اثباتــه .

٢ ـ ١٠ ـ المتتاليات الجزئية :

لتكن لدينا المتتالية العددية x_1 و x_2 ، x_3 و ... و x_n و ...
ولنختر من بين حدودها حداً سنرمز له بالرمز x_{n_1} ثم لنحذف من هذه المتتالية $\{x_n\}$ الحدود :
x_1 و x_2 و ... ، x_{n_1} فتبقى لدينا الحدود x_{n_1+1} و x_{n_1+2} و ... ،
ثم لنختر من بين هذه الحدود المتبقية حداً سنرمز له بالرمز x_{n_2}
... وهكذا سنحصل على المتتالية الجديدة التالية :

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \dots\dots,\ x_{n_k},\ \dots$$

تدعى هذه المتتالية الجديدة بـ ((متتالية جزئية)) من المتتالية $\{x_n\}$.
ويكون الحد العام لهذه المتتالية الجزئية هو x_{n_k} . ولذلك أنكتبها بشكل مختصر بالصورة $\{x_{n_k}\}$. وتجدر الاشارة الى أن رقم الحد x_{n_k} في المتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$ يتعيّن ليس بواسطة n بل بواسطة k . والى جانب ذلك ، فإنّ :

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$. وسنبرهن الآن بالاستقراء على أن $n_k \geq k$ من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$. وهذا يعني أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ يكون الحد x_{n_k} إما يساوي x_k أو يساوي أحد الحدود التي تلي الحد x_k في المتتالية $\{x_n\}$:
بالحقيقة ، من أجل $k = 1$ تكون العلاقة $n_1 \geq 1$ صحيحة لأنّ

x_{n_1} هو إما x_1 أو أحد الحدود التي تلي x_1 في المتتالية $\{x_n\}$ • لنفرض أن المتباينة $n_m \geqslant m$ صحيحة من أجل $k = m$ • عندئذ نجد أن $n_{m+1} \geqslant n_m + 1 \geqslant m+1$ •
وبذلك نكون قد أثبتنا ماأردناه •

مثال (١) :

لتكن لدينا المتتالية $\{n\}$ أيْ المتتالية :
$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ • عندئذ تكون كل من المتتاليات الآتية متتالية جزئية من المتتالية $\{n\}$:

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$$

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

$$2, 5, 10, 17, \dots, n^2+1, \dots$$

هذا وتوجد متتاليات جزئية أخرى من المتتالية الأصلية المفروضة $\{n\}$ •

ملاحظة (١) :

من الممكن أن تتطابق المتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$ مع المتتالية الأصلية : $\{x_k\}$ ، وعندئذ $x_{n_k} = x_k$ ، حيث : $k = 1, 2, 3, \dots$ وبذلك يمكننا أن نقول إن كل متتالية تكون متتالية جزئية من نفسها •

ملاحظة (٢) :

يمكننا كتابة تعريف المتتالية الجزئية بالشكل التالي :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية عددية ، ولنأخذ المتتالية $\{x_{n_k}\}$ التي مجموعة قيمها تؤلف جزءاً من مجموعة قيم المتتالية $\{x_n\}$ ، والتي أدلة حدودها تؤلف المتتالية $\{n_k\}$ من الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر التي تحقق مايلي :

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

عندئذ نقول عن المتتالية $\{x_{n_k}\}$ إنها متتالية جزئية من المتتالية المفروضة $\{x_n\}$.

تعريف :

اذا كانت المتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$ متقاربة من b فإننا نسمي نهايتها b بـ ((نهاية جزئية)) للمتتالية الأصلية $\{x_n\}$.

مبرهنة (١) :

تكون المتتالية العددية $\{x_n\}$ متقاربة من a عندما وفقط عندما تكون كل متتالية جزئية منها متقاربة من a .

الاثبات :

١) لنفرض أن كل متتالية جزئية من المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من a . عندئذ تكون المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من a لأنها متتالية جزئية من نفسها .

٢) لنفرض أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من a . ولنأخذ متتالية جزئية اختيارية منها ولتكن $\{x_{n_k}\}$. ثم لنأخذ $\varepsilon \in \overset{(+)}{R}$. عندئذ يوجد $N \in \overset{*}{N}$ بحيث يكون :

$$n \geq N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

لما كان $n_k \geq k$ من أجل كل k من $\overset{*}{N}$ فإن x_{n_k} إما أن يساوي x_k أو أن يكون واقعاً على يمين الحد x_k في المتتالية

$$x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } x_3 \text{ و } \cdots\cdots \text{ و } x_n \text{ و } \cdots\cdots$$

ومنه يكون :

$$k \geq N \Longrightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

إذن فالمتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$ متقاربة من a .

وبهذا يتم المطلوب اثباته .

مثال (٢) :

ادرس تقارب المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية التالية :

$$a \text{ و } b \text{ و } a \text{ و } b \text{ و } a \text{ و } b \text{ و } \cdots\cdots\cdots$$

حيث a و b عددان حقيقيان .

الحل :

نميز بين حالتين :

أ) اذا كان $a = b$ فإنّ المتتالية المفروضة تأخذ الشكل التالي :

$\cdots\cdots\cdots$ و a و a و a و a و a و a و a .

وهذا يعني أنها متقاربة من a .

٢) إذا كان $a \neq b$ فإنّ المتتالية المفروضة تكون متباعدة للأسباب التاليـــــة :

لنفرض جدلاً أن المتتالية المفروضة متقاربة من x . عندئذ تكون كل متتالية جزئية منها متقاربة من x . ومنه فكل من المتتاليتين الجزئيتين منهـــا :

$\cdots\cdots\cdots$ و a و a و a و a و a و a

$\cdots\cdots\cdots$ و b و b و b و b و b و b

تكون متقاربة من x .

ولكن المتتالية الجزئية الاولى تتقارب من a أيضاً ، وبالتالي فإنه يجب أن يكون $x = a$. وكذلك نلاحظ أن المتتالية الجزئية الثانية تتقارب من b أيضاً ، وبالتالي $b = x$. ونستنتج من كل ذلك أن $a = b$ مما يناقض كون $a \neq b$ بالفرض . إذن فالمتتالية المفروضة تكون متباعدة عندمـــا $a \neq b$.

ملاحظـــة (٣) :

عندما يكون $a \neq b$ تسمى المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية

$\cdots\cdots\cdots$ و b و a و b و a و b و a و b و a

بـ ((متتالية متأرجحة)) بين العددين الحقيقيين المختلفين a و b • ويدل المثال السابق على أن كل متتالية عددية متأرجحة بين عددين حقيقيين مختلفين لا يوجد لها نهاية ، وبالتالي فهي متباعدة • وتجدر الاشارة إلى أنه قد تتأرجح المتتالية بين عدة أعداد حقيقية مختلفة ، وتكون بالتالي متباعدة •

مثـــــال (٣) :

المتتالية العددية $\{x_n\}$ بحيث $x_n = (-1)^n$ ، هي متتالية متأرجحة بين العددين المختلفين $+1$ و -1 ، وبالتالي لا توجد لها نهاية ، فهي متباعدة •

مثـــــال (٤) :

اذا كانت لدينا المتتالية المتباعدة $\{x_n\}$ واذا فرضنا أن $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ ، وإذا فرضنا $\{x_{n_k}\}$ متتالية جزئية اختيارية من المتتالية $\{x_n\}$ فإنّ $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k} = +\infty$ • [برهن ذلك؟] •

وتجدر الاشارة إلى أنه إذا كانت لا توجد نهاية لمتتالية ما فإنّ هـــذا لا يعني أنه لا توجد نهاية لكل متتالية جزئية منها • فمثلاً ، لا توجد نهاية للمتتالية $\{(-1)^n\}$ ، إلاّ أنه توجد للمتتالية الجزئيــة منهـــا :

$$1 \text{ و } 1 \text{ و } 1 \text{ و } 1 \text{ و } \cdots\cdots\cdots$$

نهاية مساوية للواحد • وكذلك توجد نهاية مساوية لـ

1 - للمتتالية الجزئية ••••• و -1 و -1 و -1 من

هذه المتتالية $\{(-1)^n\}$ •

مبرهنة (٢) :

إذا كانت المتتالية العددية محدودة فإنه توجد متتالية جزئية منها بحيث أن هذه المتتالية الجزئية تكون متقاربة •

الاثبات :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية محدودة • عندئذ يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث أن $a \leq x_n \leq b$ من أجل كل n من N^* •

وهذا يعني أنه $\forall n \in N^*$ فإن $x_n \in [a, b]$ • لنقسّم هذه الفترة المغلقة $[a, b]$ إلى قسمين متساويين بالنقطة $d = \frac{a+b}{2}$

فنجد أن واحدة على الأقل من الفترتين المغلقتين $[d, b]$ و $[a, d]$ تحوي عدداً غير محدود من حدود المتتالية $\{x_n\}$ • عندئذ نأخذ هذه الفترة التي تحقق هذا الشرط ونرمز لها بالرمز $[a_1, b_1]$ •

(واذا حوت كل من الفترتين $[d, b]$ و $[a, d]$ عدداً غير محدود من حدود المتتالية $\{x_n\}$ فإننا نأخذ إحداهما بمثابة $[a_1, b_1]$) •

ثم نعيد نفس العملية على الفترة $[a_1, b_1]$ فنقسمها الى فترتين مغلقتين متساويتي الطول (بواسطة النقطة $d_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$

الواقعة في منتصفهـــــا) • عند ئذ تحوي واحدة على الأقـل من هاتين الفترتين المغلقتين عدداً غير محدود من حدود المتتاليـــة $\{x_n\}$ • عند ئذ نأخذ هذه الفترة التي تحقق هذا الشـــرط ونرمز لها بالرمز $[a_2 , b_2]$ • (وإذا حوت كل منهما عدداً غير محدود من حدود المتتالية $\{x_n\}$ فإننا نأخذ إحداهما بمثابة $[a_2 , b_2]$) •••••• وهكذا • إن عملية التقسيم المذكورة لا تنتهي أبداً ، ولذلك فإننا بمتابعة التقسيم نحصل على متتالية فترات متداخلة ألا وهـي :

$$[a_1 , b_1] \supseteq [a_2 , b_2] \supseteq [a_3 , b_3] \supseteq \cdots\cdots \supseteq [a_n , b_n] \supseteq \cdots\cdots$$

ونلاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ [برهن ذلك بالاستقراء] • ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ • وبحسب مبرهنة الفترات المتداخلة توجد نقطة $C \in \mathbb{R}$ بحيث يكون : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = C$ •

لنأخذ بمثابة x_{n_1} أحد حدود المتتالية $\{x_n\}$ المنتمية الى $[a_1 , b_1]$ • ثم لنأخذ بمثابة x_{n_2} أحد حدود المتتالية $\{x_n\}$ المنتمية الى $[a_2 , b_2]$ والواقعة على يمين x_{n_1} في المتتالية :

x_1 , x_2 و x_3 و .... وبما أن كل فترة $[a_n , b_n]$ تحوي عدداً غير محدود مـــن حدود المتتالية $\{x_n\}$ فإنه بمتابعة هذا العمل نحصل على المتتالية x_{n_1} و x_{n_2} و .... و x_{n_k} و .... التي تكـــون

متتالية جزئية من المتتالية $\{x_n\}$. وبملاحظة أن $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$

من أجل كل k من N^* ، وأن $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = C$

نستنتج أن $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = C$ [وذلك استناداً الى المبرهنة (٥)

في ٢ ـ ٥] . إذن فالمتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$ متقاربة من C .

وبهذا يتم المطلوب اثباتـــــه .

ملاحظة (٤) :

في المبرهنة (٢) لا يمكن الاستغناء عن شرط كون المتتالية محدودة ،

لأنه توجد متتاليات غير محدودة (مثل المتتالية $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

بحيث أنه لا توجد فيها أية متتالية جزئية متقاربة .

إلّا أن هذا لا يعني أن المتتاليات التي توجد فيها متتاليات جزئية متقاربة

هي المتتاليات المحدودة فقط . فمثلاً ، المتتالية التي حدها العـــام

$x_n = n^{(-1)^n}$ هي متتالية غير محدودة ، ولكن توجد فيها متتالية جزئية

متقاربة إلى نهاية محدودة [يكفي إعطاء n القيم الفردية فقط] .

مبرهنـــــة (٣) :

في كل متتالية عددية غير محدودة $\{x_n\}$ توجد متتالية جزئيـــة

$\{x_{n_k}\}$ بحيث يكون المتغير x_{n_k} لا متناهياً في الكبـــر .

الاثبـــــات :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية عددية غير محدودة . عندئذ يوجد حد x_{n_1}

بحيث أن $|x_{n_1}|>1$ ، ويوجد حد x_{n_2} بحيث أن :

$|x_{n_2}|>2$ و $n_2>n_1$ ، ...... ، ويوجد حد x_{n_k} بحيث أن

$|x_{n_k}|>k$ و $n_k > n_{k-1}$ وهكذا ..... اذن توجد متتالية جزئيـــة

$\{x_{n_k}\}$ بحيث أن $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$.

مبرهنـــة (٤) :

في كل متتالية عددية توجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ بحث يكــو ن المتغير x_{n_k} إما متقارباً أو لا متناهياً في الكبـــر .

الاثبـــات :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية عددية . فإذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ محدودة فإنه بحسب المبرهنة (٢) توجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ بحيث يكون المتغير x_{n_k} متقارباً . أما اذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ غير محدودة فإنه بحسب المبرهنة (٣) توجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ بحيث يكون المتغير x_{n_k} لا متناهياً في الكبـــر .

إذن توجد في المتتالية $\{x_n\}$ متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ بحيث يكـــون المتغير x_{n_k} إما متقارباً أو لا متناهياً في الكبـــر .

تعريـــف :

إذا كان المتغير x_n لا متناهياً في الكبر عندما $n \to \infty$ ، فإننا نقول ، أحياناً ، إن المتتالية $\{x_n\}$ متباعدة إلى اللانهايـــة .

٢ ـ ١١ ـ تعريف :

إذا حذفنا من مجموعة الأعداد الحقيقية عدداً محدوداً (أيْ ـ منتهياً) أو غير محدود (أي غير منته) من عناصرها حسب وجهة نظر معينة ، فإننا نحصل بذلك على مجموعة من الأعداد الحقيقية تقابلها على المحور الحقيقي مجموعة من النقط . ولذلك فإن التعبيرين ((مجموعة أعداد حقيقية)) و ((مجموعة نقط)) يؤديان المعنى نفسه . وبالاضافة إلى هذا فإننا سنقول ((مجموعة حقيقية)) بدلاً من قولنا ((مجموعة أعداد حقيقية)) . واذا أعطينا نقطتين x و y من المحور الحقيقي فإن المسافة بينهما تكون مساوية للعدد $|x-y|$ ويتحقق الآتي (بفرض أن x و y و z أعداد حقيقية) :

$$(I) \qquad |x-y| \geq 0$$

$$(II) \qquad (x=y) \Longleftrightarrow (|x-y|=0)$$

$$(III) \qquad |x-y| = |y-x|$$

$$(IV) \qquad |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

وتجدر الاشارة إلى أنه إذا كان ε عدداً حقيقياً موجباً (أيْ $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$) و a نقطة من المحور الحقيقي (أيْ $a \in \mathbb{R}$) فإن مجموعة النقط x التي يكون من أجلها $|x-a|<\varepsilon$ تساوي الفترة المفتوحة $]a-\varepsilon , a+\varepsilon[$ التي مركزها (منتصفها)

a ونصف طولهـــا ε .

تسمى هذه الفترة المفتوحة $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ بـ ((جوار للنقطة a نصف طوله ε)) .

٢ ــ ١٢ ــ قطر مجموعة حقيقية :

لتكن M مجموعة حقيقية غير خالية . ولتكن :

$H=\{|x-y| : x\in M, y\in M\}$. نرمز لقطر M بالرمز $\delta(M)$ ونعرّفه كما يلـــي :

$$\delta(M)=\begin{cases} \sup H & (\text{عندما تكون } H \text{ محدودة من الأعلى في } \mathbb{R}) \\ +\infty & (\text{عندما تكون } H \text{ غير محدودة من الأعلى في } \mathbb{R}) \end{cases}$$

نلاحظ من التعريف السابق أن $\delta(M) = \sup H$ في مجموعة الاعداد الحقيقية الموسعة $\widetilde{\mathbb{R}}$ وأن $0 \leq \delta(M) \leq +\infty$ وأن :

١) $\left([\delta(M)=0] \Longleftrightarrow [\text{المجموعة } M \text{ تتألف من عنصر واحد فقط}]\right)$

٢) إذا كان $B \supseteq A \neq \phi$ فإنّ $\delta(A) \leq \delta(B)$.

مثـــال :

إن قطر الفترة $[-2\text{ و }3[$ هو 5 ، أيّ $\delta([-2,3[) = 5$.

مثـــــال :

إن قطر الفترة $]-1, 3[$ هو 2 ، أيْ : $\delta(]-1, 3[) = 2$ ،

٢ ــ ١٣ ــ مبرهنـــــة :

لتكن H مجموعة حقيقية غير خالية • عندئذ تكون القضايـــا الآتيـــــة متكافئـــة :

1) المجموعة H محدودة (في $\mathbb{R}$) •

2) يوجد عدد حقيقي غير سالب k بحيث يكون $|x| \leq k$ من أجـــل كل x من H •

3) يوجد عدد حقيقي موجب α بحيث يكون $|x| < \alpha$ من أجـــل كل x مـــن H •

4) لكل نقطة a من $\mathbb{R}$ يوجد جوار $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ نصف طولـــه ε (موجب) مناســـب بحيث يكون $]a-\varepsilon$ و $a+\varepsilon[\supseteq H$ •

5) من أجل كل نقطة a من $\mathbb{R}$ توجد فترة مغلقة من الشكل $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ بحيث يكون $H \subseteq [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ و $(0<\varepsilon)$.

6) $\delta(H) < +\infty$ ، أي : قطر المجموعة H يساوي ــ عدداً حقيقياً محدوداً •

الاثبـــــات :

$1) \Longleftarrow 2)$ • لما كانت المجموعة H محدودة بالفرض فإنها تكون محدودة من الأعلى ومن الأدنى ، وبالتالي يوجد عددان — حقيقيان M و m بحيث يكون $m \leq x \leq M$ من أجل كل x من H • وبفرض $k = max(|m| , |M|)$ نستنتج أن $-k \leq x \leq k$ [لاحظ أن $M \leq |M| \leq k$ وأن $|m| \leq k$ وبالتالي فإن $-k \leq -|m| \leq m$] • إذن — يوجد عدد حقيقي غير سالب k بحيث يكون $-k \leq x \leq k$ وبالتالي $|x| \leq k$ من أجل كل x من H •

$2) \Longleftarrow 3)$ • بحسب الفرض يوجد عدد حقيقي غير سالب k بحيث يكون $|x| \leq k$ من أجل كل x من H • ومنه بفرض $\alpha = k + 1$ نستنتج أنه يوجد عدد حقيقي موجب α بحيث يكون $|x| < \alpha$ من أجل كل x من H •

$3) \Longleftarrow 4)$ • ليكن $a \in \mathbb{R}$. بحسب الفرض يوجد عدد حقيقي موجب α بحيث يكون $|x| < \alpha$ من أجل كل x من H •

لنفرض أن $\beta = max(|\alpha - a| , |-\alpha - a|)$ ثم لنفرض أن $\varepsilon = \beta + 1$ • عندئذ يوجد الجوار $]a - \varepsilon , a + \varepsilon[$ الذي نصف طوله $\varepsilon > 0$ بحيث يكون $H \subseteq]a - \varepsilon , a + \varepsilon[$

[بالحقيقة ، إذا كان $x \in H$ فإن $|x| < \alpha$ وبالتالي $-\alpha < x < \alpha$ • —

ومنـــــــــه :

$$-\varepsilon = -\beta - 1 < -\beta \leqslant -|-\alpha - a| \leqslant -\alpha - a < x - a <$$

$$< \alpha - a \leqslant |\alpha - a| \leqslant \beta < \beta + 1 = \varepsilon$$

أي $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ ؛

وبالتالي $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

4) $\Longleftarrow$ 5) . لتكن $a \in \mathbb{R}$. بحسب الفرض يوجد لـ a جوار $]a-\varepsilon , a+\varepsilon[$ نصف طوله $\varepsilon > 0$ مناسب بحيث يكـــــون $H \subseteq]a-\varepsilon , a+\varepsilon[$. لما كان $]a-\varepsilon , a+\varepsilon[\subset [a-\varepsilon , a+\varepsilon]$ فإنه يمكننا أن نقول بأنه توجد الفترة المغلقة $[a-\varepsilon , a+\varepsilon]$ بحيث يكون $H \subseteq [a-\varepsilon , a+\varepsilon]$ و $(0 < \varepsilon)$.

5) $\Longleftarrow$ 6) . لنثبّت في $\mathbb{R}$ نقطة a . بحسب الفرض توجد فترة مغلقة من الشكل $[a-\varepsilon , a+\varepsilon]$ بحيث يكون $H \subseteq [a-\varepsilon , a+\varepsilon]$ و $(0 < \varepsilon)$. ومنه $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$ من أجل كل x من H ،

وبالتالي $|x - y| \leqslant 2\varepsilon$ من أجل كل عنصرين x و y من H .

ومنه فالمجموعة $\{|x-y| : x, y \in H\}$ تكون محدودة من الأعلى (في $\mathbb{R}$) ، وبالتالي يكـــــون :

$$\delta(H) = \sup\{|x - y| : x, y \in H\} \leqslant 2\varepsilon < +\infty$$

$6) \Longleftarrow 1)$ • لدينا بحسب الفرض $\delta(H) < +\infty$ •

لنضع $r = 1 + \delta(H)$ ولنثبّت في H نقطة h_0 •

عندئذ يكون $|x - h_0| < r$ من أجل كل x من H • وبالتالي

$h_0 - r < x < h_0 + r$ من أجل كل x من H •

ومنه يكون $h_0 + r$ حداً أعلى لـ H (في $\mathbb{R}$) ويكـــــون

$h_0 - r$ حداً أدنى لـ H (في $\mathbb{R}$) ، وهذا يعني أن H

محدودة من الأعلى ومن الأدنى (في $\mathbb{R}$)، أيّ أن H محدودة ـ

(في $\mathbb{R}$) • وبهذا يتم المطلوب اثباتـــــــه •

نستنتج من هذه المبرهنة أن كل قضية من القضايا المتكافئة فيها تعبّـــر

عن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المجموعة الحقيقية غير الخالية محدودة

(فـــــي $\mathbb{R}$) •

٢ ـ ١٤ ـ بعد نقطة عن مجموعة حقيقيـــة :

لتكن M مجموعة حقيقية غير خالية • ولتكن $a \in \mathbb{R}$ •

نرمز لبعد النقطة a عن المجموعة M بالرمز $d(a, M)$

ونعرّفه كما يلـــــــــي :

$$d(a, M) = \inf\{|x - a| : x \in M\}$$

نلاحظ أن $0 \leq d(a, M) < +\infty$ ، وأنه إذا كان $a \in M$

فإنّ $d(a, M) = 0$ إلاّ أنه إذا كان $d(a, M) = 0$

فليس من الضروري أن يكون $a \in M$. هذا ويمكن كتابة تعريف أعم لحساب البعد (أو المسافة) بين مجموعتين حقيقيتين غير خاليتين A و B كما يلي :

$$d(A,B) = \inf\{|a-b| : a \in A \;,\; b \in B\}$$

ونلاحظ أن $0 \leq d(A,B) < +\infty$.

٢ ـ ١٥ ـ نقطة التجمع (التراكم) :

نقول عن نقطة ما x إنها نقطة تجمع لمجموعة حقيقية M إذا حوى كل جوار لهذه النقطة x عدداً غير محدود من عناصر المجموعة M . ينتج من هذا التعريف أنه اذا وجدت لمجموعة حقيقية نقطة تجمع واحدة على الأقل فإن هذه المجموعة تكون غير منتهية . ولهذا فإنه لا توجد لكل مجموعة حقيقية منتهية أيةُ نقطةِ تجمع .

ملاحظة : قد تسمى نقطة التجمع في بعض الأحيان بـ ((نقطة تراكم)) .

٢ ـ ١٦ ـ مبرهنة :

لتكن M مجموعة حقيقية و x نقطة من المحور الحقيقي .

عندئذ : $\Big(\big[x$ نقطة تجمع لـ $M\big] \Longleftrightarrow \big[\forall$ الجوار $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ للنقطة x فإنّ $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap M \setminus \{x\} \neq \phi\big]\Big)$

الاثبات :

١ً) ($\Leftarrow$) : لدينا بالفرض أن x هي نقطة تجمع لـ M .
عندئذ يحوي كل جوار $]x-\varepsilon , x+\varepsilon[$ للنقطة x عدداً غير محدود من عناصر المجموعة M . ومنه $\forall$ الجوار $]x-\varepsilon , x+\varepsilon[$ للنقطة x فإنّ :

$$]x-\varepsilon , x+\varepsilon[\, \cap M \setminus \{x\} \neq \phi \, .$$

٢ً) ($\Rightarrow$) : لدينا بالفرض أنه $\forall$ الجوار $]x-\varepsilon , x+\varepsilon[$ للنقطة x فإنّ $]x-\varepsilon , x+\varepsilon[\, \cap M\setminus\{x\} \neq \phi$.
ولنفرض جدلاً أنه يوجد جوار للنقطة x وليكن $N_x =]x-r , x+r[$ بحيث أن هذا الجوار يحوي عدداً محدوداً من عناصر المجموعة M . ولنفرض أن q_1 ، q_2 و ..... و q_n هي نقاط المجموعة $N_x \cap M$ التي كل منها لا تتطابق مع x . ثم لنفرض أن :

$$\alpha = \min\left(|q_1-x| \text{ و } |q_2-x| \text{ و } \cdots \text{ و } |q_n-x|\right)$$

فيكون $\alpha > 0$. ومنه $]x-\alpha , x+\alpha[\, \cap M\setminus\{x\} = \phi$ ؛
لأنه لوكان $]x-\alpha , x+\alpha[\, \cap M\setminus\{x\} \neq \phi$
لكان يوجد عنصر واحد على الأقل مثل y بحيث أن $y \in]x-\alpha , x+\alpha[$ و $y \in M$ و $y \neq x$. ومنه لكان $y \in N_x \cap M$ (باعتبار أن $]x-\alpha , x+\alpha[\, \subseteq N_x$) و $y \neq x$. ومنه لكان $y \in \{q_1 , q_2 \text{ و } \cdots \text{ و } q_n\}$.

ومنـــه لكان $y = q_1$ (مثلاً) وبالتالي لكان $q_1 \in]x-\alpha , x+\alpha[$.

ومنه لكان $|q_1 - x| < \alpha$ في حيـن أ ن

$\alpha \leqslant |q_1 - x|$.

إذن يوجد الجوار $]x-\alpha , x+\alpha[$ بحيث أن :

$]x-\alpha , x+\alpha[\cap M \setminus \{x\} = \phi$ مما يناقص الفـــــــرض .

مثـــــال (١) :

للمجموعة الحقيقية غير المنتهية $\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \}$ نقطـة

تجمع واحدة فقط ألا وهي العدد الحقيقي صفــــر .

مثـــــال (٢) :

لا توجد لمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ أية نقطة تجمـــع .

مثـــــال (٣) :

كل عدد حقيقي هو نقطة تجمع لمجموعة الأعداد المنطقة $\mathbb{Q}$.

مثـــــال (٤) :

كل نقطة من نقاط الفترة $[a , b]$ ، حيث $a \neq b$ ، تكــون

نقطة تجمع لهذه الفتـــــرة .

ملاحظـة : إن نقطة التجمع لمجموعة ماقد لا تنتمي إلى هذه المجموعة

وقد تنتمي إليها [انظر المثالين (٤) و (١)] .

٢ ـ ٧ ـ ١ ـ تعاريـــــف :

نقول عن نقطة ما x من المجموعة الحقيقية M إنهامنعزلة في M اذا وفقط اذا كان يوجد جوار لـ x لا تنتمي له أيـــة نقطة أخرى من نقط هذه المجموعة M .

ملاحظـــة : النقطة المنعزلة في M تنتمي إلى M .

نقول عن نقطة ما x إنها داخلية في M اذا وفقط اذا كـــان يوجد جوار لـ x مثل $]x-\varepsilon , x+\varepsilon[$ بحيث أن : $]x-\varepsilon , x+\varepsilon[\subseteq M$. ينتج من هذا التعريف أنه إذا كانت x نقطـة داخلية في M فإن $x \in M$. إلاّ أن العكس غير صحيح فـــي الحالـــة العامـــة .

مثـــــال :

لنفرض أن $M = [0,1] \cup \{2\}$. عندئذ تكـــون النقطة 2 نقطة منعزلة في M وتكون كل نقطة من نقاط الفتـرة المفتوحة $]0,1[$ نقطة داخلية في M . أما النقطتان 0 و 1 فكل منهما ليست داخلية وليست منعزلة في M ، إلاّ أن كلاً منهمـــا تكون نقطـــة تجمـــع لـ M .

يرمز لمجموعة النقاط الداخلية للمجموعة M بالرمز M^0 . عندئـــذ

يكون $M \subseteq \overset{\circ}{M}$. ونقول عن المجموعة الحقيقية M إنهـــا مفتوحة (في $\mathbb{R}$) اذا وفقط اذا كان $M = \overset{\circ}{M}$. ونقول عـــن المجموعة الحقيقية M إنها مغلقة (في $\mathbb{R}$) اذا وفقط اذا كانـت M تحوي مجموعة نقاط تجمعهـــــا .

نتيجـــــة :

I . كل مجموعة حقيقية منتهية تكون مغلقة (في $\mathbb{R}$) .

II . اذا كانت x نقطة اختيارية من $\mathbb{R}$ فإن كل جـــوار لـ x يكون مجموعة مفتوحة (في $\mathbb{R}$) .

III . إذا كان $-\infty < a < b < +\infty$ فإن الفترة المفتوحـــة $]a, b[$ تكون مجموعة مفتوحة وغير مغلقة (في $\mathbb{R}$)

IV . إذا كان $-\infty < a < b < +\infty$ فإن الفترة المغلقـــة $[a, b]$ تكون مجموعة مغلقة وغير مفتوحة (في $\mathbb{R}$)

٢ ـ ١٨ ـ مبرهنـــة :

لتكن M مجموعة حقيقية . عند ئذ :

([المجموعة M تكون مفتوحة (في $\mathbb{R}$)] $\Longleftrightarrow$ [المجموعـــة ($\mathbb{R} \setminus M$) تكون مغلقة (في $\mathbb{R}$)])

الا ثبـــــات :

١) ($\Longleftarrow$) : لدينا (بالفرض) المجموعة M المفتوحة — (في $\mathbb{R}$) . عندئذ $M = M^{\circ}$. ولنفرض جدلاً أن المجموعة ($\mathbb{R} \setminus M$) ليست مغلقة (في $\mathbb{R}$) . عندئذ توجد نقطة تجمع لهذه المجموعة $\mathbb{R} \setminus M$ [واحدة على الأقل] مثل x بحيث يكون $x \notin \mathbb{R} \setminus M$. إذن $x \in M$ و x نقطة تجمع ل $\mathbb{R} \setminus M$. ومنه $x \in M^{\circ}$ و x نقطة تجمع ل $\mathbb{R} \setminus M$.

ومنه يوجد جوار ل x مثل $]x-\varepsilon , x+\varepsilon[$ بحيث أن :

$]x-\varepsilon , x+\varepsilon[\subseteq M$ و x نقطة تجمع ل ($\mathbb{R} \setminus M$) . ومنه :

$]x-\varepsilon , x+\varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus M) = \phi$ و x نقطة تجمع ل $(\mathbb{R} \setminus M)$

وهذا غير ممكن .

اذن ($\mathbb{R} \setminus M$) تكون مغلقة (في $\mathbb{R}$) وهو المطلوب الأول .

٢) ($\Longrightarrow$) : لدينا (بالفرض) المجموعة $\mathbb{R} \setminus M$ المغلقة (في $\mathbb{R}$) .

لتكن $x \in M$. عندئذ يكون $x \notin (\mathbb{R} \setminus M)$ وبالتالي فإن x لا تكون نقطة تجمع ل ($\mathbb{R} \setminus M$) وهذا يعني أنه يوجد جوار ل x مثل $]x-\varepsilon , x+\varepsilon[$ بحيث يكون :

$]x-\varepsilon , x+\varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus M) \setminus \{x\} = \phi$ وبالتالي :

$]x-\varepsilon , x+\varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus M) = \phi$ طالما أن $x \notin (\mathbb{R} \setminus M)$.

ومنه يكون $]x-\varepsilon , x+\varepsilon[\subseteq M$.

وبذلك أمكننا إيجاد الجوار $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ للنقطة x بحيث أن $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq M$ وهذا يعني أن x نقطة داخلية في M ، أي $x \in M^\circ$ • وبما أن x نقطة اختيارية من M فإننا نكون قد برهنا على أن $M \subseteq M^\circ$ • ولما كان $M^\circ \subseteq M$ دوماً فإنّ $M = M^\circ$ وهذا يعني أن المجموعة M مفتوحة (في $\mathbb{R}$) • وبهذا يتم اثبات المطلوب •

نقول عن نقطة x إنها خارجية بالنسبة لمجموعة حقيقية M اذا وفقط اذا كانت x نقطة داخلية في $\mathbb{R} \setminus M$ • ينتج من هذا التعريف أن قولنا ((x نقطة خارجية بالنسبة لـ M)) يكافئ قولنا : (($x \notin M$ ويوجد جوار لـ x لا تنتمي أية نقطة منه إلى M))

نقول عن نقطة x ، من المجموعة الحقيقية M أو ليست منها ، إنها نقطة محيطية للمجموعة M اذا وفقط اذا كان يوجد في كل جوار لهذه النقطة x نقطة واحدة على الاقل تنتمي الى M ونقطة واحدة على الاقل تنتمي الى ($\mathbb{R} \setminus M$) •

٢ ــ ١٩ مبرهنة بولزانو ــ فايرشتراس :

لكل مجموعة حقيقية محدودة وغير منتهية نقطة تجمع واحدة على الأقل .

الاثبات :

لتكن M مجموعة حقيقية محدودة وغير منتهية و $x \in \mathbb{R}$.
عند ئذ توجد فترة مغلقة من الشكل $[x-\varepsilon , x+\varepsilon]$ طولها $2\varepsilon > 0$
بحيث يكون $M \subseteq [x-\varepsilon , x+\varepsilon]$. وبفرض $a = x - \varepsilon$ و $b = x + \varepsilon$
يكون $I_0 = [a , b] \supseteq M$. ثم بفرض $c = \frac{a+b}{2}$
نستنتج أن $[a , b] = [a , c] \cup [c , b]$ وأن واحدة على الأقل
من الفترتين المغلقتين $[c , b]$ و $[a , c]$ تحوي عدداً غير
محدود من نقط المجموعة M . ولهذا سنأخذ من بين الفترتين
$[c , b]$ و $[a , c]$ تلك التي تحوي عدداً غير محدود من نقط
المجموعة M ، واذا حوت كل منهما عدداً غير محدود من نقط M
فإننا نأخذ اليسرى منهما .

وبهذا نحصل على فترة مغلقة I_1 طولها ε ومحتواة في I_0 وتحوي
عدداً غير محدود من نقط M . نعيد نفس العملية على I_1 فنقسمها الى
فترتين مغلقتين متساويتي الطول (بواسطة النقطة الواقعة في منتصفها) .
عند ئذ تحوي واحدة على الأقل من هاتين الفترتين المغلقتين عدداً
غير محدود من نقط M . واذا حوت كل منهما عدداً غير محدود من
نقط M فإننا نأخذ اليسرى منهما . وبهذا نحصل على فترة
مغلقة I_2 طولها $\frac{\varepsilon}{2}$ ومحتواة في I_1 وتحوي عدداً غير
محدود من نقط M . نتابع العملية فنحصل على المتتالية $\{ I_n \}$

من الفترات المغلقة ، حيث $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$.

ونلاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن طول الفترة المغلقة I_n هو $\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$ ؛ وبالتالي فإنّ $\lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = 0$.

ومنه نستنتج استناداً إلى مبرهنة الفترات المتداخلة أنه توجد نقطة وحيدة y تنتمي إلى جميع الفترات I_n .

ونلاحظ أيضاً أنه إذا كان r عدداً حقيقياً موجباً مفروضاً، فبإمكاننا اختيار عدد صحيح موجب N بحيث يكون $\frac{\varepsilon}{2^{N-1}} < r$.

ومنه يكون : $I_N \subseteq]y-r, y+r[$ للأسباب التالية :

((إذا كان $z \in I_N$ فإنّ $y, z \in I_N$ وبالتالي فإنّ $|z-y| \leq \frac{\varepsilon}{2^{N-1}} < r$ وهذا يعني أن $y-r < z < y+r$. ومنه $z \in]y-r, y+r[$)) .

وبما أن I_N يحوي عدداً غير محدود من نقط M فإن الجوار $]y-r, y+r[$ للنقطة y يحوي عدداً غير محدود من نقط M . وهذا يعني أن y نقطة تجمع لـ M وبهذا يتم المطلوب اثباته .

٢ ـ ٢٠ ـ المجموعة المتراصة :

نقول عن المجموعة الحقيقية K إنها متراصة (في $\mathbb{R}$) اذا وفقط اذا كانت K مغلقة ومحدودة (في $\mathbb{R}$) .

مثـــــال : كل فترة مغلقة $[a,b]$ تكون متراصة (في $\mathbb{R}$)،

وكل مجموعة حقيقية منتهية وغير فارغة تكون متراصة (في $\mathbb{R}$) .

لنفرض أنه لدينا مجموعة حقيقية متراصة M ، وأننا غطينا كـــل نقطة منها x بجوار $N_x =]x-\varepsilon , x+\varepsilon[$ لـ x ، فعندئذ نحتاج بوجه عام الى مجموعة غير منتهية من الجوارات N_x كي نغطـي جميع نقط M ، غير أن مبرهنة ها ين ـ بوريل الآتية تشـــير الى أنه يكفي عدد محدود من الجوارات لتغطية مجموعة متراصـــة .

٢ ـ ٢١ ـ مبرهنة هاين ـ بوريل : إذا تغطت كل نقطة x من مجموعة حقيقية متراصة M بجوار واحد على الأقل $N_x =]x-\varepsilon , x+\varepsilon[$ فإنه يكفي عدد محدود من هذه الجوارات لتغطية المجموعة M .

الاثبـــــــات :

لنفرض جدلاً أنه يلزمنا عدد غير محدود من الجوارات N_x لتغطية المجموعة الحقيقية المتراصة M . لما كانت M محدودة (في $\mathbb{R}$) فإنه توجد فترة مغلقة I_1 بحيث يكون $M \subseteq I_1$. لنقسم I_1 الى فترتين مغلقتين متساويتي الطول (بواسطة النقطـــة الواقعة في منتصفها) فنحصل بذلك على مجموعتين جزئيتين من M واقعتين في هاتين الفترتين المغلقتين، وبما أنه يلزمنا عدد غير محدود من

الجوارات N_x لتغطية M فمن الواضح أنه يلزمنا لتغطيةواحدة على الأقل من هاتين المجموعتين الجزئيتين عدد غير محدود من الجوارات N_x . لنرمز للفترة المغلقة التي تقع فيها هذه المجموعة الجزئية بـ I_2 . نتابع العملية مرة ثانية فنحصل على I_3 وهكذا .... فتتكون لدينا المتتالية $\{I_n\}$ من الفترات المغلقة التي تحقق الشرط $I_{n+1} \subseteq I_n$ من أجل كل n من N^* ، والتي تسعى أطوالها إلى الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$ ، والتي يحوي كل منها مجموعة جزئية من M يلزم لتغطيتها عدد غير محدود من الجوارات N_x . إلاّ أن هذا الأمر الأخير مستحيل طالما أن المجموعة M مغلقة ، وذلك لأنه إذا كانت y تلك النقطة التي تنتمي لكل فترة مغلقة I_n ((حسب مبرهنة الفترات المتداخلة)) فإنها تكون نقطة تجمع لـ M وهي تنتمي بالتالي الى M . ولذا فإنها تغطى بأحد الجوارات N_x وليكن هذا الجوار هو N_y . لنختر بعد ذلك عدداً صحيحاً موجباً p على شكل يكون فيه طول الفترة المغلقة I_p أصغر من نصف طول الجوار N_y ، فعندئذ يغطي الجوار N_y كل المجموعة الجزئية (من M) المحتواة في I_p . اذن لزم جوار واحد فقط لتغطية هذه المجموعة الجزئية في حين وجدنا أنه يلزم لتغطيتها عدد غير محدود من الجوارات . إن

هذا التناقض يشير إلى خطأ ماافترضناه في بداية الاثبات ، وبالتالي فإن المبرهنة صحيحة فعــــــلاً .

٢ ـ ٢٢ ـ النهاية العليا والنهاية الدنيا للمتتالية :

لتكن $\{S_n\}$ متتالية عددية . ولتكن H مجموعة الأعداد x (المأخوذة من مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة $\tilde{\mathbb{R}}$) بحيث أن $S_{n_k} \longrightarrow x$ من أجل متتالية جزئية $\{S_{n_k}\}$ من المتتالية $\{S_n\}$.ومنه فإن هذه المجموعة H تحوي كـــــل النهايات الجزئية للمتتالية $\{S_n\}$ ، وربما تحوي العددين $+\infty$ و $-\infty$ [لاحظ أنّ : $H \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$]. لنضع $S^* = \sup H$ و $S_* = \inf H$ في $\tilde{\mathbb{R}}$. عندئذ نسمي العددين S^* و S_* بـ ((النهاية العليا)) و ((النهاية الدنيا)) للمتتالية $\{S_n\}$ علــى الترتيب . ونرمز لها تين النهايتين كما يلــــــي :

$$S^* = \overline{\lim_{n \to \infty}} S_n \quad \text{و} \quad S_* = \underline{\lim_{n \to \infty}} S_n .$$

مبرهنـــــة (١) :

إذا كانت F مجموعة كل النهايات الجزئية لمتتالية $\{x_n\}$ فإنّ F تكون مغلقة (في $\mathbb{R}$) .

الاثبــــــات :

لنفرض أن E هي مجموعة قيم المتتالية $\{x_n\}$ • ولنفرض أن

q نقطة تجمع لـ F • وسنثبت أن $q \in F$ كما يلـــــي :

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ • لما كانت q نقطة تجمع لـ F فإنه توجـــد

$P \in F$ بحيث يكون $0 < |P - q| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ • وبما أن $P \in F$

فإنه من أجل حد معين x_n يكون $|P - x_n| < |P - q|$ •

ومنه $x_n \neq q$ و $0 < |x_n - q| \leq |x_n - P| + |P - q| < \varepsilon$ •

وبالتالي (بملاحظة أن $x_n \in E$) نستنتج أن $]q-\varepsilon, q+\varepsilon[\cap E \setminus \{q\} \neq \phi$

وبذلك يمكننا أن نقول بأن q هي نقطة تجمع لـ E .

ومنه لنختر n_1 بحيث يكون $|x_{n_1} - q| < 1$ •

ثم لنفرض أننا قد اخترنا n_{i-1} و •••••• و n_1 فنستنتج أنه يوجد

عدد صحيح n_i بحيث يكون $n_i > n_{i-1}$ و $|x_{n_i} - q| < \dfrac{1}{i}$ •••

وهكذا.ومنه نحصل على المتتالية الجزئية $\{x_{n_i}\}$ من المتتالية $\{x_n\}$ •

وهذه المتتالية الجزئية $\{x_{n_i}\}$ تتقارب من q لأنه اذا كان

$\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{(+)}$ فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر N_{ε_0} بحيث يكون

$\dfrac{1}{N_{\varepsilon_0}} < \varepsilon_0$ وبالتالي يكـــــون :

$$i \geq N_{\varepsilon_0} \Rightarrow |x_{n_i} - q| < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{N_{\varepsilon_0}} < \varepsilon_0$$

اذن q تكون نهاية جزئية للمتتالية $\{x_n\}$ ، وهذا يعني أن $q \in F$

اذن F مغلقة (في $\mathbb{R}$) وهو المطلوب اثباتــه .

نتيجـــــة :

١) إذا كانت q نقطة تجمع للمجموعة E ، التي هــــي مجموعة قيم متتالية $\{x_n\}$ ، فإنه q تكون نهاية جزئيــة للمتتالية $\{x_n\}$.

٢) إذا كانت q نقطة تجمع لمجموعة حقيقية E فإنه توجـد متتالية $\{x_n\}$ من عناصر المجموعة E بحيث يكــــون

$$\lim_{n \to \infty} x_n = q \quad .$$

مبرهنـــــة (٢) :

لتكن $\{S_n\}$ متتالية عددية . ولتكن H و S^* و S_* هي الرمـوز المعرفة أعلاه في هذا البند ٢ ــ ٢٢. عندئذ تتمتع S^* بالخاصتيـن التاليتيــــــن :

(أ) $S^* \in H$.

(ب) إذا كان $S^* < x$ فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفـر N بحيث يكون $S_n < x$ عندما $n \geqslant N$.

زد على ذلك ، فإن S^* يكون العدد الوحيد الذي يتمتـــع بالخاصتين (أ) و (ب) . كما تتمتع S_* بالخاصتين التاليتين :

(I) $S_* \in H$.

(II) إذا كان $x < S_*$ فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر N بحيث يكون $x < S_n$ عندما $n \geq N$.

زد على ذلك ، فإن S_* يكون العدد الوحيد الذي يتمتع بالخاصتين (I) و (II) .

الاثبات :

إذا كانت $S^* = +\infty$ فإن المجموعة H تكون غير محدودة من الأعلى (في $\mathbb{R}$) وبالتالي تكون المتتالية $\{S_n\}$ غير محدودة من الأعلى [لأنه لو كانت المتتالية $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى لكان يوجد عدد حقيقي r بحيث أنه $\forall n \in N^*$ فإنّ $S_n \leq r$ ، وبالتالي لكانت كل متتالية جزئية من المتتالية $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي r ، ومنه لكانت كل نهاية جزئية لـ $\{S_n\}$ ليست أكبر من r ولكان $+\infty \notin H$ ، $-\infty \notin H$ وبالتالي لكان $\sup H \leq r$ وهذا غير ممكن لأنّ $\sup H = S^* = +\infty$] .
وبما أن المتتالية $\{S_n\}$ غير محدودة من الأعلى فإنه يوجد حد S_{n_1} بحيث أن $|S_{n_1}| > 1$ ، ويوجد حد S_{n_2} بحيث أن $|S_{n_2}| > 2$ و $n_2 > n_1$ ، ... ، ويوجد حد S_{n_k} بحيث أن $|S_{n_k}| > k$ و $n_k > n_{k-1}$ وهكذا .

اذن توجد متتالية جزئية $\{S_{n_k}\}$ بحيث أن $S_{n_k} \longrightarrow +\infty$.
وهذا يعني أن $S^* = +\infty \in H$

أما اذا كانت $S^* \in \mathbb{R}$ فإن المجموعة H تكون محدودة من الأعلى (في $\mathbb{R}$) ، وبالتالي توجد نهاية جزئية واحدة على الأقل للمتتالية $\{S_n\}$. ومنه $S^* \in H$ لأنه لو كان $S^* \notin H$ لكان ، من أجل كل h من $\mathbb{R}^{(+)}$ ، يوجد في H عنصر واحد على الأقل مثل x بحيث أن $S^* < S^* + h$ ، $S^* - h < x < S^*$ ومنه لكان (من أجل كل h من $\mathbb{R}^{(+)}$) $]S^* - h , S^* + h[\cap H \setminus \{S^*\} \neq \phi$ ،
وبالتالي لكانت S^* نقطة تجمع ل H و $S^* \notin H$ مما يناقض كون H مغلقة بحسب المبرهنة (١). أما اذا كانت $S^* = -\infty$ فإن H تتألف من عنصر واحد فقط ألا وهو $-\infty$ ، ولا توجد أية نهاية جزئية ل $\{S_n\}$. اذن من أجل كل عدد حقيقي M تكون المتباينة $S_n > M$ محققة من أجل عدد محدود من قيم n . ومنه $S_n \longrightarrow -\infty$ وبالتالي: $-\infty = S^* \in H$.

وبذلك نكون قد برهنا على صحة الخاصة (P) في جميع الحالات .

ولاثبات صحة (ب) نفرض جدلاً أنه يوجد x $S^* < x$ بحيث أن $x \leq S_n$ من أجل عدد غير محدود من قيم n . عندئذ يوجد عدد $y \in H$ بحيث يكون $S^* < x \leq y$ وهذا يناقض تعريف S^* .

إذن S^* تحقيق الشرطين (أ) و (ب) • ولاثبات وحدانية S^* الذي يتمتع بـ (أ) و (ب) نفرض موقتاً أنه يوجد عددان مختلفان p و q يحققان (أ) و (ب) بحيث أن $q > p$•
عندئذ يوجد x بحيث أن $p < x < q$ • ومنه يكون $S_n < x$ عندما $n \geqslant N$ ، وذلك لأن p تحقق (ب) • ومنه q لا يمكن أن تحقق (أ) • ويتم اثبات القضية المتعلقة بـ S_* بطريقة مماثلة وبذلك يتم المطلوب برهانه •

مثال (١) : لتكن $\{S_n\}$ متتالية متضمنة جميع الأعداد المنطقة • عندئذ يكون كل عدد حقيقي نهاية جزئية لـ $\{S_n\}$ ويكون :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = +\infty \qquad \text{و} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} = -\infty$$

مثال (٢) : لتكن لدينا المتتالية $\{S_n\}$ التي حدها العام :
$S_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$ • عندئذ يكون :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = 1 \qquad \text{و} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} S_n = -1$$

مبرهنة (٣) :

لتكن لدينا المتتالية العددية $\{S_n\}$ والعدد الحقيقي $S \in \mathbb{R}$.

عندئذ :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} S_n = S \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

الاثبـــــــــات :

لنفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ • عندئذ تكون المتتالية $\{S_n\}$ محدودة ، وتكون كل متتالية جزئية من $\{S_n\}$ متقاربة من S • ومنه $+\infty \notin H$ و $-\infty \notin H$ و $H = \{S\}$ ، حيث H هــي المجموعة المذكورة في نص المبرهنة (٢) • ومنه $\sup H = \inf H = S$ •

أيْ : $\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} S_n = S$ •

وبالعكس ، لنفرض أن $\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} S_n = S$ • بحســـب المبرهنة (٢) نجد أنه $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ فإنّ الفترة المفتوحة : $]S_* - \varepsilon , S^* + \varepsilon[$ تحوي جميع حدود المتتالية $\{S_n\}$ ماعدا ، ربما ، جزءاً منتهياً منها • وبما أن $S^* = S_* = S$ فإنه $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ يكون الجوار $]S - \varepsilon , S + \varepsilon[$ حاوياً جميع حدود المتتالية $\{S_n\}$ مـــاعدا ، ربما ، جزءاً منتهياً منها • أيّ ، من أجل ε يوجد $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون ($n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow S_n \in]S - \varepsilon , S + \varepsilon[$) وبالتالي يكون :

$$n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow |S_n - S| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ • وبهذا يتم المطلوب اثباته •

مبرهنـــــة (٤) :

إذا كان N عدداً طبيعيًا مغايراً للصفر ومثبتـــــاً ،

واذا كان : $(n \geq N \Longrightarrow S_n \leq t_n)$ ، حيث S_n و t_n متغيران ، فإنّ: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} t_n$ و $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} t_n$.

الاثبـــــات :

لنفرض جدلاً أن $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} t_n$ ، عندئذ يوجد $\mathbb{R} \ni x$ بحيث يكون $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n > x > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} t_n$ ، ومنه بحسب المبرهنة (٢) يوجد $N_1 \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون $x > t_n$ عندما $n \geq N_1$ ، ومنه بفرض أن $N_2 = \max(N, N_1)$ نستنتج بحسب شروط المبرهنة الحالية أن $S_n < x$ عندما $n \geq N_2$ ، ومنه $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n \leq x$ مما يناقض كون $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n > x$.

ويبرهن بطريقة مماثلة على أن $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} t_n$ ويتم المطلوب اثباته .

٢ ـ ٢٣ ـ متتاليات كوشـي :

نقول عن المتتالية العددية $\{x_n\}$ إنها متتالية كوشـي اذا وفقط اذا تحقق مايلـي :

" $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ فإنه $E\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون $|x_m - x_n| < \varepsilon$ عندما $m \geq n \geq N_\varepsilon$ " .

مثـــال (١) :

المتتالية العددية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ هي متتالية كوشـــي .

الحـــل : ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ • عند ئذ يوجد $N_\varepsilon \in \mathcal{N}^{*}$ بحيث يكون $\varepsilon < \frac{1}{N_\varepsilon}$. ومنه يكـــون :

$$m \geq n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon \Longrightarrow |x_m - x_n| =$$

$$= |x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

إذن فالمتتالية العددية $\{x_n\}$ ، حيث $x_n = \frac{1}{n}$

هي متتالية كوشـــي •

<u>مبرهنـــة (١) :</u>

إذا كانت المتتالية العددية $\{x_n\}$ متقاربة ، فإنها تكـــون متتاليـــة كوشـــي •

<u>الاثبـــات :</u>

لتكن لدينا المتتالية العددية المتقاربة $\{x_n\}$ • ولنفرض أن نهايتها هي a • عند ئذ يكون $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ • وسنثبت أن المتتالية $\{x_n\}$ هي متتالية كوشي • من أجل هذا ، نأخذ $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ فيكون $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}^{(+)}$ • عند ئذ يوجد $N \in \mathcal{N}^{*}$ بحيث يكون : $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n \geq N$ • ويترتب على هذا أن :

$$m \geq n \geq N \Longrightarrow |x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leqslant |x_m - a| +$$

$$+|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

وبهذا يتم المطلـــوب اثباتـــه •

مبرهنـــة (٢) :

اذا كانت المتتاليةُ العددية $\{x_n\}$ متتاليةَ كوشي، فإنهـــا تكون متقاربـــة •

الا ثبـــــات :

لنفرض أن المتتالية العددية $\{x_n\}$ هي متتالية كوشي • وليكـن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ • عند ئذ يكون $\frac{\varepsilon}{4} \in \mathbb{R}^{(+)}$ • ومنه يوجـــد $N \in \mathbb{N}^{*}$ بحيث يكون $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{4}$ عندما $m \geq n \geq N$ •

ومنه يوجد $N \in \mathbb{N}^{*}$ بحيث يكون $|x_m - x_N| < \frac{\varepsilon}{4}$ عندما $m \geq N$ •

إذن يوجد $N \in \mathbb{N}^{*}$ بحيث يكون $x_m \in \left]x_N - \frac{\varepsilon}{4} , x_N + \frac{\varepsilon}{4}\right[$ عندما $m \geq N$ ، وهذا يعني أن عدد الحدود ، التي يمكن أ ن لا تنتمي إلى الفترة المفتوحة $\left]x_N - \frac{\varepsilon}{4} , x_N + \frac{\varepsilon}{4}\right[$ مـن حدود المتتالية $\{x_n\}$ ، يكون عدداً محدوداً • ولذلك فإن المتتالية $\{x_n\}$ تكون محدودة ، وإن $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq x_N + \frac{\varepsilon}{4}$ وإن $x_N - \frac{\varepsilon}{4} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ وبالتالي يكون $\left]\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n , \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right[\subseteq \left]x_N - \frac{\varepsilon}{4} , x_N + \frac{\varepsilon}{4}\right[$ • ومنـــه

يكون : $\left|\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right| < \varepsilon$ •

وبما أن ε هو عدد حقيقي موجب اختياري فإننا نستنتج أن

$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ • وإذا فرضنا أن $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = x =$

$= \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ فإننا نجد أن x هو عدد حقيقي محدود لأن المتتالية

$\{x_n\}$ محدودة • إذن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ استناداً الى المبرهنة

(٣) في ٢ ــ ٢٢ • وبذلك نكون قد برهنا على أن المتتالية $\{x_n\}$

متقاربة وهو المطلوب اثباتــــــه •

مبرهنة (٣) [اختبار كوشــــــي للمتتاليات] :

لكي تكون المتتاليةُ العددية $\{x_n\}$ متقاربةً يلزم ويكفي أن تكون

هذه المتتالية $\{x_n\}$ متتاليةَ كوشـــــــي •

الاثبـــــــات :

تنتج صحة هذا الاختبار من المبرهنتين (١) و (٢) السابقتيــن •

٢ ــ ٢٤ ــ مبرهنة شــتولتس :

لتكن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتين عدديتين بحيث أن $y_n < y_{n+1}$

من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ وبحيث أن المتغير y_n يكــون

لامتناهياً في الكبر عندما $n \longrightarrow \infty$ • ولنفرض أن المتتالية $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$

متقاربة من a • عندئذ تكون المتتالية $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ متقاربة من a ؛

وبالتالـــــــي يكون :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

الاثبـــــــات :

لنفرض أن $\alpha_n = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a$ • عند ئذ يكـون المتغير α_n لامتناهياً في الصغر عندما $n \to \infty$ وذلك استناداً الى شروط المبرهنة • ثم لنثبّت عدداً طبيعياً مغايراً للصفر $\bar{N}$ ولنفرض أن n هو عدد طبيعي أكبر من $\bar{N}$. عندئذ [بحسب الصيغة التي تعطينا α_n] يكون لدينا:

$$x_{\bar{N}+1} - x_{\bar{N}} = a(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \alpha_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}})$$

$$x_{\bar{N}+2} - x_{\bar{N}+1} = a(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \alpha_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} - x_{n-2} = a(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2})$$

$$x_n - x_{n-1} = a(y_n - y_{n-1}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1})$$

وبجمع هذه الصيغ نجـــــد :

$$x_n - x_{\bar{N}} = a y_n - a y_{\bar{N}} + \alpha_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \alpha_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) +$$

$$+ \cdots + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1})$$

لمـا كان $y_n < y_{n+1}$ (من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$) و y_n لامتناهياً في الكبر عندما $n \to \infty$ فإن قيم المتغير y_n تكون موجبة وتبقى موجبة اعتباراً من قيمة معينة • وبما أننا أخذنا $\bar{N}$ بشكل كيفي فإنه يمكننـــا اعتبار $y_n > 0$ عندما $n \geq \bar{N}$ • وعند ئذ نجد (اســـتناداً إلى المســـاواة الاخيـــرة) أنّ :

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_{\bar N} - a\, y_{\bar N}}{y_n} + \frac{\alpha_{\bar N+1}(y_{\bar N+1} - y_{\bar N}) + \alpha_{\bar N+2}(y_{\bar N+2} - y_{\bar N+1}) + \dots + \alpha_n (y_n - y_{n-1})}{y_n}$$

وبحسب شروط المبرهنة نجد

أنه $\forall\, k \in \{\bar N, \bar N+1, \dots, n-1\}$ فإنّ $y_{k+1} - y_k > 0$.

ولذلك يكون : $\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| \leqslant \left|\frac{x_{\bar N} - a\, y_{\bar N}}{y_n}\right| +$

$$+ \frac{|\alpha_{\bar N+1}|\cdot(y_{\bar N+1} - y_{\bar N}) + |\alpha_{\bar N+2}|\cdot(y_{\bar N+2} - y_{\bar N+1}) + \dots + |\alpha_n|(y_n - y_{n-1})}{y_n} \quad (\ast)$$

لنبرهن الآن على أن المتتالية $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ تتقارب من a . من أجل هذا ، نأخذ عدداً حقيقياً موجباً اختيارياً ε فيكون $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}^{(+)}$.

ومنه يوجد $\bar N \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n \geq \bar N$ ؛ وذلك لأن α_n هو لامتناه في الصغر عندما $n \longrightarrow \infty$. وأيضاً ، من أجل $\frac{\varepsilon}{2}$ ، يوجد عدد طبيعي $N \geqslant \bar N$ بحيث يكون $\left|\frac{x_{\bar N} - a\, y_{\bar N}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n \geqslant N$ وذلك لأنّ العدد $x_{\bar N} - a\, y_{\bar N}$ ثابت ولأنّ المتغير $\frac{1}{y_n}$ يكون لامتناهياً في الصغر عندما $n \longrightarrow \infty$.

لنفرض الآن $N+1 \leqslant n$. عندئذ من ($\ast$) نجد :

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(y_{\bar N+1} - y_{\bar N}) + (y_{\bar N+2} - y_{\bar N+1}) + \dots + (y_n - y_{n-1})}{y_n}$$

أي :

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{y_n - y_{\bar N}}{y_n}$$

وبما أنّ $y_n - y_{\bar N} < y_n$ و $y_n > 0$ عندما $n \geq N$ فإنّ :

$$\frac{y_n - y_{\bar N}}{y_n} < 1 \quad \cdot \qquad \text{إذن :}$$

$$n \geqslant N+1 \Longrightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$. وبهذا يتم المطلوب اثباته

ملاحظـــــــــة : إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية عددية

، و إذا كانت $\{y_n\}$ متتالية عددية بحيث أن $y_n < y_{n+1}$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ وبحيث أن المتغير y_n يكون لامتناهياً في الكبر عندما $\infty \longleftarrow n$ وإذا كان المتغير $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ لامتناهياً في الكبر موجباً (أوسالباً) عندما $\infty \longleftarrow n$ فإن المتغير $\frac{x_n}{y_n}$ يكون لامتناهياً في الكبر عندما $\infty \longleftarrow n$ •

بالحقيقة، لنفرض أن $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A_n$ • عند ئذ يكون ((بحسب الفرض)) المتغير A_n لامتناهياً في الكبر عندما $\infty \longleftarrow n$ ، ويكون [من أجل $1 \leqslant \bar N \leqslant n$] مايلي :

$$x_{\bar N+1} - x_{\bar N} = A_{\bar N+1} (y_{\bar N+1} - y_{\bar N})$$

. . . .

$$x_n - x_{n-1} = A_n (y_n - y_{n-1})$$

وبجمع هذه الصيـــغ نجـــد :

$$x_n - x_{\bar N} = A_{\bar N+1} (y_{\bar N+1} - y_{\bar N}) + \cdots\cdots + A_n (y_n - y_{n-1})$$

ومنـــه :

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{A_{\bar N+1}(y_{\bar N+1} - y_{\bar N}) + \cdots\cdots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n} + \frac{x_{\bar N}}{y_n}$$

وبالتالـــــــــي :

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \geq \left|\frac{A_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1}-y_{\bar{N}})+\cdots+A_n(y_n-y_{n-1})}{y_n}\right| - \left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right| \quad (**)$$

ويمكننا أن نعتبر $y_n > 0$ و $A_n > 0$ عندما $n \geq \bar{N}$.

ليكن $A \in \mathbb{R}^{(+)}$. عندئذ يوجد $\bar{N} \in \mathcal{N}$ بحيث يكون $A_n > 4A$ عندما $n \geq \bar{N}$ ، ويوجد عدد طبيعي $N \geq \bar{N}$ بحيث يكون $\left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right| < A$ و $\frac{y_{\bar{N}}}{y_n} < \frac{1}{2}$ عندما $n \geq N$. (إن وجود N ناتج من كون المتغيرين A_n و y_n لامتناهيين في الكبر عندما $n \to \infty$ ، ومن كون $A_n > 0$ و $y_n > 0$ اعتباراً من قيمة معينة) .

وضوحاً نجد أنه إذا كان $n \geq N$ فإنه بحسب (**) يكون :

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A \cdot \frac{(y_{\bar{N}+1}-y_{\bar{N}})+\cdots\cdots+(y_n-y_{n-1})}{y_n} - \left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right|$$

وبالتالي يكـــــون :

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\cdot\left(1-\frac{y_{\bar{N}}}{y_n}\right) - A > A$$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ ، وهذا يعني أن المتغير $\frac{x_n}{y_n}$ يكون لامتناهيا في الكبر عندمـــــا $n \to \infty$.

أمثلـــــــــة :

1) أثبت أنه إذا كانت المتتالية الحدية $\{a_n\}$ متقاربة من a (أو كان a_n لامتناهياً في الكبر عندما $n \to \infty$) فإن المتتاليـــــة

$\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$ تكون متقاربة من a (أو يكون المتغير $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ لامتناهياً في الكبر عندما $n\to\infty$).

بالحقيقة ، اذا وضعنا $a_1+a_2+\cdots+a_n=x_n$ و $y_n=n$ فإنّ $a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ ، ومنه نجد أن شروط مبرهنة شتولتس (أو شروط الملاحظة السابقة) محققة ، وبالتالي يكون بحسب هذه المبرهنة (أو هذه الملاحظة) :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}a_n$$

.

وكمثال على هذا ، نلاحظ أن $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$

طالما أن $\sqrt[n]{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

2) ادرس تقارب المتتالية العددية $\{a_n\}$ حيث

$$a_n=\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

وحيث k عدد صحيح موجب .

في الواقع ، لنفرض أن :

$x_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$ وأن $y_n=n^{k+1}$. عندئذ يأخذ المتغير a_n الشكل $\frac{x_n}{y_n}$ ، أي $a_n=\frac{x_n}{y_n}$. لندرس تقارب المتتالية $\left\{\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right\}$ فنجد مايلي :

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\frac{n^k}{(k+1)n^k-\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots+(-1)^{k+1}}$$

وبتقسيم بسط ومقام الكسر الناتج على n^k نجد :

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{K+1+\frac{1}{n}[\cdots\cdots\cdots]}$$

حيث للمتغير، الذى لم نكتبه داخل القوسين المتوسطين، توجد نهاية مساوية لـ $\left[-\frac{(K+1)K}{2}\right]$ عندما $n \longrightarrow \infty$ • ومن الصيغة الأخيرة نجد : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{K+1}$ •

إذن نجد أن شروط مبرهنة شتولتس محققة • وبالتالي يكون بحسب هذه المبرهنة :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2^K+\cdots+n^K}{n^{K+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{K+1}$$

ومنه فالمتتالية $\{a_n\}$ تتقارب من $\frac{1}{K+1}$ •

3) ادرس تقارب المتتالية العددية $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$ • حيث $a > 1$ •

في الحقيقة • لنضع $x_n = a^n$ و $y_n = n$ ولندرس تقارب المتتالية $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ حيث نجد

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}(a^n - a^{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a^n\left(1-\frac{1}{a}\right) = +\infty$$

اذن نجد أن شروط الملاحظة (المذكورة بعد مبرهنة شتولتس مباشرة) محققة • وبالتالي يكون بحسب هذه الملاحظة :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n} = +\infty \; .$$

وهذا يعني أن المتغير $\frac{a^n}{n}$ هو لامتناه في الكبر موجب عندما $n \longrightarrow \infty$

اذن فالمتتالية $\left\{ \frac{a^n}{n} \right\}$ ، حيث $a > 1$ هي متتالية متباعدة .

٢ ـ ٢٥ ـ ملاحظة هامة : نلفت الانتباه الى النص التالـــي :

((ليكن a_n متغيراً موجباً ، ولنفرض أن $d = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ؛

حيث $d \in \mathbb{R}$ أو $d = +\infty$ ، عندئذ يكون :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

تطبيق : أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

الحـــل : لنفرض أن $a_n = \frac{n!}{n^n}$ فيكون $a_n > 0$ ونجـــد :

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

اذن ، بحسب النص الســـــابق ،

يكون : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}$.

تطبيق آخر : أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

الحـــل : لنفرض أن $a_n = n!$ فيكون $a_n > 0$ ونجد :

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

ومنـــــه $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

تماريـــــــــن

١) اذا فرضنا أن المتتاليتين العددیتین المتقاربتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تحققان الشرط $x_n \lneqq y_n$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ؛ فبرهن على أنه ليس من الضروري أن يكون $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \lneqq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(ارشـــــاد : خذ $x_n = -\frac{1}{n}$ و $y_n = \frac{1}{n}$) .

٢) هل يمكن أن تكون نهاية متغير موجب x_n ســالبة ، وهل يمكن أن تكون نهاية متغير ســـالب x_n موجبة .

٣) برهن على صحة النصوص التاليـــــــة :

أ — حاصل ضرب مقدار ثابت مغاير للصفر بلا متناه في الكبر هو — لامتناه في الكبـــــر .

ب) — اذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = a < b$ فإنه يوجد $N \in \mathcal{N}^*$ بحيث يكون $x_n < b$ عندما $n \geq N$.

جـ — اذا كانت المتتالية العددية $\{x_n\}$ متناقصة (غير متزايدة) ، ومحدودة من الأدنى ، فإنها تكون متقاربة من أكبر حد أدنـــى لمجموعة قيمهـــــــا .

٤) برهن على صحة النصوص التاليـــــــة :

I) اذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ فإنّ جميع قيم المتغير x_n تكون موجبة ابتداء من عدد معيـــــن n .

II) اذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = a < 0$ فإنّ جميع قيم المتغير x_n تكون سالبة ماعدا (ربما) جزءاً منتهياً منهـــــا .

III) اذا كان لدينا المتغيران x_n و y_n بحيث أن $x_n = y_n$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ ، واذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ و

فإنّ $\lim_{n \to \infty} y_n = b$ $a = b$ •

٥) أوجد نهاية المتغير $x_n = \frac{2n}{n+1} + \frac{\sin n}{n}$ •

(الجـــــــواب : 2) •

٦) برهن أن المتغير x_n هو لامتناه في الكبر عندما $n \to \infty$ •

وذلك بفرض أن $x_{n+1} = (n+1)x_n$ من أجـــــل

كل n من N^* و $x_1 = 1$ •

٧) أثبت أن المتتالية العددية التي حدها العام $x_n = \frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

متباعـــــــــــدة •

٨) اضرب مثالاً على لامتناهيين في الكبر بحيث يكون حاصل طرحهما

لامتناهيا في الصغر • [الجواب : $n + \frac{1}{n}$ و n] •

٩) اضرب مثالاً على متتالية عددية متقاربة وليســت مطردة ؛ ثم اضرب مثالاً على متتالية عددية متباعدة وليست مطردة

[ارشــــــاد :(خذ $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$) و(خذ $x_n = (-1)^n$)] •

١٠) أثبت أنه اذا كانت المتتالية العددية $\{S_n\}$ متقاربة فإنّ المتتالية

العددية $\{|S_n|\}$ تكون متقاربة • هل العكس صحيح ؟ ولماذا ؟

١١) أوجد نهاية المتتالية العددية $\{x_n\}$ في كل مايلـــــــي :

I) $x_n = \frac{2n}{3n+8} - \frac{\cos n}{2n}$ (الجواب : $\frac{2}{3}$)

II) $x_n = \frac{\sin n}{n} + \frac{n+1}{\sqrt{n^2-5n+6}}$ (الجواب: 1)

III) $x_n = \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{n+1}$ (الجواب : 0).

IV) $x_n = \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ (الجواب : 2).

V) $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2}$ (الجواب : 0).

VI) $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+4}$ (الجواب : e).

VII) $x_n = \frac{(\sqrt{n+1})^3 - 1}{(\sqrt{n+1})^3 + 1}$ (الجواب : 1).

VIII) $x_n = \frac{(n+1)(n-2)(n+2)}{n^3-n^2+5n-2}$ (الجواب : 1).

IX) $x_n = \frac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3+3n+2}$ (الجواب : $\frac{1}{3}$).

X) $x_n = \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^3} - \frac{n}{4}$ (الجواب : $\frac{1}{2}$).

XI) $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$ (الجواب : $\frac{1}{2}$).

XII) $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ (الجواب : $\frac{1}{e}$).

١٢) أثبت أن المتتالية العددية $\{x_n\}$ ، حيث :

$x_n = n[\ln(1+n) - \ln n]$ ، متقاربة من الواحد .

١٣) برهن على أنه لا توجد نهاية لكل من المتغيرين

$$x_n = 1 + (-1)^n$$

$$y_n = \sin n + \frac{1}{n}$$

١٤) برهن بطريقة الاستقراء الرياضي على صحة المتباينة :

$(1+h)^m \geq 1+mh$ حيث m عدد طبيعي اختياري و h عدد حقيقي

بحيث $h > -1$. ثم استخدم هذه المتباينة في اثبات أن المتتالية العددية $\{x_n\}$ ، حيث $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ غير متزايدة .

١٥) برهن على أنه توجد نهاية للمتغير x_n ، حيث :
$x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \cdots + \frac{1}{3^n+n}$ ، وهذه النهاية لا تتجاوز العدد $\frac{1}{2}$ وليست سالبة .

١٦) لنفرض أن $S_1 = \sqrt{2}$ و $S_{n+1} = \sqrt{2+S_n}$ بحيث : $n = 1, 2, 3, \ldots$. أثبت أن المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة وأن $S_n < 2$ من أجل كل n من N .

١٧) برهن على أن المتغير $x_n = n^{(-1)^n}$ غير محدود ، وليس لا متناهياً في الكبر (عندما $n \to \infty$) .

١٨) أثبت أن كلاً من المتغيرات التالية هو لا متناه في الصغر عندما $n \to \infty$:

I) $x_n = \frac{1}{n^p}$ حيث p عدد حقيقي موجب .

II) $x_n = \frac{2^n}{n!}$

III) $x_n = \frac{n^k}{a^n}$ حيث $a > 1$ و k عدد حقيقي .

IV) $x_n = n \cdot q^n$ حيث $|q| < 1$.

V) $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

VI) $x_n = \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}$

VII) $x_n = \dfrac{n^{\alpha}}{(1+P)^n}$ حيث $P > 0$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

١٩) اذا كانت $\{I_n\}$ متتالية من الفترات المخلقة $I_n = [a_n , b_n]$ في $\mathbb{R}$ بحيث أن $I_n \supseteq I_{n+1}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، فاثبت أن $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \neq \phi$ وذلك باستخدام مفهوم أصغر حد أعلى أو مفهوم أكبر حد أدنى .

٢٠) برهن على أن المتتالية العددية $\{x_n\}$ تكون متقاربة من العدد a عندما وفقط عندما يكون كل جوار لـ a يحوي جميع حدود هذه المتتالية ماعدا (ربما) جزءاً منتهياً عن هذه الحدود .

٢١) برهن على أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

٢٢) لنفرض أن a و x_1 عددان حقيقيان موجبان وأنّ :

$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n} \right)$ حيث $n = 1, 2, 3, \cdots$.

أثبت أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من $\sqrt{a}$.

٢٣) أثبت أنه من أجل كل متتاليتين عدديتين حقيقيتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ يكـــون :

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$.

٢٤) اذا كانت كل من المتتاليتين العدديتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتالية كوشي فأثبت أن المتتالية العددية $\{|x_n - y_n|\}$ تكون

متقاربـــــــة .

٢٥) ليكن x_1 عدداً حقيقياً موجباً ولنفرض أن $x_{n+1} = \frac{x_n}{2+x_n}$ ،
أثبت أن المتتالية $\{x_n\}$ تكون متقاربة من الصفر .

٢٦) ليكن لدينا المتغير $x_n = a^{\frac{1}{2^n}}$ حيث $a > 0$. أوجد الصيغة التي تربط بين x_{n+1} و x_n وأثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

٢٧) أثبت أن $\bigcap\limits_{n\in N}]0 , \frac{1}{2^n}[= \phi$

٢٨) اذا كانت توجد (في متتالية عددية مطردة) متتالية جزئية متقاربة فأثبت أن هذه المتتالية المطردة تكون متقاربـــة .

٢٩) اضرب مثالاً على مجموعة حقيقية متراصة بحيث يكون لها ثلاث نقـــط تجمع فقـــــط .

٣٠) اضرب مثالاً على مجموعة حقيقية بحيث يوجد تقابل بين مجموعة — نقط تجمعها وبين المجموعة N .

٣١) لتكن A' مجموعة كل نقط التجمع للمجموعة A . والمطلوب :

أ) أثبت أن المجموعة A' تكون مغلقة (في $\mathbb{R}$) .

ب) أثبت أن المجموعة $A \cup A'$ تكون مغلقة (في $\mathbb{R}$) .

٣٢) أثبت أن تقاطع أيّ مجموعتين حقيقيتين مفتوحتين هو مجموعـــة حقيقية مفتوحة ، وأن اتحاد (اجتماع) أيّ عدد من المجموعات — الحقيقية المفتوحة هو مجموعة حقيقية مفتوحة ، ثم أثبت أن اتحاد أيّ

مجموعتين حقيقيتين مغلقتين هو مجموعة حقيقية مغلقة ، وأن تقاطع أيّ عدد من المجموعات الحقيقية المغلقة هو مجموعة حقيقية مغلقة ، ثم اثبت (بالاستقراء) أن تقاطع أيّ عدد محدود من المجموعات الحقيقية المفتوحة هو مجموعة حقيقية مفتوحة ، وأن اتحاد أيّ عدد محدود من المجموعات الحقيقية المغلقة هو مجموعة حقيقية مغلقة ، ثم برهن على أن المجموعة الحقيقية $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n} , \frac{1}{n}[$ تساوي المجموعة الحقيقية $\{0\}$ ثم استنتج أن تقاطع عدد غير محدود من المجموعات المفتوحة (في $\mathbb{R}$) ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة ، ثم استنتج أن اتحاد عدد غير محدود من المجموعات المغلقة (في $\mathbb{R}$) ليس بالضرورة مجموعة مغلقة .

٢٣) أثبت أن كلاً من المجموعتين الحقيقيتين ϕ و $\mathbb{R}$ هي مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن واحد (في $\mathbb{R}$) . ثم أثبت أن الفترة المفتوحة $]0 , 1[$ هي مجموعة مفتوحة وغير مغلقة (في $\mathbb{R}$) ، وأن الفترة نصف المفتوحة $]0 , 1]$ هي مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة (في $\mathbb{R}$) ، وأن مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي مجموعة مغلقة وغير مفتوحة (في $\mathbb{R}$) .

٢٤) لتكن E مجموعة حقيقية مغلقة ومحدودة من الأعلى . وليكن $y = \sup E$. أثبت أن $y \in E$. ثم اكتب نصاً مشابهاً (بفرض أن E محدودة من الأدنى) وبرهن على صحته .

٢٥) بفرض أن $x_1 = a$ ، $x_2 = b$ وأن الحد العام للمتتالية $\{x_n\}$ يعطى بالصيغة $x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$.

$P = \frac{P+P}{2}$

حيث $n \geqslant 3$ ، أثبت أن هذه المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب من $\frac{a+2b}{3}$.

الفصـــل الثالـــث

المتسلسلات (السلاسل) العددية الحقيقية اللانهائية

٢ ــ ١ ــ المفاهيم الاساسية : لتكن لديا المتتالية العددية الحقيقية اللانهائيـــــــــة :

$$a_1 \text{ و } a_2 \text{ و } a_3 \text{ و} \cdots\cdots \text{ و } a_n \text{ و} \cdots\cdots\cdots$$

ولنربط بصورة شكلية جميع حدود هذه المتتالية باشارة الجمع + عندئذ نحصل على المجموع اللانهائي :

$$(١) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$$

الذي يكتب باختصار بالصورة التالية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (أ)

نسمي المجموع (١) أو المجموع (أ) بـ ((متسلسلة عددية حقيقية ــ لانهائية)) ، ونسمي الأعداد a_1 و a_2 و a_3 و $\cdots$ و a_n و$\cdots$ بحدود هذه المتسلسلة ، ونسمي a_n بحيث $n \in N$ ، بالحـــد العام للمتسلسلة (١) أو (أ) . وتجدر الملاحظة بأنه يرمز في بعض الأحيان للحد الاول بالرمز a_0 وللحد الثاني بالرمز a_1 و$\cdots$ وهكـــذا .

نسمي المجاميع $\cdots\cdots$ و $S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$ و $\cdots\cdots$ و

و $S_1 = a_1$ و $S_2 = a_1 + a_2$ و $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ و ب ((المجاميع الجزئية)) للمتسلسلة العددية (١) أو (أ) • وتؤلف هذه المجاميع متتالية عددية $\{S_n\}$ ندعوها ب ((متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة العددية (١) أو (أ))) •

نقول من المتسلسلة العددية الحقيقية اللانهائية (١) أو (أ) إنها متقاربة ومجموعها يساوي S عندما وفقط عندما تكون متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة من S • وإذا كانت المتتالية العددية $\{S_n\}$ متباعدة ، أي : إما $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ أو لا توجد ل S_n أية نهاية عندما $n \longrightarrow \infty$ ، فإننا نقول إن المتسلسلة العددية (١) أو (أ) متباعدة.

مثال (١) : إن المتسلسلة العددية الحقيقية اللانهائية :

$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots\cdots +$ هي متسلسلة متباعدة لأن متتاليةمجاميعها الجزئية هي المتتالية المتباعدة :

$$S_1 = 1 \text{ و } S_2 = 0 \text{ و } S_3 = 1 \text{ و } S_4 = 0 \text{ و } \cdots\cdots\cdots$$

التي تتأرجح بين العددين المختلفين 1 و 0 •

مثال (٢) : إن المتسلسلة العددية الحقيقية اللانهائية :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

هي متسلسلة متباعدة لأن متتالية مجاميعها الجزئية هي المتتالية — المتباعدة التي حدها العام $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

هو عبارة عن لا امتناه في الكبر (موجب) عندما $n \to \infty$.

مثال (٣) : إن المتسلسلة العددية الحقيقية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة ومجموعها يساوى 1 .

الحل : نلاحظ أن :
$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ومنه : $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = S$

مثال (٤) : إن المتسلسلة العددية الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot r^n$ ، التي حدها الاول a ، حيث $a \neq 0$ ، وأساسها r ، حيث $r \in \mathbb{R}$ ، تكون متقاربة من أجل كل قيمة لـ r تحقق الشرط $|r| < 1$ ، وتكون متباعدة من أجل كل قيمة أخرى لـ r ، أي من أجل $|r| \geq 1$

الحل : إن الشكل المفصل للمتسلسلة الهندسية هو :

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a\cdot r^k =$

$a + a\cdot r + a\cdot r^2 + \dots + a\cdot r^n + \dots\dots$ ومنه :

$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$
$= a(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})$
$= a\cdot\frac{1-r^n}{1-r}$

$S_n = \frac{a - a\cdot r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a\cdot r^n}{1-r}$ وهنا نميز عدة حالات :

أ) إذا كان $|r| < 1$ فإنّ $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ ، وبالتالي :
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{a\cdot r^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}$$

ومنه فالمتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot r^n$ تكون متقاربة ومجموعها يساوي -
$$S = \frac{a}{1-r} \cdot$$

2°) اذا كان $|r|>1$ فإنّ المتغير r^n يكون لامتناهياً في الكبر عندما $n \longrightarrow \infty$ ، وبالتالي فإنّ المتغير S_n يكون لامتناهياً في الكبر عندما $n \longrightarrow \infty$ ، ومنه فالمتتالية العددية $\{S_n\}$ تكون متباعدة ، وهذا يعني أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$ تكون متباعدة .

3°) اذا كان $r=1$ فإنّ $S_n = a + a + \cdots\cdots + a = n \cdot a$ ، وبالتالي فإنّ المتغير S_n يكون لامتناهياً في الكبر عندما $n \longrightarrow \infty$ ، ومنه فالمتتالية العددية $\{S_n\}$ تكون متباعدة، وهذا يعني أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$ تكون متباعدة .

4°) إذا كان $r=-1$ فإن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$ تأخذ الصورة :

$$a - a + a - a + a - + \cdots\cdots .$$

ومنه $S_1 = a$ و $S_2 = 0$ و $S_3 = a$ و $S_4 = 0$ و $\cdots\cdots\cdots$

وهذا يعني أن المتتالية العددية $\{S_n\}$ تتأرجح بين العددين المختلفين a و 0 وبالتالي فهي متباعدة . ومنه فالمتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$ تكون متباعدة .

مثال (٥) : لنأخذ المتسلسلة العددية الحقيقية اللانهائية :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots\cdots$$

فنجد أنها متسلسلة هندسية حدها الاول $a=1$ وأساسها $r = \frac{1}{2}$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

وبما أن $|r| < 1$ فإن هذه المتسلسلة تكون متقاربة ومجموعها

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \,.$$

مثال (٦) : نسمي المتسلسلة العددية الحقيقية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ؛

أيْ المتسلسلة :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$$

بـ ((المتسلسلة المتجانسة)) أو المتسلسلة التوافقية وسنبيّن أن هذه المتسلسلة متباعدة :

إنّ :

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^k}\right) .$$

حيث مقام (مخرج) آخر حد في كل قوس هو قوة للعدد 2 ، وعدد الحدود في كل قوس يساوي نصف قيمة مقام حده الأخير .

وبملاحظة أن :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k} \cdot 2^{k-1} = \frac{1}{2}$$

نجد أن :

$$S_{2^k} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \cdots\cdots + \frac{1}{2^k} \cdot 2^{k-1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2} = \frac{k+2}{2}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{3}{1(2)^2} + \frac{5}{(2^2)(3)^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$\cancel{\sum k(n+1) = n^2}$

أيّ أن :

$$S_{2^k} \geq \frac{K+2}{2}$$

ومنـــــه : $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k} = +\infty$.

وكذلك ، بملاحظة أنّ $S_{2^k+1} = S_{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{k+2}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}$

نستنتج أنّ $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k+1} = +\infty$.

إذن $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ وهذا يعني أن المتسلسلة المتجانسة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعـــــــــدة .

مثال (٧) : لدراسة تقارب المتسلسلة العددية الحقيقية اللانهائيـة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ نأخذ الحد العام لمتتالية مجاميعهـــا الجزئيـــــة فنجد :

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+3)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

ومنـــــــه :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}$$

اذن فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ متقاربة ومجموعها يساوي $\frac{11}{18}$.

تمارين للحل

ادرس تقارب كل من المتسلسلات العددية الحقيقية اللانهائية الآتية واحسب مجموعها :

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

(جـ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ ، (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

الاجوبة :

(أ) المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S = \frac{23}{90}$.

(ب) المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S = 1$.

(جـ) المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S = \frac{5}{16}$.

(د) المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S = \frac{1}{8}$.

٣ ـ ٢ ـ الخواص الرئيسية للمتسلسلات المتقاربة :

تظهر هذه الخواص في نصوص المبرهنات الآتية :

مبرهنة (١) :

اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، فإن حدها العام يسعى الى الصفر عندما $n \to \infty$ ، أيْ : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

الاثبات :

للفرض أن مجموع المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو S ، عند ئـذ (بملاحظة أن $a_n = S_n - S_{n-1}$) نستنتج أن :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

وهو المطلوب برهانـه .

ملاحظة : تعطينا المبرهنة السابقة شرطاً لازماً لتقارب أية متسلسلة ولكن هذا الشرط غير كاف لأنه توجد متسلسلات متباعدة نهاية الحد العام لكل منها تساوي الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$. فمثلاً المتسلسلة المتجانسة $\frac{1}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}$ متباعدة ونهاية حدها العام $\frac{1}{n}$ هي الصفر عندما n تسعى الى ∞ .

نتيجة : اذا كانت نهاية الحد العام ، لمتسلسلة ما ، مغايرة للصفر (محدودة أو غير محدودة)، أو غير موجودة، عندما $n \longrightarrow \infty$ ، فإنّ هذه المتسلسلة تكون متباعدة . أو بعبارة أخرى ، إذا كان الحد العام لمتسلسلة لا يسعى الى الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$ فإن هذه المتسلسلة تكون متباعدة .

مثال (١) : المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^q$ ، حيث $q \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، هي متسلسلة متباعدة ، لأن $a_n = n^q$ لا يسعى إلى الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$.

مثال (٢) : المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ هي متسلسلة متباعدة ،

لأنّ : $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

مثال (٣) : المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ هي متسلسلة متباعـــدة

لأن نهاية الحد العام غير موجودة عندما $n \to \infty$.

<u>مبرهنـــــة (٢) :</u>

[مبرهنة كوشي في المتسلسلات] : لكي تكون المتسلسلةُ العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربةً يلزم ويكفي أن تكون متتاليةُ مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ متتاليةَ كوشـــــــي .

<u>الاثبـــــات :</u> إن قولنا بأن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربـــة يكافئ قولنا بأن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة . وهذا يكافئ قولنا بأن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ هي متتالية كوشـــــــي .

مثـــال (٤) : نعلم أنّ المتسلسلة المتجانسة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة . ـ

وسنثبت فيما يلي على صحة ذلك بطريقة أُخرى باستخدام مبرهنة كوشـــــي في المتسلسلات : لنفرض جدلاً أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متقاربة . عندئذ تكون متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ متتالية كوشــي ،

حيث ؛ $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

ومنه يوجد ، من أجل العدد الحقيقي الموجب $\frac{1}{2}$ ، عدد طبيعي $N \geq 1$ بحيث يكون $|S_m - S_n| < \frac{1}{2}$.

عندما $m \geq n \geq N$ ، ومنه لنأخذ $n \geq N$ ، عندئذ نجد $2n > n \geq N$ وبالتالي يكون :

$|S_{2n} - S| < \frac{1}{2}$ ، ولكن :

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

ومنه : $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > 0$

وبالتالي :

$$\frac{1}{2} > |S_{2n} - S_n| = S_{2n} - S_n =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} =$$

$$= n \cdot \frac{1}{n+n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

أي أن $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ وهذا مستحيل ، إذن فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة .

تعريف : ليكن $n \in \mathcal{N}^*$ ، نعرّف الباقي النوني للمتسلسلة العددية الحقيقية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنه المتسلسلة العددية اللانهائية $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots\cdots$ التي نحصل عليها بعد حذف الحدود الأولى a_1 و a_2 و $\cdots\cdots$ و a_n ، التي عددها n ، من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، ويمكننا أن نكتب الباقي النوني المذكور بالشكل المختصر التالي : $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

واذا كان الباقي النوني للمتسلسلة متسلسلةً متقاربةً فإننا سنرمز لمجموعه بالرمز r_n .

مبرهنـــة (٣) :

١) إذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإنّ كل باقٍ مــن بواقي هذه المتسلسلة يكون متقاربــــــاً .

٢) إذا تقارب أحد بواقي متسلسلة عددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ فإنّ هذه المتسلسلة تكــــون متقاربـــــــة .

الاثبـــــــات :

١) لدينا (بحسب الفرض) المتسلسلة العددية المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ولنفرض أن مجموعها يساوي S ، وأن $n \in \mathcal{N}^*$. ولنأخذ الباقي النوني $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ لهذه المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، ثم لنفرض أن : $\sigma_m = \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$ وعندئذ نجد أن σ_m هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة الباقي النوني ، وأن :

$$\sigma_m = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{n+m} =$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+m}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S_{n+m} - S_n \quad (*)$$

حيث S_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ومنه : $(**)$ $\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty} S_{n+m} - \lim_{m\to\infty} S_n = S - S_n$

وهذا يعني أن المتتالية $\{\sigma_m\}$ متقاربة من $(S - S_n)$ ، وبالتالـــي فمتسلسلة الباقي النوني $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ تكون متقاربة ، أيّ أن الباقـــي

النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يكون متقارباً .

ومن (* *) يمكننا أن نكتب : $r_n = S - S_n$.

٢) لنفرض أن الباقي النوني $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب .

ثم لنأخذ عدداً طبيعياً اختيارياً p بحيث يكون $p > n$. عندئذ

يمكننا أن نكتب $p = n + m$ ، حيث $m \in N^*$ ، وأن :

$S_p = S_{n+m} = S_n + \sigma_m$ [استناداً الى الصيغة (*)] .

وبفرض $p \to \infty$ نستنتج أن $m \to \infty$ (لأن n مثبّت) وبالتالي :

$$\lim_{p\to\infty} S_p = \lim_{p\to\infty} S_n + \lim_{p\to\infty} \sigma_m = S_n + r_n \quad (* * *)$$

وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة .

ومن (* * *) يمكننا أن نكتب : $S = S_n + r_n$.

ملاحظة : اذا كانت المتسلسلةُ العددية متقاربةً فإنّ مجموعَها S يساوي حاصلَ (جمع) أيِّ مجموعٍ جزئي S_n مع مجموع الباقي الموافق لـ S_n ، أيّ مع r_n .

ولذلك فإنه إذا اعتبرنا S_n قيمة تقريبية للمجموع S فإن الخطأ المرتكب في هذا الحساب التقريبي يكون r_n .

نتيجـــة : إن حذف عدد محدود من الحدود الاولى لمتسلسلة عددية لا يؤثر على نوعها (من حيث كونها متقاربة أو متباعدة) ،

كما وإن إضافة عدد محدود من الحدود الجديدة إلى مقدمة المتسلسلة لا يؤثر أيضاً على نوعها (من حيث كونها متقاربة أو متباعدة) .

وبحصل بعد حذف (أو حصول) جملة المتسلسلة

مبرهنـــــة (٤) :

إذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، فإنّ $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ ، حيث r_n هو مجموع الباقي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

الاثبـــات : بما أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإنّ الباقي النوني لها يكون متقارباً ، ويكون $r_n = S - S_n$ ، وبالتالـــي :

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

حيث S هو مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

مبرهنـــة (٥) : اذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، ومجموعها يساوي S ، وإذا كان b عدداً ما فإن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} b\cdot a_n$ تكون متقاربةً ، ومجموعُها يساوي $b.S$.

الاثبـــات : بفرض أن S_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وأنّ σ_n هو الحد العام لمتتالية المجاميـع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b\cdot a_n$ نستنتج أن :

$$\sigma_n = b\cdot a_1 + b\cdot a_2 + \cdots + b\cdot a_n = b\cdot(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = b\cdot S_n$$

وبالتالي فإنّ :

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} b\cdot S_n = b\cdot \lim_{n\to\infty} S_n = b\cdot S$$

وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b\cdot a_n$ متقاربة ، ومجموعها يســاوي $b\cdot S$.

ملاحظة : إذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإنه يمكننـا

أن نكتب : $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n = b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ •

نتيجة : إذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة ، وإذا كان b عدداً مغايراً للصفر ، فإنّ المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n$ • تكون متباعدة •

مبرهنة (٦) : إذا كانت المتسلسلتان العدديتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين ، ومجموع الأولى يساوي S ومجموع الثانية يساوي S' ، فإنّ المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ تكون متقاربة ، ومجموعها يساوي $(S + S')$ ، وإنّ المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ تكون متقاربة ومجموعها يساوي $(S - S')$ •

الاثبات : بفرض أن S_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ •

وأن S'_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ •

وأن σ_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ •

وأن σ'_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ •

نستنتج أن : $\sigma_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots\cdots + (a_n + b_n) =$

$$= (a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n) = S_n + S'_n$$

و

$$\sigma'_n = (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots\cdots+(a_n-b_n) = (a_1+a_2+\cdots+a_n)+$$
$$-(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n) = S_n - S'_n$$

وبالتالي فإنّ : $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n + \lim\limits_{n\to\infty} S'_n = (S+S')$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S'_n = (S-S')$

وبهذا يتم المطلوب اثباته .

ملاحظة : إذا كانت المتسلسلتان العدديتان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين ، فإنه يمكننا أن نكتب :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mp b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mp \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

<u>مبرهنة (٧) :</u> اذا كانت لدينا متسلسلة عددية متقاربة فإنّ تقاربها ومجموعها لا يتأثران إذا قمنا بأيّ تجميع لحدود هذه المتسلسلة بواسطة الأقواس ، شريطة أن نحافظ على ترتيب الحدود نفسه .

الاثبات : لنفرض أننا قمنا بتجميع الحدود متسلسلةٍ عدديةٍ متقاربةٍ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ بواسطة الأقواس [بشرط أن نحافظ على نفس ترتيب الحدود] ، فإننا نحصل على متسلسلة عددية لا نهائية جديدة . فمثلاً ، المتسلسلة العددية اللانهائية : $(a_1+a_2)+a_3+(a_4+a_5+a_6+a_7)+(a_8+a_9)+\cdots$

هي متسلسلة جديدة نحصل عليها من المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بتجميع (معين) عندئذ يكون كل مجموع جزئي للمتسلسلة العددية الجديدة مجموعاً جزئياً للمتسلسلة العددية الأصلية ولكن برقم أكبر . فمثلاً ، إذا رمزنا بـ S_n للحد النوني لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، وبـ σ_n للحد النوني لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة العددية اللانهائية الجديدة :

$$(a_1+a_2)+a_3+(a_4+a_5+a_6+a_7)+(a_8+a_9)+\cdots$$

فإننا نجد أن : $\sigma_1 = (a_1 + a_2) = S_2$

$$\sigma_2 = (a_1 + a_2) + a_3 = S_3$$

$$\sigma_3 = (a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) = S_7$$

$$\sigma_4 = (a_1+a_2) + a_3+(a_4+a_5+a_6+a_7) + (a_8+a_9) = S_9$$

. . . .

إذن يمكننا أن نقول بأن المتتالية العددية $\{\sigma_n\}$ هي متتالية جزئية من المتتالية العددية $\{S_n\}$. وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، فإن المتتالية العددية $\{S_n\}$ تكون متقاربة .

وبفرض أن $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ نستنتج أن مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو S .

وبما أن كل متتالية جزئية من المتتالية المتقاربة $\{S_n\}$ تتقارب من S ؛

فإن المتتالية $\{\sigma_n\}$ تكون متقاربة من S ، وهذا يعني أن المتسلسلة العددية الجديدة تكون متقاربة ومجموعها يساوي S .

وبهذا يتم المطلوب اثباته .

ملاحظة : إن حذف الأقواس في متسلسلة ما لا يعتبر قانونياً في الحالة العامة . فمثلاً ، إذا حذفنا الأقواس في المتسلسلة العددية — اللانهائية المتقاربة $(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots$ فإننا نحصل على المتسلسلة العددية اللانهائية المتباعدة

$$1-1+1-1+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

تمارين للحل

١) أوجد مجموع المتسلسلة العددية التالية :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{27}\right)+\cdots\cdots$$

الجواب : المجموع هو $S=\frac{3}{2}$

٢) أوجد مجموع المتسلسلة العددية التالية : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

[ارشاد : استخدم المبرهنتين (٥) و (٦) من الفقرة الحالية واستخدم فكرة المثالين (٣) و (٧) من الفقرة السابقة .

الجواب : المجموع هو $S=\frac{7}{36}$.]

٣ ـ ٣ ـ المتسلسلات العددية ذوات الحدود غير السالبة :

مبرهنة (١) : لكي تتقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ذات الحدود

غير السالبة يلزم ويكفي ان تكون متتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة محدودة من الأعلى •

الاثبات :

١) لزوم الشرط : لنفرض أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات الحدود غير السالبة متقاربة. عندئذ توجد النهاية $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ، حيث S_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة • وبملاحظة أن المتتالية العددية $\{S_n\}$ غير متناقصة ، لأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات حدود غير سالبة ، ومتقاربة من S ، نستنتج أن $S_n \leqslant S$ من أجل كل n من N^* [انظر فقرة المتتاليات المطردة في الفصل السابق] ، إذن فالمتتالية $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى •

٢) كفاية الشرط : لنفرض أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ للمتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ محدودة من الأعلى • لما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات حدود غير سالبة فإن المتتالية $\{S_n\}$ تكون غير متناقصة •
إذن فالمتتالية $\{S_n\}$ تكون غير متناقصة ومحدودة من الأعلى ، وبالتالي فهي متقاربة • ومنه فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة •

نتيجة : لكي تتقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات الحدود غير السالبة يلزم ويكفي أن تكون متتالية مجاميعها الجزئية محدودة •

مبرهنة (٢) : [قاعدة المقارنة] : لتكن لدينا المتسلسلتان ـ

العدديتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ اللتان كل منهما ذات حدود غير سالبة • ولنفرض أنه $\forall n \in \mathcal{N}^*$ فإنّ $a_n \leqslant b_n$ • عندئذ :

١) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة ، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكـــون متقاربـــة •

٢) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة ، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تكـــون متباعـــدة •

الاثبـــــات :

١) لنفرض أن الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو S_n ، وأن الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ هو σ_n • لما كان $a_n \leqslant b_n$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ فـإنّ $S_n \leqslant \sigma_n$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ • وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإنّ متتالية مجاميعها الجزئية $\{\sigma_n\}$ تكون محدودة من الأعلى بحسب المبرهنة السابقة • ومنه يوجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $\sigma_n \leqslant M$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ • وبما أن $S_n \leqslant \sigma_n$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ فإنّ $S_n \leqslant M$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ • وهذا يعني أن المتتالية $\{S_n\}$ محدودة من الاعلى • ومنه بحسب المبرهنةالسابقة ينتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربـــة •

٢) لنفرض جدلاً أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة . عند ئذ (بحسب القسم الاول من البرهان الحالي) تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، طالما أن $a_n \leq b_n$ من أجل كل n من N^* . ولكن كون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة يخالف الفرض القائل بأن هذه المتسلسلة متباعدة .

إذن فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة ، وبهذا يتم المطلوب اثباته .

ملاحظة : إذا كانت المتباينة $a_n \leq b_n$ محققة ليس من (أجل) كل n من N^* بل فقط من أجل جميع قيم n التي تحقق الشرط $1 < N \leq n$، واذا أخذنا بعين الاعتبار نتيجة المبرهنة (٢) من الفقرة السابقة فإنه بدلاً من المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يمكننا أن نأخذ المتسلسلتين $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ فنجد أن المبرهنة السابقة صحيحة من أجلهما ، وبالتالي فهي صحيحة من اجل المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

إذن، فالمبرهنة (٢) السابقة تبقى صحيحة عندما يكون $a_n \leq b_n$ من أجل جميع قيم n التي تحقق الشرط $1 < N \leq n$.

مثال (١) : بيّن نوع المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

الحل : لنأخذ المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ فنجد أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ من اجل كل n من N .

ومنه فالمتسلسلة المفروضة تكون متسلسلة متقاربة استناداً إلى قاعدة المقارنة.

مثال (٢) : لنأخذ المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ فنجد أنها

متقاربة بمقارنتها مع المتسلسلة العددية المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$ ،
حيث نجد أن : $\frac{3}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ [انظر المثال (٢) في ١ـ٣ من الفصل الأول] .

مثـــال (٣) : المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة، لأنّ $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، ولأنّ المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعـــدة .

مبرهنـــة (٣) : [قاعدة دالامبير (أو قاعدة النسبة)] لتكن لدينـــا المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ التي جميع حدودها موجبة ، أيّ $a_n > 0$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$. ولنفرض أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ ، حيـــث $D \in \mathbb{R}$ أو $D = +\infty$ ، عندئذ :

١ً) إذا كان $D < 1$ فإنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة .

٢ً) إذا كان $D > 1$ فإنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة .

الاثبـــات :

١ً) لنفرض أن $D < 1$ ثم لنأخذ العدد الحقيقي الموجب ε بحيث يكون $D + \varepsilon < 1$. لما كان $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ فإنه يوجـــد (من أجل ε) عدد طبيعي $N \geqslant 1$ بحيث يكون $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - D\right| < \varepsilon$ عندما $n \geqslant N$. وهذا يعني أن $D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon$ عندما $n \geqslant N$. ثم لنفرض أن p عدد طبيعي اختياري ومغايـــر

للصفر ولنأخذ لـ n ، في المتباينات الأخيرة، القيم :

$N, N+1, \ldots, N+p$ فنحصل على المتباينات الصحيحة التاليــــة :

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < D+\varepsilon, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < D+\varepsilon \text{ و } \ldots \text{ و } \frac{a_{N+p}}{a_{N+p-1}} < D+\varepsilon$$

ومنــــه :
$$\frac{a_{N+p}}{a_N} < (D+\varepsilon)^p$$

وبالتالي :
$$a_{N+p} < (D+\varepsilon)^p \cdot a_N \qquad (*)$$

واذا جعلنا p تتغير آخذة كل القيم الموجودة في $\mathcal{N}^*$ فإننا نحصل على المتسلسلة العددية $\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$ التي نلاحظ أنهــــا عبارة عن الباقي ذي الرقم N للمتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، ونحصل أيضاً على المتسلسلة الهندسية $\sum_{p=1}^{\infty} a_N \cdot (D+\varepsilon)^p$ التي أساسها $r = D+\varepsilon$. وبملاحظة أن $|r| < 1$ نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{p=1}^{\infty} a_N \cdot (D+\varepsilon)^p$ متقاربة . وبحسب الصيغة ($*$) الصحيحة من أجل جميع قيم p من $\mathcal{N}^*$ وبحسب المبرهنة (٢) تكون المتسلسلة $\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$ متقاربة ، وبالتالي : تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة .

٢) لنفرض أن $D > 1$ و $D \in \mathbb{R}$. عند ئذ يكون $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D > 1$.

ومنه يوجد $N \in \mathcal{N}^*$ بحيث يكون
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

عندما $n \geq N$ [راجع المبرهنة (١) في الفقرة (٥) من الفصــــل السـابق] . ومنه $a_{n+1} > a_n > 0$ عندما $n \geq N$. إذن ، فحدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لا تتناقص بالقيم ، وبالتالي فإنّ a_n

لا ينسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$ وهذا يؤدي إلى القول بأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة .

لنفرض الآن أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D = +\infty$. عندئذ يوجد من أجل العدد الحقيقي 2 عدد طبيعي N_1 بحيث يكون $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 2$ ، وبالتالي $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ عندما $n \geqslant N_1$ ، وذلك استناداً الى تعريف اللامتناهي في الكبر الموجب. ومنه $a_{n+1} > a_n > 0$ عندما $n \geqslant N_1$ ، وبالتالي فإن a_n لا يسعى الى الصفر عندما $n \to \infty$ ، وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة وبهذا يتم المطلوب اثباتـــه .

ملاحظة : اذا كان $1 = D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ فإنّ قاعدة دالامبير لا تعطينا نوع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ من حيث كونها متقاربـــة أو متباعدة ، لأنه توجد متسلسلات متقاربة من أجلها يكون $D = 1$. وتوجد متسلسلات متباعدة من أجلها يكون $D = 1$. فمثلاً من أجـــل المتسلسلة المتجانسة (التي هي متباعدة) نجد :

$D = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} \div \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. ومن أجل المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ نجد أيضـــاً :

$$D = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} \div \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 .$$

واذن ، عندما يكون $D = 1$ فإننا نقع في شك من أمر تقارب أو تباعـد المتسلسلة ولذلك فإن دراسة تقارب المتسلسلة تتم باستخدام طرق أخرى

غير قاعدة دالامبيـــــــــــــــر .

مثـــال (٤) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$.

الحـــل : لدينا $a_n = \frac{n^3}{(n+1)!}$ ومنه $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{(n+2)!}$.

وبالتالي :

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot n^3} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n+2} = 0 < 1$$

إذن فالمتسلسلة المفروضة تكون متقاربة بحسب قاعدة دالامبيـــــر .

مثـــال (٥) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

الحـــل : لدينا $a_n = \frac{n^n}{n!}$ ومنه $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

وبالتالي : $D = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \, n^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2,7 > 1$$

إذن فالمتسلسلة المفروضة تكون متباعدة [بحسب قاعدة دالامبير] . هذا

وكان من الممكن اثبات أن هذه المتسلسلة متباعدة ، وذلك بأن نبرهـن

على أن $\lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{n!} \neq 0$.

مثـــال (٦) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2} \cdot \sqrt{2}}$.

الحـــل : بملاحظة أن

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{(n+1)^2-1} \cdot \sqrt{n} \cdot 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2} \cdot \sqrt{n+1} \cdot 3^{n^2-1}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n^2+2n} \cdot 2^{n^2} \cdot \sqrt{n}}{2^{n^2+2n+1} \cdot \sqrt{n+1} \cdot 3^{n^2-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{2n+1}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}} \quad = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} = \infty$$

نستنتج أن المتسلسلة المفروضة هي متسلسلة متباعدة بحسب قاعدة دالامبير.

ملاحظة أخرى : إذا أعطينا متغيراً a_n وطلب إلينا إثبات أن هـــذا المتغير a_n هو لامتناه في الصغر فإنه يمكننا أن نأخذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ثم نثبت ، بطريقة مامن الطرق ، أن هذه المتسلسلة متقاربـة فنحصل على المطلوب إثباته استناداً الى المبرهنة (١) المذكورة فـي البند الثاني من الفصل الحالي والى المبرهنة المذكورة في البند الرابع مـــن الفصل الثانـــــي .

مثال : أثبت أن المتغير $\frac{n}{2^n}$ هو لامتناه في الصغـــر .

الحـــل : لنأخذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ فنجد أن : ——— = ———

$D = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \div \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$ وبالتالي فهذه المتسلسلة تكون متقاربة استناداً إلى قاعدة دالامبير . إذن $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ وهو المطلوب اثباتـــه .

مبرهنة (٤) [قاعدة كوشي (أو قاعدة الجذر النوني)] : لتكـــن لدينا المتسلسلة العددية ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ولنفرض ، أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$ حيث $C \in \mathbb{R}$ أو $C = +\infty$.

عند ئـــــــذ :

أ) اذا كان $C < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربـــة .

٢) إذا كان $C > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة •

الاثبـــــــات :

١) لنفرض أن $C < 1$ ولنأخذ العدد الحقيقي الموجب ε بحيث يكون $C + \varepsilon < 1$ • لما كان $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = C$ فإنه يوجد (من أجل ε) عدد طبيعي $N \geq 1$ بحيث يكون $|\sqrt[n]{a_n} - C| < \varepsilon$ عندما $n \geq N$. وهذا يعني أن $C - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < C + \varepsilon$ عندما $n \geq N$ • ومنه $a_n < (C + \varepsilon)^n$ • وبما ان المتسلسلة العددية الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} (C + \varepsilon)^n$ متقاربة [لأنّ أساسها $C + \varepsilon$ يحقق الشرط $0 < C + \varepsilon < 1$] فإن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة [بحسب قاعدة المقارنة] •

٢) لنفرض أن $C > 1$ و $C \in \mathbb{R}$ • عند ئذ يكون $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = C > 1$ • ومنه يوجد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث يكون $\sqrt[n]{a_n} > 1$ لما $n \geq N$ • ومنه $a_n > 1$ عندما $n \geq N$ وبالتالي فإن a_n لا يسعى الى الصفر عندما $n \to \infty$ • وهذا يؤدي الى القول بأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعـــــدة •

لنفرض الآن أن $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = C = +\infty$ • عند ئذ يوجد من أجل العدد الحقيقي الموجب 2 ، عدد طبيعي $N_1 \geq 1$ بحيث يكون $\sqrt[n]{a_n} \geq 2$ ، وبالتالي $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ، عندما $n \geq N_1$ وذلـــــك

استناداً إلى تعريف اللامتناهي في الكبر الموجب • ومنه $a_n > 1$

عندما $n \geq N_1$ ،وبالتالي فإن a_n لا يسعى الى الصفر عندما

$n \longrightarrow \infty$ ، وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة وبهذا يتم

المطلوب اثباته •

ملاحظة : إن قاعدة كوشي كقاعدة دالامبير لا تعطينا نوع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

من حيث التقارب أو التباعد عندما $C = 1$ • ذلك لأنه توجد متسلسلات

متقاربة من أجلها يكون $C = 1$ وتوجد متسلسلات متباعدة من أجلها

يكون $C = 1$ ، فمثلاً من أجل المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ يكون :

$$C = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

ومن أجل المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ يكون :

$$C = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

اذن ،عندما يكون $C = 1$ نقع في شك من أمر تقارب أو تباعد المتسلسلةولذلك،

فان دراسة تقارب المتسلسلة تتم باستخدام طريقة اخرى غيرقاعدة كوشي •

مثال (٢) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ •

الحل : لدينا $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ ومنه :

$$C = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

وبالتالي فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ تكون متقاربة [بحسب

قاعدة كوشي] •

مثال (٨) : المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{3n-2}\right)^n$ متباعدة [استناداً الى قاعدة كوشي] لأن :

$$C = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{3n-2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{3n-2} = \frac{5}{3} > 1$$

هذا ويمكننا أن نقول بأن قاعدة كوشي أقوى من قاعدة دالامبير لأنه يمكن التحقق من أنه في تلك الحالات التي تعطينا فيها قاعدة دالامبير نوع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ من حيث التقارب أو التباعد، فإن قاعدة كوشي تعطينا فيها نوع المتسلسلة أيضاً انظر البند ٢٥ من الفصل الثاني •

إلّا أن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة : بالحقيقة، اذا أخذنا المتسلسلة العددية ذات الحدود الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$ واذا فرضنا أن $a_n = \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$ ، فإنه يمكننا بسهولة اثبات أن النهاية $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ موجودة وتساوي $\frac{1}{2}$ (وبالتالي فهذه المتسلسلة تكون متقاربة بحسب قاعدة كوشي) بينما يمكننا اثبات أن النهاية $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ غير موجودة (وبالتالي لا تستطيع قاعدة دالامبير أن تعطينا نوع هذه المتسلسلة) • ومع ذلك يظل استعمال قاعدة دالامبير في التمارين أكثر من استعمال قاعدة كوشي ، لأن حساب النسبة $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ أسهل ، عادة ، من حساب الجذر النوني $\sqrt[n]{a_n}$ •

مبرهنة (٥) [اختبار المقارنة] : لتكن لدينا المتسلسلتان العدديتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ اللتان كل منهما ذات حدود موجبة • ولنفرض أن :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \quad و \quad 0 \lneqq A \lneqq +\infty \quad .$$

عندئذ : تكون المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من نوع واحد ، أي أنهما إما متقاربتان معاً أو متباعدتان معـــاً .

الاثبـــات : لنفرض أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ ، حيث $0 \lneqq A \lneqq \infty$

ولنأخذ عدداً حقيقياً موجباً ε بحيث يكون $A-\varepsilon > 0$.

ومنه يوجد $N \in \mathcal{N}$ بحيث يكون $\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon$ عندما $n \geqslant N$ ،

وبالتالي $A-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A+\varepsilon$ عندما $n \geqslant N$. ثم لنميز بيـــن حالتيــــــن :

١) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} (A-\varepsilon)\cdot b_n$ تكون متقاربة (بحسب قاعدة المقارنة) لأن $(A-\varepsilon)\cdot b_n < a_n$. ومنه فالمتسلسلة :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A-\varepsilon}\cdot(A-\varepsilon)\cdot b_n$ تكون متقاربة [بحسب المبرهنة (٥) في الفقرة (٢)] . ومنه فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تكون متقاربة .

٢) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} (A+\varepsilon)\cdot b_n$ تكون متقاربة [بحسب المبرهنة (٥) في الفقرة (٢)] . ولما كان : $a_n < (A+\varepsilon)\cdot b_n$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربـــــة .

ينتج من الحالتين السابقتين أنه لا يمكن للمتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

أن تتقاربا إلا معاً ، وبالتالي : فهما لا يمكن أن تتباعدا إلا معاً .

اذن فالمتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تكونان من نوع واحد وبهذا يتم المطلوب برهانه .

مثال (٩) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{2+n^3}$.

الحل : لدينا $a_n = \frac{3+n}{2+n^3}$. ولنأخذ المتسلسلة العددية المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ولنرمز لحدها العام بالرمز b_n فيكون $b_n = \frac{1}{n^2}$ ،

ومنه : $A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3+n}{2+n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3+n)}{2+n^3} = 1$

وبالتالي $0 \lneqq A \lneqq +\infty$. ومنه

[بحسب المبرهنة (٥)] نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{2+n^3}$ متقاربة ،

مثال (١٠) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

الحل : لدينا $a_n = \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$. ولنأخذ المتسلسلة العددية المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ولنرمز لحدها العام بالرمز b_n فيكون ؛ $b_n = \frac{1}{n}$. ومنه :

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{n}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2} = 2\ln e = 2$$

وبالتالي $0 \lneqq A \lneqq +\infty$.

ومنه [بحسب المبرهنة (٥)] نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ متباعدة .

تعريف : يسمى التكامل $\int_a^\infty f(x)\,dx$ بالتكامل المعتل أو بـ ((التكامل غير الذاتي)) ، ونقول إنه موجود ((أو متقارب)) اذا كانت النهاية $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ موجودة ومحدودة ، ونكتب حينئذ :

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

ونقول عن التكامل المعتل غير المتقارب إنه متباعد .

نقبل دون برهان صحة النص التالي :

مبرهنة (٦) : [اختبار كوشي التكاملي] : لتكن $\sum_{n=1}^\infty a_n$ متسلسلة عددية ذات حدود غير سالبة . ولنفرض أنه توجد دالة مستمرة ومتناقصة $f(x)$ ، معرفة من أجل $x \geqslant 1$ ، بحيث يكون $f(n) = a_n$.

عندئذ : I . لكي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty a_n$ متقاربة يلزم ويكفي أن يكون التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ متقارباً .

II . لكي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty a_n$ متباعدة يلزم ويكفي أن يكون التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ متباعداً .

مثال (١١) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

الحل : نميز حالتين :

أ) إذا كان $\alpha \leqslant 0$ فإن الحد العام $\frac{1}{n^\alpha}$ للمتسلسلة المفروضة لا يسعى الى الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$. وهذا يؤدي الى القول بأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ تكون متباعدة طالما أن $\alpha \leqslant 0$.

٢) اذا كان $\alpha > 0$ فإننا سندرس تقارب المتسلسلة المفروضة بالاستناد الى اختبار كوشي التكاملي : لنأخذ بمثابة $f(x)$ الدالة $\frac{1}{x^\alpha}$ ، $x \geq 1$ ، فنجد أن هذه الدالة تحقق شروط المبرهنة (٦) • ونجد أيضاً أن :

$$\int_1^b f(x)\,dx = \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \quad (\alpha \neq 1)$$

فإذا كان $\alpha > 1$ فإن $1 - \alpha < 0$ و $\lim\limits_{b \to \infty} b^{1-\alpha} = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{b \to \infty} \int_1^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b \to \infty} \left[\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha - 1}$

اذن ، عندما $\alpha > 1$ يكون التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ متقارباً ، حيث $\int_1^\infty f(x)dx = \frac{1}{\alpha-1}$ • ومنه ، بحسب المبرهنة (٦) ، تكون المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ متقاربة [طالما أن $\alpha > 1$] •

وإذا كان $\alpha < 1$ فإنّ $1 - \alpha > 0$ و $\lim\limits_{b \to \infty} b^{1-\alpha} = \infty$ و $\lim\limits_{b \to \infty} \int_1^b f(x)\,dx = \infty$ ، وبالتالي فالتكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)\,dx$ يكون متباعداً ، ومنه بحسب المبرهنة (٦) ، تكون المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ متباعدة [طالما أن $\alpha < 1$] • أما اذا كان $\alpha = 1$ فإن المتسلسلة المفروضة تصبح المتسلسلة المتجانسة $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ التي هي متسلسلة متباعدة • وبذلك نكون قد حصلنا على النتيجة التالية :

اذا كانت $\alpha > 1$ فإن المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ تكون متقاربة ، واذا كانت $\alpha \leq 1$ فان المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ تكون متباعدة •

ملاحظة : تسمى ، أحياناً ، المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ، بمتسلسلة ريمان ,وتستعمل هذه المتسلسلات والمتسلسلات الهندسية كمتسلسلات مقارنة نستطيع بواسطتها تبيان نوع متسلسلة عددية معطاة بالاستفادة من قاعدة او اختبار المقارنة

مثال (١٢) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(\ln n)^2}$ •

الحل : نضع $f(x) = \frac{1}{x\cdot(\ln x)^2}$ فنجد أن الدالة $f(x)$ مستمرة (لأن $x \geq 2$) وتتناقص عندما تزداد x . ونجد أيضاً أن :

$$f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^2}$$ وأن :

$$\int_2^b f(x)\,dx = \int_2^b \frac{dx}{x\cdot(\ln x)^2} = \int_2^b (\ln x)^{-2}\, d(\ln x) =$$

$$= \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^b = -\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}$$

ومنه : $$\lim_{b\to\infty}\int_2^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b}\right] = \frac{1}{\ln 2}$$

وهذا يعني أن التكامل المعتل $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ متقارب ، وبالتالي فالمتسلسلة المفروضة تكون متقاربة •

مثال (١٣) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$ •

الحل : اذا طبقنا قاعدة دالامبير فاننا نجد ان $D = 1$ • ولكن :

$\frac{n+1}{\sqrt{n^3}} > \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$,وبما أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة [لأنها من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ بحيث $\alpha = \frac{1}{2} < 1$] فإن المتسلسلة المفروضة تكون متباعدة بحسب قاعدة المقارنة •

وبهذا يتم المطلوب برهانــــــــــه .

مثـــال (١٤) : ادرس تقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3}$.

الحـــل : نلاحظ أن $\frac{3}{n^2} = \frac{3n}{n^3} < \frac{3n-2}{n^3}$ من أجـــل كل n من $\mathbb{N}^*$. لما كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ متقاربة ، لأنها ناتجة من ضرب المتسلسلة العددية المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ بالعدد 3 ، فإننا (بحسب قاعدة المقارنة) نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3}$ متقاربة .

ملاحظة : اذا كانت الدالة $f(x)$ ، المذكورة في نص مبرهنة اختبار كوشي التكاملي ، معرفة ومستمرة ومتناقصة ليس من أجل $x \geq 1$ بل مـــن أجل $x \geq \gamma > 1$ بحيث يكون $f(n) = a_n$ ، فإن تقارب المتسلسلــــــة العددية ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يكون مكافئا لتقارب التكامـــل المعتل $\int_{\gamma}^{+\infty} f(x)\,dx$. [في الحقيقة ، اذا كان للمنحني $y = f(x)$ مســـاحة محدودة ، محسوبة بدءاً من المستقيم $x = 1$ فإن له مساحة محدودة محسوبة بدءاً من المستقيم $x = \gamma$ ، وبالعكس] كما ونقبل دون برهـــان صحة النص التالـــــي : [اختبار رابي] : لتكن لدينا المتسلسلة العددية ذات الحدود الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ولنفرض أن :

$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$ ، حيث $r \in \mathbb{R}$ أو $r = \mp\infty$. عندئذ :

أ) إذا كان $r > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربـــة .

٢) اذا كان $r < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة ٠

ملاحظة : إن اختبار راب أقوى من قاعدة دالامبير ، أيْ إذا أعطتنا قاعدة دالامبير نوع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (من حيث التقارب أو التباعد) فإن اختبار راب يعطينا نوع هذه المتسلسلة أيضاً ٠ إلاّ أن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة ٠ فالمثال الاتي يبين أن اختبار راب يستطيع ان يعطينا تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ في حين أن قاعدة دالامبير لا تستطيع أن تعطينا أيّ جواب حول نوع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ من حيث كونها متقاربة أو متباعدة ٠ ومع ذلك فإنه عندما $r = 1$ نقع في شك من أمر تقارب أو تباعد المتسلسلة ، أيْ لا يستطيع اختبار راب أن يعطينا أيّ جواب حول نوع المتسلسلة المدروسة (من حيث كونها متقاربة أو متباعدة)، وعلينا أن نبحث عن طرق أخرى لحل مسألتنا المعطاة ٠

مثال : برهن باستخدام اختبار راب على أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة ٠

الحل : لدينا $a_n = \frac{1}{n^2}$ ومنه $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ وبالتالي

$$r = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n}{n^2} = 2 > 1$$

اذن فالمتسلسلة المفروضة تكون متقاربة بحسب اختبار راب ٠

وأخيراً سنتحدث باختصار عن المتسلسلات العددية ذوات الحدود الكيفية :

تعريف : نقول عن المتسلسلة العددية الكيفية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ إنها متقاربة

بإطلاق اذا وفقط اذا تقاربت المتسلسلة المؤلفة من القيم المطلقة لحدودها ، أيْ اذا تقاربت المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

نتيجة : اذا كانت المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة متقاربة فانهـــا تكون متقاربة باطلاق .

تعريف : اذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة والمتسلسلةالعددية $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة فاننا نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ إنها متقاربة شرطياً .

تعريف : نقول عن المتسلسلة العددية إنها متناوبة اذا كان كل حدين متجاورين من حدودها عبارة عن عددين مختلفي الاشارة . ولذلك فإن شكلها المفصل هو: إما $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot a_n + \cdots$

(وذلك إذا كان حدها الأول موجباً) ،

أو $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$

(وذلك اذا كان حدها الأول ســـالباً) ،

حيث $a_n \geqslant 0$ من أجل كل n من N^* .

نقبل دون برهان صحة النصوص التاليـــــة :

أ) اختبار ليبنتز : اذا كان الحد العام للمتسلسلة العددية المتناوبة يسعى الى الصفـر متناقصاً بالقيمة المطلقة ، عندما $n \to \infty$.

فان هذه المتسلسلة المتناوبة تكون متقاربـــة .

٢) اذا كانت المتسلسلة العددية الكيفية متقاربة باطلاق فإنها تكـــون متقاربـــــة .

٣) اختبار دالامبير : لتكن لدينا المتسلسلة العددية الكيفية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
حيث $a_n \neq 0$. ولنفرض أن $D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. عندئذ :

1°) اذا كان $D < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة باطلاق .

2°) اذا كان $D > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة .

3°) اذا كان $D = 1$ فإننا لانستطيع تحديد نوع المتسلسلة (من حيـــث التقارب أو التباعـــــــد) .

٤) اختبار الجذر النوني : لتكن لدينا المتسلسلة العددية الكيفية — $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ولنفرض أن $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. عنـدئـذ :

1°) اذا كان $C < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة باطلاق .

2°) اذا كان $C > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعـــدة .

3°) اذا كان $C = 1$ فإننا لانستطيع تحديد نوع المتسلسلة (من حيـــث التقارب أو التباعـــــــد) .

ملاحظــة : يمكننا استخدام النهاية العليا بدلاً من النهاية ، فمثلاً يبقى اختبار الجذر النوني صحيحاً عندما نضع $C = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

مثال (١) : هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ متقاربة باطلاق أمْ شرطياً .

الحل : إن هذه المتسلسلة متقاربة استناداً الى اختبار ليبنتز. أمــا

متسلسلة القيم المطلقة لهذه المتسلسلة فهي المتسلسلة المتجانسة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ • ومنه فالمتسلسلة المفروضة تكون متقاربة شرطياً •

مثال (٢) : هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ متقاربة باطلاق أم شرطياً •

الحل : بما أن متسلسلة القيم المطلقة لهذه المتسلسلة هي المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ فإن المتسلسلة المفروضة تكون متقاربة باطلاق •

ـ تمارين ـ

(١) ادرس تقارب كل من المتسلسلات العددية التالية :

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ الجواب : متباعدة •

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ الجواب : متقاربة •

(ﺟ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ الجواب : متباعدة •

(د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ الجواب : متقاربة •

(ﻫ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{5+n^4}$ الجواب : متقاربة •

(و) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$ الجواب : متقاربة •

(ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}\right)^2$ الجواب : متقاربة •

(ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ الجواب : متقاربة •

(ط) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ الجواب : متقاربة •

(ي) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ الجواب : متباعدة •

(ع) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ الجواب : متباعدة ،

(ل) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ الجواب : متباعدة ،

(م) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - n)$ الجواب : متباعدة ،

(٢) هل المتسلسلة الآتية متقاربة باطلاق أم شرطياً :

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ الجواب : متقاربة شرطياً .

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ الجواب :متقاربة باطلاق .

(حـ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)}}{3^n}$ الجواب : متقاربة باطلاق .

(د) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-2}}$ الجواب : متقاربة شرطياً ،

(هـ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^n}{(2n+1)^n}$ الجواب : متقاربة باطلاق ،

(و) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ الجواب : متقاربة شرطياً ،

(ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2n \cdot (2n-1)}{(2n+1)^4}$ الجواب : متقاربة باطلاق ،

(٣) لتكن لدينا المتسلسلتان $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot e^{na}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot e^{-na}$ بحيث

$a \in \mathbb{R}^{+}$ و $|x| \cdot e^{a} < 1$ ، أثبت أن كلاً من هاتين المتسلسلتين

متقاربة وأن مجموع الأولى هو $\frac{1}{1-xe^{a}}$ ومجموع الثانية هو $\frac{1}{1-xe^{-a}}$.

(٤) أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{\frac{1}{2n-1}} - 2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$ متقاربة وأن

مجموعها يساوي 1 .

الفصـــل الرابـــــــع

الدوال (التوابع) الحقيقيـة

٤ـ١ ـ الدوال الحقيقية على مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$:

إن المقادير التي لا تتغير قيمها، أي تبقى ثابتة أثناء مناقشـة معينة تدعى بمقادير ثابتة. أما المقادير التي تتغير قيمها فتدعـى بمقادير متغيرة . وتسمى مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها متغير أثناء تغيراته بمنطقة تغيرات هذا المتغيــــــر .

اذا ارتبط مقداران مع بعضهما بحيث تقابل كل قيمة لأحدهما قيمـة وحيدة معينة تماماً للآخر ، فإننا سوف نقول إن هذين المقداريـــن مرتبطان داليــــــاً .

مثـال : طول محيط دائرة ونصف قطر هذه الدائرة هما مقداران مرتبطان دالياً.

إن المتغيرين x و y المرتبطين دالياً لا يمكن لهما أن يأخذا أية قيم . فإذا أعطينا أحدهما قيماً اختيارية من منطقة تغيراته فإن الآخر سيحصل على قيم مرتبطة بقيم الأول . وفي هذه الحالة يدعى المتغيـــر الأول متغيراً مستقلاً ويدعى المتغير الثاني متغيراً مرتبطاً أو دالـة . لنكتب الآن تعريفاً دقيقاً للدالــــة :

تعريف : ليكن لدينا المتغيران x و y. نقول عن المتغير y إنـه دالة في x إذا أمكن ، وفق قاعدة معينة ، إيجاد ، لكل قيمة للمتغيـــر

$x^2+y^2=r^2$

x من منطقة تغيراتهـ ، قيمة وحيدة معينة تماماً ل y .

ملاحظة : ليس من الضروري أن يكون x (في التعريف السابق) متغيراً مستقلاً ، بل قد يكون مرتبطاً بمتغير آخر أو بعدة متغيرات أخرى .

اصطلاح : تستعمل المساواة $y = f(x)$ للتعبير عن أن y دالة في x.

هذا ويمكننا أن نقول بأن الدالة $y = f(x)$ تعتبر معطاة اذا :

(أ) علمنا منطقة تغيرات المتغير x التي تسمى عادة بمنطقة اعطاء الدالة y ؛ وقد تسمى بمنطقة أو مجموعة تعريف هذه الدالة.

(ب) علمنا قاعدة الارتباط الدالي بين x و y .

وسوف لن ندرس في هذا الكتاب سوى الدوال الحقيقية المعرفة على مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ ، وهذا يعني أن المتغيرين x و y لا يمكن أن يأخذا سوى قيما حقيقية. وباختصار فإننا سندرس الدوال ـ (التطبيقات) ذات الشكل

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

حيث $X \subseteq \mathbb{R}$. إذا كانت x_0 نقطة من منطقة تعريف الدالة $f(x)$ فاننا نرمز ب $f(x_0)$ لقيمة هذه الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 .

~~٤~~ ٢ ـ طرق اعطاء الدوال : هناك عدة طرق لاعطاء الدالة سنذكر أكثرها استعمالاً ألا وهي الطريقة التحليلية التي

تتضمن تبيان الصيغة (أو الصيغ) التي تعطي الارتباط الدالـــي بين x و y •

مثـــال : $y = \frac{1}{x-2}$ و $y = \ln x$ •

تعريف : إن مجموعة جميع قيم x ، التي من أجل كل منها تكون الدالة $y = f(x)$ معطاة ، تسمى منطقة وجود أو مجموعة تعريف أو منطاقـة تعريف (تعيين) هذه الدالة •

تطبيق(١): إن الدالة الحقيقية:

$y = \sqrt{x(3-x)}$ موجودة عندما يكون $x(3-x) \geq 0$ •

ولايجاد منطقة تعريف هذه الدالة نحل المتباينة $x(3-x) \geq 0$ •

باستخدام الجدول التالـــــي :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3x - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

نلاحظ من هذا الجدول أن حل المتباينة المذكورة هو الفترة المغلقـــة $[0 , 3]$ وهذه الفترة هي منطقة تعريف الدالة y المعطـاة •

تطبيق (٢) : إن الدالة $y = \frac{1}{x-4}$ معرفة من أجل جميع قيـــم x ماعدا القيمة $x = 4$ وهذا يعني ان منطقة تعريف هـــذه الدالة هي المجموعة $]-\infty , 4[\cup]4 , +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{4\}$ •

تطبيق (٣) إن اعطاء الدالة بالصــــورة :

$$y = \begin{cases} x^3 \cancel{x^3} & (-2 \leq x \leq 1 \quad \text{عندما}) \\ 2^x \cancel{2^x} & (1 < x \leq 2 \quad \text{عندما}) \\ 4 - \cancel{x\ 4 - x} & (2 < x \leq 3 \quad \text{عندما}) \end{cases}$$

يجب أن يفهم على النحو التالي : إن هذه الدالة معرفة على الفترة المغلقة $[-2 , +3]$ ؛ وبالاضافة الى ذلك فإن هذه الدالة تتغير على الفترة $[-2 , 1]$ وفق المساواة $y = x^3$ وتتغير على الفترة $]1 , 2]$ وفق المساواة $y = 2^x$ وتتغير على الفترة $]2 , 3]$ وفق المساواة $y = 4 - x$.

إذا أعطينا دالتين :

$f(x)$ و $g(x)$ على فترة معينة و اذا كانت قيمتاهما في كل نقطة من هذه من هذه الفترة متطابقتين، فإننا نقول عن هاتين الدالتين إنهما متطابقتان على هذه الفترة ونكتب $g(x) \equiv f(x)$ من أجل كل x من هذه الفترة .

مثال : إن الدالتين $f(x) = 1$ و $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ متطابقتان على الفترة $]-\infty , +\infty[$ لأن $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ من أجل كل x من الفترة $]-\infty , +\infty[$.

وأخيراً، تجدر الإشارة

إلى أنه قد تدرس دوال كثيرة التعيينات التي تأخذ قيمتين على الاقل موافقتين لقيمة واحدة للمتغير x . فمثلاً ، للدالة y المعطاة بالمعادلة $y^2 = x$ قيمتان مختلفتان (من أجل $x = 2$ على سبيل المثال) ألا وهما $y = \mp\sqrt{2}$.

٤ – ٣ – الدوال الزوجية والدوال الفردية : سوف ندرس الدوال المعطاة على فترات متناظرة بالنسبة لمبدأ الاحداثيات : $[-a, +a]$ أو $]-a, +a[$ أو $]-\infty, +\infty[$.

تعريف: نقول عن الدالة :

$y = f(x)$ المعطاة على فترة متناظرة بالنسبة لمبدأ الاحداثيات إنها دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ من أجل أية قيمة x من هذه الفتـــــرة .

مثال : إن الدوال $y = x^2$ و $y = \cos x$ و $y = |x|$ هي دوال زوجية.

ينتج من هذا التعريف أن منحني أية دالة زوجية يكون متناظراً بالنسبة للمحور oy .

تعريف : نقول عن الدالة $y = f(x)$ المعطاة على فترة متناظـرة بالنسبة لمبدأ الاحداثيات إنها دالة فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ من أجل أية قيمة x من هذه الفتـــرة .

مثال : إن الدوال $y = x^3$ و $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{x}$ هي دوال فرديـة .

ينتج من التعريف السابق أن منحني أية دالة فرديـــة فردية يكون متناظراً بالنسبة لمبدأ الاحداثيات .

ملاحظة : ثمة دوال ليست فردية وليست زوجية . فمثلاً الدوال $y = x+1$ و $y = a^x$ و $y = x^2 + 2x - 3$ هي دوال ليست فرديـــة وليســـت زوجيـــة .

تمريـــن : هل الدالة $\sin x^2$ فردية أم زوجيـــة ؟

سنذكر الآن بعض النصوص المتعلقة بالدوال الفردية والزوجيـــة :

مبرهنة (١) : إن كلاً من حاصل جمع وحاصل طرح دالتين زوجيتين (أوفردتيين) يكون دالة زوجية [(أو فردية) على الترتيب] .

مبرهنة (٢) : إن حاصل ضرب دالتين زوجيتين أو فرديتين هو دالـــة زوجية وإن حاصل ضرب دالة زوجية بدالة فردية هو دالة فردية .

[يطلب من القارئ البرهان على صحة النصين الســـابقين] .

مبرهنة (٣) : لتكن $y = f(x)$ دالة حقيقية اختيارية معطاة على فترة متناظرة بالنسبة لمبدأ الاحداثيات . عندئذ يمكن كتابة هذه الدالة على صورة مجموع دالتين احداهما زوجية والأخرى فردية ، وكل مـــن هاتين الدالتين معطاة على نفس هذه الفتــــرة .

الاثبـات : لنأخذ الدالتين $\psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ و $\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ فنجد أن $\varphi(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \varphi(x)$

وبالتالي فإن الدالة $\varphi(x)$ زوجية . ونجد أيضاً أن :

$\psi(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\psi(x)$ وبالتالي فإن الدالة $\psi(x)$ فردية

ومنه نجد أن : $\varphi(x) + \psi(x) = f(x)$

وأن كلاً من الدالتين $\psi(x)$ و $\varphi(x)$ معطاة على نفس الفتـــرة المعطاة عليها الدالة $f(x)$. وبهذا يتم المطلوب اثباتـــه .

ملاحظة : قد نعطى دالة $f(x)$ على الفترة $[0, a]$ ويطلب تمديدها الى دالة زوجية أو فردية على الفترة $[-a, a]$. من أجل هذا الهدف نأخذ الدالة :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leqslant x \leqslant a \text{ عندما}) \\ f(-x) & (-a \leqslant x < 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

فنجد أنها زوجية على الفترة $[-a, +a]$ ، وأن مقصورها على الفترة $[0, a]$ هو $f(x)$. أو نأخذ الدالة :

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leqslant x \leqslant a \text{ عندما}) \\ -f(-x) & (-a \leqslant x < 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

فنجد أنها فردية.وننبه إلى أنه لبناء الدالة $\psi(x)$ يجب أن يكون $f(0) = 0$ [وإلا لما تحققت المساواة $f(0) = -f(0)$] .

٤ ـ ٤ ـ الدوال الدورية : لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ المعطاة في منطقة معينة X . نقول عن $f(x)$ إنها دالة دورية ذات دور l ، حيث $l \neq 0$ ، إذا كان $(x \mp l) \in X$ و $f(x \mp l) = f(x)$ من أجل كل x من المنطقة X .

ينتج من هذا التعريف أنه إذا كان l دوراً للدالة $f(x)$ فإن $\mp nl$ ، حيث $n \in \mathcal{N}^*$ ، يكون دوراً لهذه الدالة . إلاّ أنه في أغلب الأحيان ، يعتبر أصغر دور موجب (إن وجد) دوراً للدالة

الدوريــــــــــــة .

مثـال (١) : إن الدالة $y = \sin x$ دورية ذات دور 2π ،
علماً بأن الاعداد $2k\pi$ بحيث $k = \mp 1$ ، ∓ 2 ، ... ، تكـــون
أدواراً لها .

مثـال (٢) : إن الدالة الثابتة $f(x) = c$ تكون دورية ويكون كل
عدد حقيقي a مغاير للصفر دوراً لها [لأنّ : $f(x+a) = c = f(x)$]،
، وهنا لايوجد بين الأدوار الموجبة دور يعتبر الأصغر
بينها .

٤ـ٥ ـ الدالة المعاكسة لدالة معطاة : لتكن لدينا الدالة (x) $y = f(x)$
المعرفة على فترة معينة X والتي مجموعة قيمها هي الفترة Y.
لنستخرج قيمة x بدلالة y من المعادلة $y = f(x)$ فنحصل
على المعادلة $x = \varphi(y)$ التي تعطينا دالة x (وحيدة التعيين
أو كثيرة التعيينات) في y معرفة على Y وتأخذ قيمها في X .
ونسمي الدالة $x = \varphi(y)$ بالدالة المعاكسة للدالة $y = f(x)$.

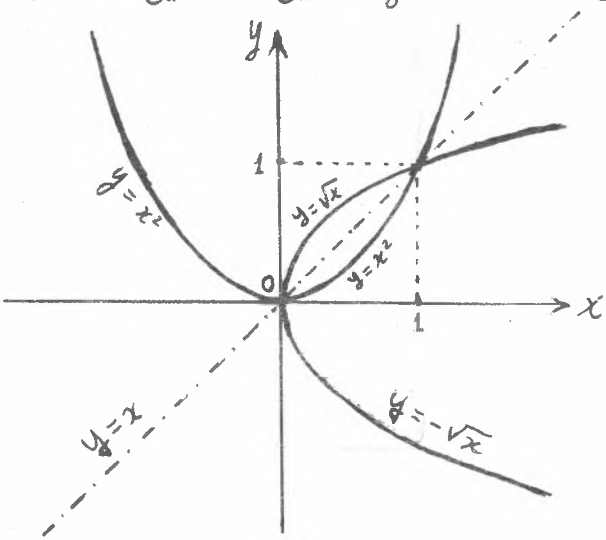
مثال (١) : إن للدالة $y = 2x+3$ ، المعرفة على الفترة $]-\infty, +\infty[$
، مجموعة قيم هي الفترة $]-\infty, +\infty[$. وإن الدالة $x = \frac{y-3}{2}$
المعرفة على $\mathbb{R}$ هي الدالة المعاكسة للدالة $y = 2x+3$.

مثال (٢) : للدالة $y = x^2$ دالتان معاكستان هما $x = \sqrt{y}$ و

$x = -\sqrt{y}$ ؛ أو الدالة المعاكسة ثنائية التعيين $x = \mp\sqrt{y}$ ؛ حيث تكون هذه الدوال موجودة من أجل $y \geqslant 0$ فقط.

ملاحظة : إن منحنيي الدالتين $y = f(x)$ و $x = \varphi(y)$ متطابقان لأنّ الصيغة التي تربط بين x و y لم تتغير •

أما إذا أردنا أن نرمز ، كالعادة ، بـ y للدالة و بـ x للمتغير فإنّ الدالة المعاكسة للدالة $y = f(x)$ تأخذ الصورة $y = \varphi(x)$ بدلاً من $x = \varphi(y)$. إلاّ أنه في هذه الحالة يكون منحنيا الدالتين $y = f(x)$ و $y = \varphi(x)$ متناظرين بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث [انظر الشكل (١) الخاص بالمثال الثاني السابق بعد ملاحظة أن للدالة $y = x^2$ دالتين معاكستين هما $y = \sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{x}$]



شكل (١)

٤ — ٦ — الدوال الابتدائية : إن جزءاً لا بأس به من هذه الـــدوا ل يعتبر معروفاً لدى القارئ ، فمثلاً الدوال $y = x^{\mu}$ و $y = a^{x}$ (حيث $a>0$) و $y = \log_a x$ (حيث $a>0$ و $a \neq 1$) و $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و $y = tg\, x$ و $y = cotg\, x$ و $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ و $y = cosec\, x = \frac{1}{\sin x}$ و $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ (حيث $n \in N^*$ و $a_0, a_1, \cdots, a_n \in R$ و $a_0 \neq 0$) و $y = \frac{a_0 x^n + \cdots + a_n}{b_0 x^m + \cdots + b_m}$ (حيث $b_0 \neq 0$ ، $a_0 \neq 0$) هي دوال ابتدائية معروفـــــة . هذا ويمكن الحصول علـى دوال جديدة بطريقة التراكب (التركيب) :

* اذا كانت لدينا دالة $z = \varphi(x)$ معرفة على الفترة : $[a, b]$ ومجموعة قيمها هي الفترة : $[c, d]$ ، واذا كانت لدينا دالة $y = f(z)$ معرفة على الفترة : $[c, d]$ فإن y تكون دالة في x يرمز لهـــا عادة بالرمز $f[\varphi(x)]$. ومن بين الدوال الابتدائية دوال — تسمى بالدوال المعاكسة للدوال المثلثية ألا وهي الدوال : $y = arc\,cotg\, x$ و $y = arc\,tg\, x$ و $y = arc\cos x$ و $y = arc\sin x$. وســـندرس هـذه الدوال فيما يلـــــــــي :

لنتأمل الدالة $y = \sin x$ فنجد أنها معرفة على الفترة $]-\infty, +\infty[$

ومجموعة قيمها هي الفترة $[+1 , -1]$ ؛ وهذا يعني أنه مـــن أجل كل y_0 من الفترة $[-1 , 1]$ يمكن ايجاد x_0 بحيث يكـو ن $\sin x_0 = y_0$. وبما أن الدالة $\sin x$ دورية فإنّ مجموعة قيم x التي كل منها تحقق المعادلة $\sin x = y_0$ هي مجموعـــة غير منتهية . إذن فالدالة المعاكسة للدالة $\sin x$ تكون كثيـــــرة التعيينات وتكون منطقة تعريفها هي الفترة $[-1 , 1]$ ومجموعة قيمها هي الفترة $]+\infty , -\infty[$ ، ويرمز لها بالرمز $x = \mathrm{Arc}\sin y$ أو بالرمز $y = \mathrm{Arc}\sin x$ اذا استخدمنا ، كالعادة ، الرموز — المألوفة . وللحصول على دالة وحيدة التعيين يُشترط أن نقابل كل قيمة لـ x من الفترة $[+1 , -1]$ بتلك القيمة لـ $y = \mathrm{Arc}\sin x$ التي تنتمي إلى الفترة $[\frac{\pi}{2} , -\frac{\pi}{2}]$. وتدعى هذه القيم لـ $\mathrm{Arc}\sin x$ بالقيم الرئيسية لها ويرمز لها بالرمز $y = \mathrm{arc}\sin x$. اذن فالدالة $y = \mathrm{arc}\sin x$ تكون دالة وحيدة التعيين معرفة على الفتـــرة $[-1 , +1]$ ومعاكسة للدالة $y = \sin x$ وذلك اذا اعتبرنا هذه الدالة $\sin x$ معطاة على الفترة $[\frac{\pi}{2} , -\frac{\pi}{2}]$ فقط . وتجدر الاشارة الى أن بقية قيم الدالة $y = \mathrm{Arc}\sin x$ يمكن الحصول عليها بالصيغة :

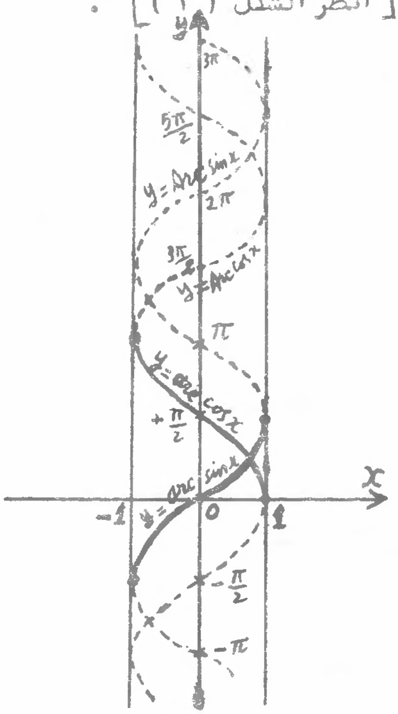
$$\mathrm{Arc}\sin x = k\pi + (-1)^k \mathrm{arc}\sin x$$ حيث :

$k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \ldots$ [انظر الشكل (٢)] .

وتعرف ، بطريقة مماثلة ، الدالة كثيرة التعيينات $y = Arc\cos x$ كدالة معاكسة للدالة $y = \cos x$. وتسمى قيم هذه الدالة من الفترة $[0, \pi]$ بالقيم الرئيسية لها ويرمز لها بالرمز $y = arc\cos x$. أما بقية قيم الدالة $Arc\cos x$ فتتعين بالصيغة :

$$Arc\cos x = 2K\pi \mp arc\cos x$$ ؛

حيث: $K = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$ [انظر الشكل (٢)] :



شـكل (٢)

أما الدالة $y = Arc\,tg\,x$ فهي معاكسة للدالة $y = tg\,x$. وبما أن الدالة $tg\,x$ تأخذ جميع القيم من الفترة $]-\infty, +\infty[$ فإن منطقة تعريف الدالة $y = Arc\,tg\,x$ هي الفترة $]-\infty, +\infty[$. ولما كانت الدالة $tg\,x$ دورية فإنه تقابل كل قيمة لـ y مجموعة غير منتهية من قيم $x = Arc\,tg\,y$ وبالتالي فالدالة $y = Arc\,tg\,x$ تكون دالة كثيرة التعيينات .

وتدعى قيم هذه الدالة من الفترة $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ بالقيم الرئيسية لها ويرمز لها بالرمز $y = arc\,tg\,x$. أما بقية قيم الدالة $Arc\,tg\,x$

فتتعيّن بالصيغة التالية $(k = 0 \text{ ، } \pm 1 \text{ ، } \pm 2 \text{ ، } \pm 3 \text{ ، } \cdots)$:

$Arctg\, x = arc\, tg\, x + k\pi$. وبذلك فإن

منطقة تعريف الدالة $y = arc\, tg\, x$ هي الفترة $]-\infty , +\infty[$.

أما مجموعة قيمها فهي الفترة $]-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}[$ ((انظر الشكل (٣))) .

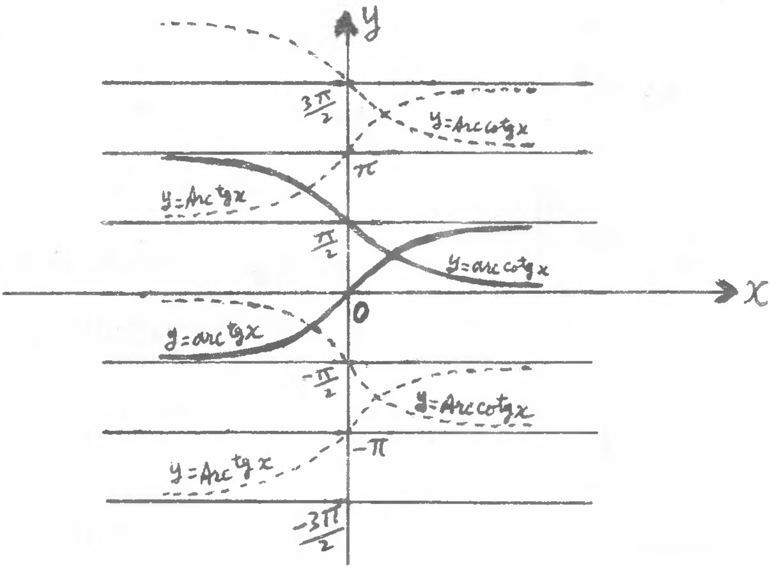
وتعرّف بصورة مماثلة ، الدالة كثيرة التعيينات $y = Arc\, cotg\, x$ كدالة

معاكسة للدالة $y = cotg\, x$. وتؤلف القيم الرئيسية لهذه الدالة

الفترة $]0 , \pi[$. أما بقية قيم الدالة $Arc\, cotg\, x$ فتتعيّن بالصيغة

التالية ((انظر الشكل (٣))) :

$$Arc\, cotg\, x = arc\, cotg\, x + k\pi \text{ ، } k = 0 \text{ ، } \mp 1 \text{ ، } \mp 2 \text{ ، } \mp 3 \text{ ، } \cdots$$



شكل (٣)

$\text{arc}\sin x , \text{arc}\cos x ....$ زاوية محسوبة تعريفاً هي [١،١-]
ذات خطين مجاور $x_0 - \delta , x_0 + \delta$

ينتج من تعريف الدوال المعاكســــة للدوال المثلثية أنّ :

$$\sin(\text{arc}\sin x) = x \qquad \cos(\text{arc}\cos x) = x$$

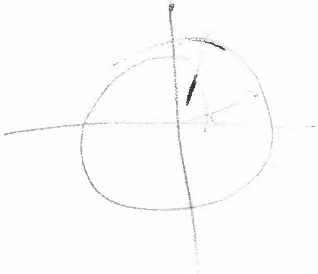
$$tg(\text{arc}\, tg\, x) = x \qquad \cot g(\text{arc} \cot g\, x) = x$$

ولما كان ؛ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin x\right) = \sin \text{arc} \sin x = x$ ،

حيث $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin x \leqslant \pi$ ،

و $\cot g\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc}\, tg\, x\right) = tg\, \text{arc}\, tg\, x = x$ ؛

حيث $0 < \frac{\pi}{2} - \text{arc}\, tg\, x < \pi$



فإنّ :
$$\text{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin x$$
$$\text{arc}\cot g\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\, tg\, x$$

وكذلك يمكن اســــتنتاج أن :

$$\sin \text{arc}\cos x = \sqrt{1 - \cos^2 \text{arc}\cos x} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos \text{arc}\sin x = \sqrt{1 - \sin^2 \text{arc}\sin x} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$tg\, \text{arc}\sin x = \frac{\sin \text{arc}\sin x}{\cos \text{arc}\sin x} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

٤ ــ ٧ ــ نهاية دالة : لنفرض أنه لدينا دالة $y = f(x)$ معطاة على فترة معينة X باستثناء ، ربما ، النقطة x_0 من هذه الفترة . ثــــم لنأخذ متتالية عددية حقيقية لانهائية :

$$x_1 ، x_2 ، x_3 ، \dots ، x_n ، \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

من قيم x (أي من عناصر X) متقاربة من x_0 وبحيث يكـــون $x_n \neq x_0$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$. عندئذ نحصل علـــى المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية :

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,\ f(x_n),\ \cdots\cdots \quad (2)$$

تعريف (١) : نقول عن العدد الحقيقي A إنه نهاية الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 (عندما $x \longrightarrow x_0$) ونكتب $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ أو $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$ اذا وفقط اذا تحقق مايلـــي :

((من أجل كل متتالية (1) من عناصر X، متقاربة من x_0 وبحيث أنّ $x_n \neq x_0$ أياً كان n من $\mathcal{N}^*$، فإنّ المتتالية (2) تكون متقاربـــة من A)).

تعادل صحيح

تعريف (٢) : نقول عن العدد الحقيقي A إنه نهاية الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 (أيْ عندما $x \longrightarrow x_0$) اذا وفقط اذا تحقق مايلـــي :

سنتعرض للتعريف (ع) لاحقاً

[من أجل كل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث يكون الاقتضاء التالي صحيحـــاً :

$$\left[\left(\forall x \in X : x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right) \right.$$

يقال عن التعريف (١) بأنه التعريف بلغة المتتاليات. أما التعريف (٢) فيقال عنه بأنه التعريف بلغـــة $\delta - \varepsilon$.

مبرهنة (١) : إن التعريفين (١) و (٢) السابقين متكافئان ، أيْ :

إذا كانت لدالة $f(x)$ نهاية في نقطة x_0 بحسب أحد هذين التعريفين فإن لهذه الدالة نفس هذه النهاية في النقطة x_0 بحسب التعريف الآخر .

الاثبات : أ) لنفرض أن العدد A هو نهاية للدالة $f(x)$ في النقطة x_0 بحسب التعريف (١) . ولنفرض جدلاً أن A ليس نهاية لـ $f(x)$ في النقطة x_0 بحسب التعريف (٢) . عندئذ يوجد $\varepsilon_0 \in R^{(+)}$ بحيث من أجله يتحقق مايلي :

توجد ، من أجل كل δ من $R^{(+)}$ ، نقطة واحدة على الأقل مثل $x \in X$ بحيث يكون :

$$x \neq x_0 \text{ و } |x - x_0| < \delta \text{ و } |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$$

اذن، من أجل $\delta = 1$ يوجد في X عنصر مثل x_1 بحيث يكون :

$$x_1 \neq x_0 \text{ و } |x_1 - x_0| < 1 \text{ و } |f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$$

ومن أجل $\delta = \frac{1}{2}$ يوجد في X عنصر مثل x_2 بحيث يكون :

$$x_2 \neq x_0 \text{ و } |x_2 - x_0| < \tfrac{1}{2} \text{ و } |f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$$

ومن أجل $\delta = \frac{1}{3}$ يوجد في X عنصر مثل x_3 بحيث يكون :

$$x_3 \neq x_0 \text{ و } |x_3 - x_0| < \tfrac{1}{3} \text{ و } |f(x_3) - A| \geq \varepsilon_0$$

وهكذا ....

ومن أجل $\frac{1}{n} = \delta$ يوجد في X عنصر مثل x_n بحيث يكـــون :

$$x_n \neq x_0 \text{ و } |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ و } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$$

وهكــــــذا ....

وبهذا نحصل على المتتالية العددية الحقيقية اللانهائية $\{x_n\}$ من عناصر X المتقاربة من x_0 وبحيث يكون $x_n \neq x_0$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$ [تكفي ملاحظة أن $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ $|x_n - x_0| <$ عندما $n \longrightarrow \infty$] .

ومنه بحسب التعريف (١) يكون $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$. وبالتالي يوجد ، من أجل العدد الحقيقي الموجب ε_0 ، عدد طبيعي $N \geqslant 1$ بحيث يكون $|f(x_n) - A| < \varepsilon_0$ عندما $n \geqslant N$. ولكن هذا غير ممكن لأنه من أجل جميع قيم n يكون $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

إذن فالعدد A يكون نهاية لـ $f(x)$ في النقطة x_0 بحسب التعريف (٢) .

٢) لنفرض أن العدد A هو نهاية للدالة $f(x)$ في النقطة x_0 بحسب التعريف (٢) وليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$. عندئذ يوجد $\delta \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكـــــون :

$$\forall x \in X : x \neq x_0 \text{ و } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

لنأخذ متتالية عددية حقيقية لانهائية $\{x_n\}$ متقاربة من x_0 وبحيث يكون $x_n \neq x_0$ من أجل كل n من $\mathcal{N}^*$. عندئذ يوجد ،

من أجل العدد الحقيقي الموجب δ ، عدد طبيعي $N \geqslant 1$ بحيث

يكون $|x_n - x_0| < \delta$ عندما $n \geq N$ ، وبالتالي يكـــون

$|f(x_n) - A| < \varepsilon$ عندما $n \geq N$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

وبما أن المتتالية $\{x_n\}$ المتقاربة من x_0 $(x_n \neq x_0)$

أخذت بشكل كيفي فإنه يمكننا أن نقول بأن العدد A يكون نهاية لـ

$f(x)$ في النقطة x_0 بحسب التعريف (١) وبهذا يتم المطلـــوب

اثباتـــــــه .

مثال (١) : أثبت أن للدالة $f(x) = x$ نهاية في أيّة نقطة $x_0 = a$

، وهذه النهاية مساوية لـ a ، أي $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$.

الحل : ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، ولنأخذ $\delta \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكون $0 < \delta \leqslant \varepsilon$.

عندئــــذ نجـــــد :

$$|x - x_0| = |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$$

اذن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$

مثـــال (٢) أثبت أن :

$$\lim_{x\to\beta} (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m) =$$
$$= a_0 \beta^m + a_1 \beta^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\beta + a_m$$

الحـــل : لتكن $\{x_n\}$ متتالية اختيارية متقاربة من β . عندئـــذ

يكـــــون :

$\lim\limits_{x_n\to\beta} a_0 x_n^m = a_0\cdot\beta^m$ ، $\lim\limits_{x_n\to\beta} a_1 x_n^{m-1} = a_1\cdot\beta^{m-1}$ ، ... ،

، $\lim\limits_{x_n\to\beta} a_{m-1}\cdot x_n = a_{m-1}\cdot\beta$ ، $\lim\limits_{x_n\to\beta} a_m = a_m$

ومنه نحصل على المطلـــــــوب .

مثـال (٣) : أثبت أن $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-3x-1) = -3$.

الحــل : بحسب المثال السابق يمكننا بسهولة أن نحصل على المطلوب .

أما اذا أردنا حل هذا المثال بطريقة أخرى بحسب التعريف بلغـــــة $\delta - \varepsilon$ نأخذ عدداً حقيقياً موجباً ε ولنبحث عن $\delta \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكـــــــــون :

$$\forall x : |x-2|<\delta \Rightarrow |(x^2-3x-1)-(-3)|<\varepsilon$$

من أجل ذلك نلاحظ أن :

$$(x^2-3x-1)-(-3) = x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$$

كما ونلاحظ أن :

$$\left[|(x^2-3x-1)-(-3)|<\varepsilon \Leftrightarrow |(x-2)(x-1)|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2||x-1|<\varepsilon\right]$$

$$\left[|x-2|<\delta \Rightarrow |x-1| = |(x-2)+1| \leqslant |x-2|+1 < \delta+1 \Rightarrow \right.$$
$$\left.\Rightarrow |x-2|\cdot|x-1| < \delta(\delta+1)\right]$$

ومنه يكفي أن نأخذ δ من $\mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكون $\delta\cdot(\delta+1)=\varepsilon$.

وبحل هذه المعادلة نجد $\delta = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ وبالتالي يجـــب

أن نأخذ $\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}-1}{2} = \delta = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ وبذلك يتم المطلوب .

وكحالة خاصة ، اذا كان $\varepsilon = 2$ فإن $\delta = 1$ ، واذا كان $\varepsilon = \frac{1}{100}$

فإن $\delta = 0{,}005$ .... الخ .

مثال (٤) : لتكن لدينا الدالة $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ،

المعرفة من أجل جميع قيم x المغايرة للصفر . أثبت أنه لا توجد

لهذه الدالة نهاية في النقطة $x = 0$.

الحل : لنأخذ المتتاليتين المتقاربتين من الصفر :

$$(1)\quad \frac{1}{\pi}\ \text{و}\ \frac{1}{2\pi}\ \text{و}\ \frac{1}{3\pi}\ \text{و}\ \cdots\ \text{و}\ \frac{1}{n\pi}\ \text{و}\ \cdots$$

$$(2)\quad \frac{2}{\pi}\ \text{و}\ \frac{2}{5\pi}\ \text{و}\ \frac{2}{9\pi}\ \text{و}\ \cdots\ \text{و}\ \frac{2}{(4n-3)\pi}\ \text{و}\ \cdots$$

ثم لنأخذ المتتاليتين :

$$(1')\quad f\left(\frac{1}{\pi}\right),\ f\left(\frac{1}{2\pi}\right)\ \text{و}\ f\left(\frac{1}{3\pi}\right)\ \text{و}\ \cdots\ \text{و}\ f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\ \text{و}\ \cdots$$

$$(2')\quad f\left(\frac{2}{\pi}\right),\ f\left(\frac{2}{5\pi}\right),\ f\left(\frac{2}{9\pi}\right),\ \cdots,\ f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right),\ \cdots$$

فنجد أن المتتالية ($1'$) متقاربة من الصفر ،

لأنّ :
$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$$

كما ونجد أن المتتالية ($2'$) متقاربة من الواحد لأنّ :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{(4n-3)\pi}{2} = 1$$

لما كانت نهايتا المتتاليتين ($1'$) و ($2'$) مختلفتين فإنه لاتوجد للدالة

$\sin \frac{1}{x}$ نهاية في النقطة $x = 0$ وهو المطلوب اثباته .

إلى جانب مفهوم نهاية دالة في نقطة يوجد مفهومان آخران همـــا ((نهاية دالة في نقطة من اليسار)) و ((نهاية دالة في نقطة مـــن اليمين)) : اذا كانت توجد نهاية لدالة $f(x)$ في نقطة x_0 عندما تسعى x الى x_0 ليس بشكل اعتباطي بل فقط من اليســـار (أي أن قيم x تبقى دوماً أصغر من x_0 ، أو يقال أحياناً إن x تسعى الى x_0 بقيم متزايدة) ، فإننا نحصل على تعريف النهاية من اليسار لهذه الدالة في النقطة x_0 ، ونرمز حينئذ لهذه النهاية مـــن اليسار بالرمز $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$.

وبصورة مماثلة ، اذا كانت توجد نهاية للدالة $f(x)$ في النقطة x_0 عندما تسعى x الى x_0 من اليمين فقط (أي أن قيم x تبقـــى دوماً أكبر من x_0 ، أو يقال أحياناً إن x تسعى إلى x_0 بقيم متناقصة)، فإننا نحصل على تعريف النهاية من اليمين لهذه الدالة في النقطة x_0 ، ونرمز حينئذ لهذه النهاية من اليمين بالرمز $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$

و تسمى النهايتان من اليمين ومن اليسار بنهايتيـــن من طرف واحد .

ينتج من تعريف النهاية أنه إذا كانت توجد لدالة $f(x)$ نهايـــة في نقطة داخلية x_0 من الفترة X فإنه لهذه الدالة نهايتين مـــن طرف واحد في هذه النقطة x_0 ، ويكـــــون :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

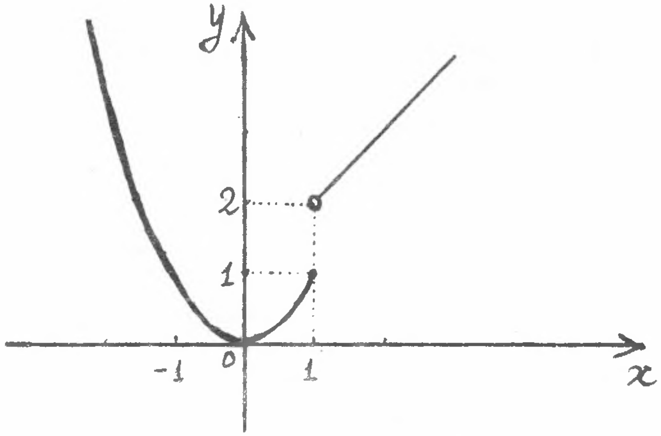
إلاّ أنه قد توجد لدالة نهايتان من طرف واحد في نقطة دون أن توجد لها نهاية في هذه النقطة .

مثال (٥) : لا توجد للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leqslant 1 \text{ عندما}) \\ x+1 & (x > 1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

نهاية في النقطة $x = 1$

ولكن توجد لها نهاية من اليسار مساوية لـ 1 وتوجد لها نهاية من اليمين مساوية لـ 2 [انظر الشكل (٤)] :



شكل (٤)

وأيضاً ، اذا كانت توجد لدالة نهايتان من طرف واحد في نقطة وكانت قيمتا هاتين النهايتين متساويتين ، فإنّ القيمة المشتركة لهاتين النهايتين تكون نهاية لهذه الدالة في هذه النقطة .

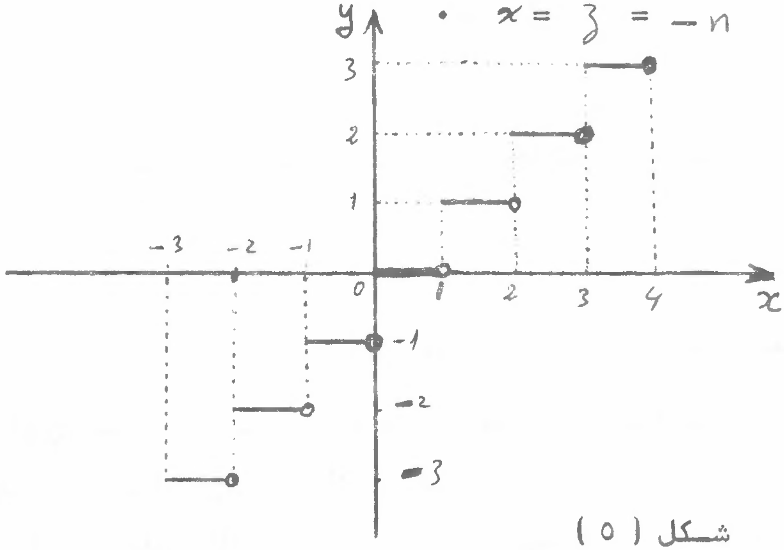
مثال (٦) : لنأخذ الدالة $E(x)$ التي قيمتها ، من أجل كل

x ، تساوي أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x [مثلاً: $E(2\frac{1}{2})=2$ و $E(0)=0$ و $E(\frac{1}{2})=0$ و $E(5)=5$ و $E(\sqrt{20})=4$ و $E(-\frac{1}{2})=-1$ وهكذا ......]))

انظر الشكل ٥)) أوجد النهايات من طرف واحد لهذه الدالة في النقطة $x=\zeta$ ، حيث $\zeta\in\mathbb{Z}$.

الحل : لنفرض أن $x=\zeta=n\in\mathbb{N}$. عندئذ نجد أن الدالة تكون ثابتة على الفترتين $[n-1,n[$ و $[n,n+1[$ حيث $E(x)=n$ على الفترة $[n,n+1[$ و $E(x)=n-1$ على الفترة $[n-1,n[$. ومنه $\lim\limits_{x\to n-0}E(x)=n-1$ و $\lim\limits_{x\to n+0}E(x)=n$

وبطريقة مماثلة نحصل على النهايات من طرف واحد لهذه الدالة عندما $x=\zeta=-n$.



شكل (٥)

لتكن لدينا الدالة $f(x)$ المعطاة في فترة X . عندئــذ يمكن ، بصورة مشابهة ، تعريف النهاية غير المحدودة في نقطة x_0 . (عندما $x \to x_0$) . ولذلك سنذكر تعريفين متكافئين للنهاية غيــر المحـــــدودة : أي لا نسمي النهاية محدودة إنما النهاية نسميها غير محدودة

تعريف (٣) : إذا كان لدينا ، من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ متقاربة من x_0) حيث $x_n \neq x_0$ و x_n من X) ، $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ ، فإننا نقول إن للدالة $f(x)$ نهاية غير محدودة في النقطة x_0 .

تعريف (٤) : نقول عن الدالة $f(x)$ إن لها نهاية غير محدودة في النقطة x_0 اذا كان يوجد ، من أجل كل $M \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، عدد حقيقي موجب δ بحيث يتحقق مايلــــــي :

$$\forall x \in X : x \neq x_0 , |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

يرمز للنهاية غير المحدودة للدالة $f(x)$ في النقطة x_0 بالرمز :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \text{أو} \quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty \ .$$

كما وتعرف ، بصورة مماثلة للامتناهيات في الكبر ، الصيغتان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. فمثلاً ، الصيغة $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ تعني أن الدالة $f(x)$ تحقق شروط التعريف (٣) أو التعريف (٤) .

وبالاضافة الى ذلك ، فإنّ هذه الدالة تأخذ قيماً سالبة فــي جوار للنقطة x_0 . اذا حصلنا على النهاية غير المحدودة للدالــــة

$f(x)$ في النقطة x_0 عندما تسعى x الى x_0 من اليسار فقط (أي $x \longrightarrow x_0 - 0$) أو من اليمين فقط (أي $x \longrightarrow x_0 + 0$) فإننا نقول في هذه الحالة إن هذه النهاية غير المحدودة هي نهاية من طرف واحد في هذه النقطة • إذا كانت الدالة $f(x)$ معطاة في فترة ، واحد على الأقل من بين طرفيها غير محدود ، فإنه يوجد معنى لتعريف نهاية الدالة عندما تسعى x الى اللانهاية • فمثلاً ، اذا كانت $f(x)$ دالة معطاة في الفترة $]a, +\infty[$ فإنه يمكننا تعريف $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ كما يلي :

الخطوط العريضة

تعريف (٥) : نقول عن العدد الحقيقي A إنه نهاية للدالة $f(x)$ عندما $x \longrightarrow +\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

((من أجل كل $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ يوجد عدد حقيقي K بحيث يكون $|f(x) - A| < \varepsilon$ عندما $x > K$)) •

$\forall \varepsilon > 0 : \exists K : x > K : |f(x) - A| < \varepsilon$.

ملاحظة : إن المتباينة $|f(x) - A| < \varepsilon$ تكافئ المتباينة $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ •

ومنه يمكننا أن نقول بأن المساواة $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ تعني هندسياً أن المنحني $y = f(x)$ يقترب بلا حدود من المستقيم $y = A$ عندما $x \longrightarrow +\infty$ ، وهذا يعني أنه $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ يوجد $K \in \mathbb{R}$ بحيث يكون المنحني $y = f(x)$ واقعاً بين المستقيمين $y = A - \varepsilon$ و $y = A + \varepsilon$ من أجل جميع قيم x التي

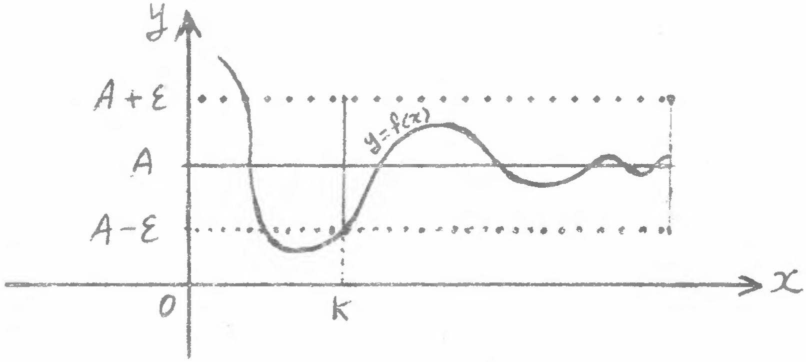
مثال : أوجد نهاية $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ عندما $x\to+\infty$ لنفحص ε

نثبت $\varepsilon>0$ سنبرهن أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ أي صحة التعريف (5)

$|f(x)-A|=|e^{\frac{1}{x}}-1| = e^{\frac{1}{x}}-1<\varepsilon \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}<\varepsilon+1 \Rightarrow \frac{1}{x}<\ln(\varepsilon+1)$

ولنفرض أن $\frac{1}{K}=\ln(\varepsilon+1)$ ... $x>K$ وبالعودة بالعكس يكون قد تحقق التعريف (5)

هي أكبر من K ((انظر الشكل (٦))) .



شكل (٦)

تعريف (٦) : نقول عن العدد الحقيقي A إنه نهاية للدالة $f(x)$

عندما $x\to+\infty$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

((من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من قيم x ، متباعدة إلى $+\infty$ ،

وجميع حدودها موجبة ابتداءً من حد معين ، تكون المتتالية $\{f(x_n)\}$

متقاربة من A)) . وكذلك نعرّف $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ كمايلي :

تعريف (٧) : نقول عن العدد A إنه نهاية للدالة $f(x)$

عندما $x\to-\infty$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

((من أجل كل $\varepsilon\in\mathbb{R}^{(+)}$ يوجد عدد حقيقي K بحيث يكون :

$|f(x)-A|<\varepsilon$ عندما $x<K$)) .

تعريف (٨) : نقول عن العدد A إنه نهاية للدالة $f(x)$

عندما $x\to-\infty$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

« من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من قيم x ،
متباعدة إلى $-\infty$ ، وجميع حدودها
سالبة ابتداء من حد معين ، تكون
المتتالية $\{f(x_n)\}$ متقاربة من A »

مثال (٧) : أثبت أن $\lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1$.

الحل : ليكن $\varepsilon \in R^{(+)}$ ولنعيّن قيم x التي
من أجلها تتحقق المتباينة $|e^{1/x} - 1| < \varepsilon$.
لما كان $e^{1/x} > 1$ من أجل كل x من $R^{(+)}$
فإننا نجد :

$$|e^{1/x} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow e^{1/x} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{1/x} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \ln(1+\varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}$$

ومنه يوجد $K = \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}$ بحيث يكون :

$$x > K \Rightarrow |e^{1/x} - 1| < \varepsilon$$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1$

وكذلك نعرّف $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ كما يلي :

تعريف (٩) : إذا كان لدينا ، من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من

قيم x ، متباعدة إلى $+\infty$ ، وجميع حدودها موجبة ابتداء من حد معين ، $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$ ، فإننا نقول إن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

تعريف (١٠) : نقول إن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ اذا كان يوجد ، من أجل كل $M \in \mathbb{R}$ ، عدد حقيقي K بحيث يتحقق مايلي :

$$x > K \Longrightarrow f(x) > M$$

تعريف (١١) : اذا كان لدينا، من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من قيم x ، متباعدة الى $-\infty$ ، وجميع حدودها سالبة ابتداء من حد معين ، $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$ ، فإننا نقول إن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

تعريف (١٢) : نقول إن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ إذا كان يوجد ، من أجل كل $M \in \mathbb{R}$ ، عدد حقيقي K بحيث يتحقق مايلي :

$$x < K \Longrightarrow f(x) > M$$

تعريف (١٣) : اذا كان لدينا ، من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من قيم x ، متباعدة إلى $+\infty$ ، وجميع حدودها موجبة ابتداء من حد معين ، $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$ ، فإننا نقول إن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

تعريف (١٤) : نقول إن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ اذا كان يوجد، من أجل كل $M \in \mathbb{R}$ ، عدد حقيقي K بحيث يتحقق مايلي :

$$x > K \Longrightarrow f(x) < M$$

تعريف (١٥) : اذا كان لدينا ، من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من قيم x ، متباعدة الى $-\infty$ ، وجميع حدودها سالبة ابتداء من حد معين ، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$ ، فإننا نقول إن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

تعريف (١٦) : نقول إن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ اذا كان يوجد ، من أجل كل $M \in \mathbb{R}$ ، عدد حقيقي K بحيث يتحقق مايلي :

$$x < K \Longrightarrow f(x) < M$$

ملاحظة : اذا كانت للدالة $f(x)$ نفس النهاية عندما $n \to +\infty$ وعندما $x \to -\infty$ فإن هذه النهاية يمكن أن تكتب بالصورة :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad .$$

مثال (٨) : أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ بحيث $a > 1$.

الحل : ليكن $M \in \mathbb{R}$ ، ولنأخذ $B \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكون $B > M$.

عندئذ يوجد العدد الحقيقي $K = \log_a B$ بحيث يكون :

$$x > K \Rightarrow x > \log_a B \Rightarrow a^x > B \Rightarrow a^x > M$$

وبهذا يتم المطلوب اثباته .

تمارين

١) اثبت ، باستخدام تعريف نهاية دالة ، أن للدالة $f(x) = 3x^2 - 2$ نهاية في النقطة $x = 2$ مساوية لـ 10 . ماهي قيمة δ لكي يتحقق الاقتضاء التالي :

$$|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-10|<0{,}01$$

٢) أثبت ، باستخدام تعريف نهاية دالة ، أن $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+8}{x-1} = 2$.

٣) أثبت ، باستخدام تعريف نهاية دالة ، أن $\lim_{x\to -\infty} a^{x} = 0$

حيـــــــــث $a>1$.

٤) أثبت ، باستخدام تعريف نهاية دالة ، أنّ : $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{5x+2} \neq 1$.

٥) أثبت أنه لا توجد للدالة $y = x - E(x)$ نهاية في كل نقطة $x = z$ ، حيث $z \in \mathbb{Z}$. أوجد النهايات من طرف واحـــد لهذه الدالة في هذه النقـــاط .

غير مطلوب البرهان

٤ ـ ٨ ـ مبرهنات على نهايات الدوال : اذا استخدمنا تعريف نهاية دالة $f(x)$ يمكننا من جديد اثبات صحة مبرهنات النهايـات ، التي درسناها في الفصل الثاني من هذا الكتاب ولكن هذا العمـــل لا ضرورة له لأنه اذا انطلقنا من تعريف نهاية دالة بلغة المتتاليـــات واستعملنا مبرهنات النهايات ، التي في الفصل الثاني ، من أجـل المتتاليات $\{f(x_n)\}$ فإننا نحصل على صحة مبرهنات النهايات للدوال . وكمثال سنبرهن على صحة النص الآتي (آخذين بعيـــن الاعتبار أن منطقة تعريف الدالة الناتجة من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة دوال هي تقاطع مناطق تعريف هذه الدوال) :

مبرهنـــــة : [illegible]

[illegible]

لنفرض أن للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ ، المعرفتين على فترة معينة ، نهايتين محدودتين في النقطة x_0 من هذه الفترة ألا وهما
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. عندئـــــذ
تكون النهايات الآتية موجودة ومحدودة وقيمها معينة وفق الآتـــي :

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B \text{ و } \left[\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \ (\text{نفرض هنا } B \neq 0)\right]$$

$$\text{و } \lim_{x \to x_0}[f(x) \mp g(x)] = A \mp B$$

الاثبـــــات : بما أن $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$
فإنه من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من قيم x ، متقاربة من x_0 ، حيث $x_n \neq x_0$ ، يكون $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ و $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = B$
وبالتالـــــي :

$$\lim_{n \to \infty}[f(x_n) + g(x_n)] = A + B$$

ومنـــه : $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = A + B$.

ويُبرهن على صحة بقية المطاليب بطريقة مماثلـــــة .

تمرين مشهور : لنأخذ الدالة $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ ، — الموجودة من أجل جميع قيم x التي تنتمي الى المجموعة :
$\{x : x \in \mathbb{R}, x > -1\}$. أثبت أن : $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

الحـــل : لنفرض أن x تسعى الى الصفر من اليمين ولنأخذ متتاليـــة $\{x_k\}$ من قيم x متقاربة من الصفـــر ، حيث $x_k > 0$.

يمكننا اعتبار أن $1 > x_K > 0$ ولنضع $E\left(\frac{1}{x_K}\right) = n_K$.

عند ئذ يكون $n_K \leq \frac{1}{x_K} < n_K + 1$ وبالتالي ———

$\frac{1}{n_K+1} < x_K \leq \frac{1}{n_K}$. لما كان $\lim\limits_{K\to\infty} x_K = 0$ فإنّ $\lim\limits_{K\to\infty} n_K = \infty$.

ومنـــه $\left(1 + \frac{1}{n_K+1}\right)^{n_K} < (1 + x_K)^{\frac{1}{x_K}} < \left(1 + \frac{1}{n_K}\right)^{n_K+1}$

ولكن : $\lim\limits_{n_K\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_K+1}\right)^{n_K} = \lim\limits_{n_K\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n_K+1}\right)^{n_K+1}}{1+\frac{1}{n_K+1}} = e$

$$\lim_{n_K\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_K}\right)^{n_K+1} = \lim_{n_K\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n_K}\right)^{n_K}\cdot\left(1+\frac{1}{n_K}\right)\right] = e$$

إذن : $\lim\limits_{x_K\to 0}(1 + x_K)^{\frac{1}{x_K}} = e$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(كتبنا $+0$ $x \longrightarrow +0$ بدلاً من $x \longrightarrow 0+0$) .

لنفرض الآن أن x تسعى الى الصفر من اليسار ولنأخذ متتالية $\{x_K\}$

من قيم x متقاربة من الصفر ، حيث $x_K < 0$.يمكننا اعتبار $-1 < x_K < 0$

لنفرض أن $y_K = -x_K$. عند ئذ يكون $0 < y_K < 1$ و y_K يسعى

الى الصفر من اليمين ، ويكون أيضـــاً :

$$(1 + x_K)^{\frac{1}{x_K}} = (1 - y_K)^{-\frac{1}{y_K}} = \left(\frac{1}{1-y_K}\right)^{\frac{1}{y_K}} =$$

$$= \left(1 + \frac{y_K}{1-y_K}\right)^{\frac{1-y_K}{y_K}} \cdot \left(1 + \frac{y_K}{1-y_K}\right)$$

ومنه :

$$\lim_{x_K\to 0}(1 + x_K)^{\frac{1}{x_K}} = \lim_{y_K\to 0}\left(1 + \frac{y_K}{1-y_K}\right)^{\frac{1-y_K}{y_K}} \cdot \lim_{y_K\to 0}\left(1 + \frac{y_K}{1-y_K}\right) =$$

$$= e \cdot 1 = e$$

وبالتالـــــي :

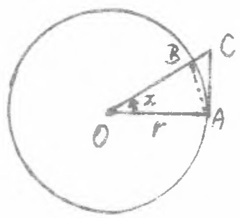
$\lim\limits_{x \to -0} (1+x)^{1/x} = e$ (كتبناه $x \to -0$ بدلاً من $x \to 0-0$) •

إذن فللدالة $f(x)$ المفروضة توجد في النقطة $x=0$ نهايتان متساويتان من طرف واحد ، القيمة المشتركة لهما هي e • وبالتالي يمكننا ان نكتب :

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

تمرين مشهور آخر : لنأخذ الدالة $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ الموجودة من أجل جميع قيم x من R^* • أثبت أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ •

الحل : لنأخذ دائرة مركزها O ونصف قطرها r ولنأخذ فيها الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ التي قياسها بالراديان يساوي x محيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$ • عندئذ [استناداً الى الشكل (٢)] يمكننا أن نكتب :



شكل (٢)

(مساحة المثلث AOB) $<$ (مساحة القطاع AOB) و

(مساحة القطاع AOB) $<$ (مساحة المثلث AOC)

ومنه : (مساحة المثلث AOB) $<$ (مساحة القطاع AOB) $<$ (مساحة المثلث AOC)

ومنه : $\frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x > \frac{1}{2} r^2 x > \frac{1}{2} r^2 \sin x$

وبالتالي : $\operatorname{tg} x > x > \sin x$

ثم لنقسم $\sin x$ على كل طرف من أطراف المتباينة الأخيرة فنجد :

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$ ومنـــه :

$$1-\cos x > 1-\frac{\sin x}{x} > 0$$

وبما أن $\sin\frac{x}{2} < 1$ فإنّ $\sin^2\frac{x}{2} < \sin\frac{x}{2}$. ومنه يكـــون

لدينا : $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} = x$

اذن ؛ $0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < x$

ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$. واذا أخذنا بمثابة δ أصغر العددين ε و $\frac{\pi}{2}$ ؛

فاننا نجد $x < \varepsilon$ عندما $\delta > x > 0$ ، وبالتالـــي :

$$0 < x < \delta \Rightarrow \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. إلاّ أننا فرضنا أن x تسعى الى

الصفـــر من اليمين ($x > 0$) . ولكن بما أن الدالة $\frac{\sin x}{x}$ زوجية

فان نهايتها تبقى مساوية للواحد عندما x تسعى الى الصفـــر مـــن

اليسار ($x < 0$) . اذن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ وبهـــذا

يتم المطلـــوب اثباتــــــــه .

ملاحظة : من المناقشة السابقة ينتج أن $x > \cos x - 1 > 0$ وبالتالـي

يمكننا ان نكتب $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$

تمرين محلول : من أجل كل x تكون المتباينة $|\sin x| \le |x|$ صحيحة .

الحــــــــل :

١) اذا كان $0 < x < \frac{\pi}{2}$ فإننا وجدنا أعلاه أن $\sin x < x$
وبالتالـــــــي $|\sin x| < |x|$.

٢) اذا كان $x = 0$ فإننا نجد $|\sin x| = |\sin 0| = 0 = |0| = |x|$.

٣) اذا كان $x \geqslant \frac{\pi}{2}$ فاننا نجد $1 < x$ و $|\sin x| \leqslant 1$
من أجل كل x ، وبالتالي يكون $|\sin x| < |x|$.

٤) اذا كان $x < 0$ فإن $-x > 0$ وبالتالي $|\sin(-x)| < |-x|$
وبالتالـــــــي $|\sin x| < |x|$.

إذن $|\sin x| \leqslant |x|$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

تعريف : نقول عن الدالة $f(x)$ إنها لامتناهٍ في الصغر عندمـــــا $x \to x_0$ اذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. ونقول عـــــن الدالة $f(x)$ انها لامتناهٍ في الكبر عندما $x \to x_0$ اذا كـــــان

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty .$$

مثـــال : إن الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 3}$ تكون لامتناهياً فـــــي الصغر عندما $x \to 2$ (لأن $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 3} = 0$) وتكـــــون لامتناهياً في الكبر عندما $x \to 3$ (لأن $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 4}{x - 3} = \infty$) .

مثال : أوجد النهاية الآتية للحدودية (كثير الحدود) من الدرجـــة n وذلك عندما $x \to$:

$$\lim_{x \to +\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n) , \quad (a_0 \neq 0)$$

الحل: $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\cdot(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n})$

$$=a_0\cdot\lim_{n\to+\infty}x^n=\infty \ .$$

فإذا كان a_0 موجباً فإن النهاية المطلوبة تكون $+\infty$ ، وإذا كان a_0 سالباً فإن النهاية المطلوبة تكون $-\infty$.

تمارين محلولة :

(١) أوجد النهاية $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+3x+4}{2x^2+3x+8}$.

الحل : لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ولذلك يتم حساب النهاية المطلوبة كما يلي :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2+3x+4}{2x^3+3x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{2+\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}}=\frac{1}{2} \ .$$

(٢) أوجد النهاية : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{3x^2-3ax+5x-5a}$.

الحل : لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ ولذلك يتم حساب النهاية المطلوبة كما يلي :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{3x^2-3ax+5x-5a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{3x+5}=\frac{3a^2}{3a+5} \ .$$

(٣) أوجد النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-4})$.

الحل : لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$ ولذلك يتم حساب النهاية المطلوبة كما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-4})=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}}=0 \ .$$

(٤) أوجد النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{tg\,x}{x}$

الحل : $\lim_{x \to 0} \frac{tg\,x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

(٥) أوجد النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

الحل : $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

(٦) أوجد النهاية $\lim_{n \to \infty} \left(2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}\right)$ بحيث x ثابت مغاير للصفر .

الحل : لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $0 \cdot \infty$ ولذلك يتم حساب النهاية المطلوبة كما يلي :

$$\lim_{n \to \infty} 2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{x \cdot \sin \frac{x}{2^n}}{x/2^n} = x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{x/2^n} =$$

$$= x \cdot 1 = x \ .$$

(٧) أوجد النهاية $\lim_{x \to 1} (1-x) \cdot tg \frac{\pi x}{2}$.

الحل : لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $0 \cdot \infty$ ولذلك يتم حساب النهاية المطلوبة كما يلي :

لنضع $1 - x = z$. عندئذ $z \to 0$ عندما $x \to 1$.

ومنه : $\lim_{x \to 1} (1-x)\, tg \frac{\pi x}{2} = \lim_{z \to 0} z\, tg \frac{\pi(1-z)}{2} =$

$$= \lim_{z \to 0} z \cdot tg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{2}\right) = \lim_{z \to 0} z \cot g \frac{\pi z}{2} = \ .$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{z \to 0} \frac{\frac{\pi z}{2}}{tg\, \frac{\pi z}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$$

(٨) أوجد النهاية $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x}$

الحل : لنضع $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \alpha$ ، عند ئذ $\alpha \to 0$ عندما $x \to \infty$.

ويكــــون $x = \frac{2+\alpha}{\alpha}$ ، ومنـــــــــه :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x} = \lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} = \lim_{\alpha \to 0} \left[(1+\alpha)^{1/\alpha} \right]^{2} (1+\alpha) =$$

$$= e^{2} \cdot 1 = e^{2}$$

(٩) أوجد النهاية $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$

الحل : لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ ولذلك يتم حساب النهاية المطلوبة كما يلـــــــي :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x \cos x - 2\cos^2 x}{\sin x - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} 2 \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

[كان من الممكن وضع $x - \frac{\pi}{4} = z$ وبالتالي $x = z + \frac{\pi}{4}$ ثم حســــاب هذه النهايـــــــة] .

ملاحظة : الى جانب ماسبق نطلب من القارئ أن يأخذ بعين الاعتبار الصيغ الآتية (التي سنبرهن على صحتها في ٤ ـــ ١٠) :

$1^{\circ})\quad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$

$2^{\circ})\quad \lim_{x \to 0} \frac{a^{x} - 1}{x} = (\log_a e)^{-1} = \ln a$

$3^{\circ})\quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu$

تمارين

(I) أوجد النهاية في كل مايلي :

١) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-8x}{5x^2+3x}$ الجواب: $-\dfrac{8}{3}$

٢) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$ الجواب: $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

٣) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-5x+8}{x^2+18x-8}$ الجواب : 3

٤) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$ الجواب: ∞

٥) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2+3x-4}{x^3+8}$ الجواب: 0

٦) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^x$ الجواب : e

٧) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ الجواب : $\dfrac{1}{e}$

٨) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{cotg} x}$ الجواب: e

٩) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x-\sqrt{x^2+5x-8}\right)$ الجواب : $-\dfrac{5}{2}$

١٠) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$ الجواب : 0

١١) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ الجواب : $\dfrac{1}{4}$

١٢) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} mx}{\operatorname{tg} nx}$ الجواب : $\dfrac{m}{n}$

١٣) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin^2(x-a)}{x^2-2ax+a^2}$ الجواب : 1

١٤) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ الجواب: $\cos a$

١٥) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$ الجواب : $\dfrac{1}{2}$

١٦) $\lim\limits_{x\to 2} (2-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$ الجواب : $\dfrac{4}{\pi}$

١٧) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - tg\, x}$ — الجواب : $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

١٨) $\lim_{x \to 3} \left[\sin \frac{x-3}{2} \cdot tg \frac{\pi x}{6} \right]$ — الجواب: $-\frac{3}{\pi}$

١٩) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x^2} - 1}{x^2}$ — الجواب : 3

٢٠) $\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ — الجواب : $\frac{1}{e}$

٢١) $\lim_{x \to e} \frac{\ln x^3 - 3}{x - e}$ — الجواب : $\frac{3}{e}$

٢٢) $\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$ — الجواب : e^2

[ارشاد : أخرج أولاً e^2 كمعامل مشترك في البسط (الصورة)]

٢٣) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x+x^2} - 1}{x + x^2}$ — الجواب : $\frac{1}{n}$

[ارشـــاد : ضع $x + x^2 = z$]

٢٤) $\lim_{x \to 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$ — الجواب : $4 \cdot \ln \frac{2}{e}$

[ارشـــاد : ضع $x - 2 = z$]

(II) أوجد النهايتين من طرف واحد في النقطة $x = 0$ للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x = 0 \text{ عندما}) \\ x-1 & (x > 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

(III) أوجد النهايتين من طرف واحد في النقطة $x = 1$ للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 1 \text{ عندما}) \\ x+2 & (x \geq 1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

(IV) أوجد النهاية $\lim_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right]$

[ارشاد : استخدم أولاً الصيغة $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$]

(V) أوجد الثابتين a و b لكي يكون :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$$

[ارشاد : وحّد المقامات (المخارج) ثم ضع معاملات x و x^2 (في البسط) مساوية للصفر] .

٤ — ٩ — الدالة المطردة ونهايتها : نقول عن الدالة $f(x)$ المعطاة على فترة معينة I إنها متزايدة على هذه الفترة I اذا تحقق مايلي :

$$\forall x, x' \in I : x' < x'' \Longrightarrow f(x') < f(x'')$$

ونقول عن $f(x)$ إنها متناقصة على الفترة I اذا تحقق مايلي :

$$\forall x, x' \in I : x' < x'' \Longrightarrow f(x') > f(x'')$$

ونقول عن $f(x)$ إنها غير متناقصة على الفترة I إذا تحقق مايلي :

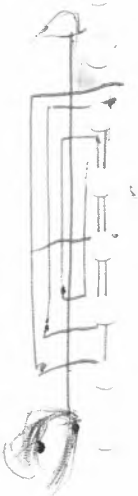
$$\forall x, x' \in I : x' < x'' \Longrightarrow f(x') \leqslant f(x'')$$

ونقول عن $f(x)$ إنها غير متزايدة على الفترة I إذا تحقق مايلي :

$$\forall x, x' \in I : x' < x'' \Longrightarrow f(x') \geqslant f(x'')$$

ونقول عن $f(x)$ إنها مطردة على الفترة I اذا كانت $f(x)$ إما متزايدة أو متناقصة أو غير متزايدة أو غير متناقصة .

مبرهنة : لتكن لدينا الدالة $f(x)$ المعطاة على فترة معينة I . ولنفرض أن هذه الدالة $f(x)$ غير متناقصة (أو غير متزايدة) على هذه الفترة I . عندئذ توجد لهذه الدالة نهايتان محدودتان من طرف واحد في كل نقطة داخلية في الفترة I ، وتوجد لـ $f(x)$ نهاية محدودة من طرف واحد في كل طرف من طرفي الفترة I .



الاثبات : لنفرض أن الدالة $f(x)$ ، المعطاة على الفترة I ، غير متناقصة على هذه الفترة . ولنأخذ نقطة $c \in I$ بحيث تكون c غير منطبقة على الطرف الأيسر للفترة I . ثم لنأخذ المجموعة من الأعداد الحقيقية

$$M = \{ f(x) : x \in I \text{ و } x < c \}$$

فنجد أن $M \neq \phi$ وأن M محدودة من الأعلى بالعدد $f(c)$ مثلاً [وذلك لأن الدالة $f(x)$ غير متناقصة] . عندئذ يوجد $\mathbb{R} \ni A = \sup M$ وسنثبت أن $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = A$ كما يلي :

نلاحظ أولاً أن $f(x) \leq A$ من أجل كل x من المجموعة $\{ x : x \in I \text{ و } x < c \}$.

ونلاحظ أيضاً أنه من أجل كل $\overset{(+)}{\mathbb{R}} \ni \varepsilon$ يوجد x' من $\{x : x \in I, x < c\}$ بحيث يكون $f(x') > A - \varepsilon$ ومنه $f(x) > A - \varepsilon$

عندما $x' < x < c$ • اذن :

$$\forall x \in I : x' < x < c \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

فاذا أخذنا بمثابة δ أيّ عدد حقيقي موجب لا يتجاوز $c - x'$ فإننا نجد: $\forall x \in I : x < c \;,\; |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

وهذا يبرهن على أن $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = A$ •

ومنه ، اذا كانت c منطبقة على الطرف الأيمن للفترة I فإنه يتم المطلوب في هذه الحالة • أما اذا كانت c نقطة داخلية في الفترة I فإنه يبرهن بطريقة مماثلة على أن النهاية $\lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ تكون موجودة ومحدودة كما ويبرهن بصورة مشابهة على وجود نهايات محدودة من طرف واحد للدالة $f(x)$ غير المتزايدة وبهذا يتم إثبات ما.

نقول عن الدالة $f(x)$ المعطاة على الفترة $[a, b]$ إنها مطردة قطعياً على هذه الفترة إذا كان يمكن تقسيم هذه الفترة $[a, b]$ الى عدد محدود من الأجزاء (الفترات) بحيث تكون الدالة $f(x)$ مطردة في كل جزء من هذه الأجزاء •

أمثلة: إنّ كلاً من الدوال الآتية تكون دالة مطردة قطعياً :

$$y = x^2 \text{ و } y = \sin x \text{ و } y = |x| \text{ و } y = x - E(x)$$

تطبيق (١) : عيّن الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x) = ax^2 + b$ مطردة •

الحل : لنفرض أولاً أن $a>0$ وليكن x_1 و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث أن $x_1<x_2$ عندئـذ يكـون :

$$f(x_2)-f(x_1)=a x_2^2+b-a x_1^2-b=a(x_2^2-x_1^2)=$$
$$=a(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

ومنه يكون (أ) $f(x_2)-f(x_1)>0$ عندما $0\leqslant x_1<x_2$.

(ب) $f(x_2)-f(x_1)<0$ عندما $x_1<x_2\leqslant 0$.

اذن ، عندما $a>0$ ، تكون الدالة $f(x)=a x^2+b$ متناقصة على الفترة $]-\infty , 0]$ ومتزايدة على الفترة $[0 , +\infty[$.

لنفرض الآن أن $a<0$. عندئذ نجد بسهولة أن هذه الدالـــة $f(x)$ تكون متزايدة على الفترة $]-\infty , 0]$ ومتناقصة على الفترة $[0 , +\infty[$.

تطبيق (٢) : عيّن الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)=a x^2+b x+c$ مطـــــــردة .

الحـل : يمكننا ، بالاتمام إلى مربع كامل ، أن نكتب :

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

ثم بفرض $X=x+\frac{b}{2a}$ نحصل على الدالـــــة $\varphi(X)=aX^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$. ومنه بحســب التطبيق (١) وضمن الشرط $a>0$ ، تكون $\varphi(X)$ متناقصـــة

عندما $X \leqslant 0$ ومتزايدة عندما $X \geqslant 0$ • وبالتالي تكـــون

$f(x)$ متناقصة عندما $x \leqslant -\frac{b}{2a}$ ومتزايدة عندما $x \geq -\frac{b}{2a}$ •

اذن فالدالة $f(x)$ متناقصة على الفترة $]-\infty , -\frac{b}{2a}]$ •

ومتزايدة على الفترة $[-\frac{b}{2a} , +\infty[$ •

أما اذا كان $a < 0$ فإن فترة التناقص تصبح فترة تزايد لـ $f(x)$

وفترة التزايد تصبح فترة تناقص لهـــــا •

تمـــاريـــن

١) أثبت أن الدالة $f(x) = x^3$ متزايدة على $\mathbb{R}$ •

٢) أثبت أن الدالة $\sin x$ متزايدة على الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$ وأن ـــ

الدالة $\cos x$ متناقصة على نفس هذه الفترة •

٣) ادرس اطراد الدالتين التاليتيـــن :

(أ) $f(x) = ax + b$ (ب) $f(x) = a^x$ ، حيث $a > 0$ •

الجواب : (أ) $f(x)$ متزايدة على $\mathbb{R}$ عندما $a > 0$ ومتناقصة على

$\mathbb{R}$ عندمـــــا $a < 0$ •

(ب) $f(x)$ متزايدة على $\mathbb{R}$ عندما $a > 1$ ومتناقصة على

$\mathbb{R}$ عندمـــــا $a < 1$ •

٤ ــ ١٠ ــ مقارنة اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر :

لنأخذ اللامتناهيتين في الصغر $\alpha = \frac{1}{x^3}$ و $\beta = \frac{1}{x}$

عندما $x \to \infty$ فنجد أن α تسعى الى الصفر بسرعة أكبر من سرعة β . إذ بالحقيقة إذا جعلنا x تأخذ ، مثلاً ، القيم :

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\ \text{،}$$

فإنّ :

$$\alpha = 1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \ldots, \frac{1}{n^3}, \ldots$$

$$\beta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

ومن هنا تتضح صحة ماقلناه .

ليكن $\alpha = \alpha(x)$ و $\beta = \beta(x)$ لامتناهيين في الصفر عندما تسعى x الى نهاية معينة لن نرمز لها بأيّ رمز ولن نضع تحت الرمز $\lim$ أيّ شيء في البحث النظري .

تعريف : نقول عن اللامتناهي في الصفر α إنه لامتناهٍ في الصفر ذو مرتبة أعلى من مرتبة اللامتناهي في الصفر β إذا كان $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$.

ونقول عن α إنه لامتناهٍ في الصفر ذو مرتبة أدنى من مرتبة اللامتناهي في الصفر β اذا كان $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$.

نلاحظ من المثال ، الذي ذكرناه قبل هذا التعريف ، أن : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1/x^3}{1/x} = 0$ مما يدل على أن مرتبة α أعلى من مرتبة β .

تعريف : نقول عن اللامتناهيين في الصفر α و β انهما من مرتبة واحدة (أي لهما نفس المرتبة) اذا كان $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$. حيث $A \in \mathbb{R}$.

حالة خاصة : اذا كان $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ فإننا نقول إن اللامتناهيين في الصغر α و β متكافئان ونكتب $\alpha \backsim \beta$.

تعريف : نقول عن اللامتناهي في الصغر α إنه لامتناهٍ في الصغر من المرتبة k بالنسبة للامتناهي في الصغر β اذا كان :

$$\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = A \neq 0 .$$

مثال (١) : إن الدالة $1 - \cos x$ هي لامتناه في الصغر (عندما $x \to 0$) من المرتبة 2 بالنسبة للامتناهي في الصغر x وذلك لأن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 .$$

مثال (٢) : إن الدالتين $\sin x$ و x تكونان لامتناهيين في الصغر متكافئين عندما $x \to 0$ ؛

وذلك لأن : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

مثال (٣) : إن الدالتين $\sin 3x$ و $\sin 5x$ تكونان لامتناهيين في الصغر من مرتبة واحدة عندما $x \to 0$ ، وذلك لأن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5} \neq 0 .$$

مثال (٤) : إن اللامتناهيين في الصغر x و $x \cdot \sin \frac{1}{x}$ غير متقارنين لأن نسبتهما هي $\sin \frac{1}{x} = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x}$ وبالتالي لاتوجد النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x}$.

مثال (٥) : قارن كلاً من اللامتناهيات في الصغر $f_1(x) = 2x$ و $f_2(x) = \sin x^2$ و $f_3(x) = \sqrt{\sin x}$ و $f_4(x) = \sqrt{1+x} - 1$

مع اللامتناهي في الصغر $\varphi(x) = x$.

الحل : أ) بما أن : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2$ ،

فإن للامتناهيين في الصغر $2x$ و x نفس المرتبة .

٢) بما أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x} = 0$ فإن $\sin x^2$ يكون لا متناهياً

في الصغر ذا مرتبة أعلى من مرتبة اللامتناهي في الصغر x ؛

[إن $\sin x^2$ هو لامتناه في الصغر من المرتبة 2 بالنسبة

للامتناهي في الصغر x وذلك بملاحظة أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$] .

٣) بما أن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\sin x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\sqrt{\frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \infty$$

فإنّ $\sqrt{\sin x}$ يكون لامتناهياً في الصغر ذا مرتبة أدنى من مرتبة —

اللامتناهي في الصغر x . [كما وإن هذا اللامتناهي في الصغر هو

من المرتبة $\frac{1}{2}$ بالنسبة للامتناهي في الصغر وذلك بملاحظة أن :

$$\left[\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\sin x}}{x^{1/2}} = 1\right] .$$

٤) بما أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$.

فإنّ للامتناهيين في الصغر $\sqrt{1+x} - 1$ و x نفس المرتبة .

مبرهنة (١) : الشرط اللازم والكافي كي يكون اللامتناهيان في الصغر

α و β متكافئين هو أن يكون $\alpha-\beta$ لامتناهيا في الصغر ذا مرتبة أعلى من مرتبة كل من α و β .

الاثبات : لزوم الشرط : ليكن $\alpha \backsim \beta$ ، عند ئذ يكون $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$

ومنه ؛ $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = \lim (1-\frac{\beta}{\alpha}) = 1-\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$

وهذا يعني أن اللامتناهي في الصغر $\alpha-\beta$ ذو مرتبة أعلى من مرتبة α ، وبطريقة مماثلة نثبت أن اللامتناهي في الصغر $\alpha-\beta$ ذو مرتبة أعلى من مرتبة β .

كفاية الشرط : لنفرض أنّ $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = 0$ ، عند ئذ يكون $\lim (1-\frac{\beta}{\alpha}) = 0$

وبالتالي يكون $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ وهذا يعني أن $\alpha \backsim \beta$.

مبرهنة (٢) : إذا كانت لدينا اللامتناهيات في الصغر α و β و α' و β' بحيث أن $\alpha \backsim \alpha'$ و $\beta \backsim \beta'$ فإنّ $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$.

(يفترض ، طبعاً ، أن نهاية واحدة على الأقل من بين هاتين النهايتين موجودة)

الاثبات : نلاحظ أن : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta}$ ، ومنه :

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\beta} =$$

$$= 1 \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot 1 = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$$

مثال (٦) : بما أنه ، عندما $x \to 0$ يكون $\sin 2x \backsim 2x$ و $\sqrt{1+x+x^2}-1 \backsim \frac{x+x^2}{2}$ فإنّ :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{4}=\frac{1}{4}$$

مثال (٧) : بما أنه ، عندما $x\longrightarrow 0$ ، يكون $tg\,x \backsim x$ و $a^x-1\backsim x.\ln a$ فإنّ : $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{tg\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{x.\ln a}{x}=\ln a$.

مثال (٨) : بما أنه ، عندما $x\longrightarrow 0$ ، يكون $1-\cos x\backsim\frac{x^2}{2}$ و $\sin x\backsim x$ فإنّ : $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{tg\,x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos x}{\sin x(1-\cos x)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3.\cos x}{x.\frac{x^2}{2}}=2$$

[نلاحظ أننا في المبرهنة (٢) عوّضنا كلاًّ من البسط والمقام بمايكافئه . أما إذا عوضنا $tg\,x$ بـ x وعوضنا $\sin x$ بـ x ، لأنّ $tg\,x\backsim x$ و $\sin x\backsim x$ ، فإن المقام في المثال (٨) يصبح صفراً ، وبالتالي يصبح الكسر من الشكل $\frac{x^3}{0}$ الذى ليس له معنى] .

والجدير بالذكر أنه عندما نقارن اللامتناهيات في الصغر فاننا ، عادة ، نأخذ واحداً منها بمثابة اللامتناهي في الصغر الأساسي . ليكن α لامتناهياً في الصغر أساسياً . عندئذ تعتبر اللامتناهيات في الصغر من الشكل $C.\alpha^K$ (حيث C ثابت و $K>0$) لامتناهيات في الصغر بسيطة . وسوف نقارن اللامتناهيات في الصغر ليس مع اللا متناهي في الصغر الأساسي α بل مع اللامتناهيات في الصغر البسيطة من الشكل $C.\alpha^K$. ولذلك ، من أجل كل لامتناه في

الصغر β ، سوف نختار العددين C و K بحيث يكون
$\beta \backsim C \cdot \alpha^K$.

تعريف: يسمى اللا متناهي في الصغر البسيط $C\alpha^K$ المكافىء للامتناهي في الصغر معطى β بالجزء الرئيسي لـ β ، ويمكننا حينئذ أن نكتب $\beta \backsim C\alpha^K$.

فمثلاً ، إذا أخذنا x لامتناهيا في الصغر أساسياً فإن الجزء الرئيسي للامتناهي في الصغر $(1+x)^{\mu} - 1$ يكون μx [لأن: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu x} = 1$]، ولهذا نكتب $(1+x)^{\mu}-1 \backsim \mu x$.

وكذلك: $\sin x \backsim x$ و $1-\cos x \backsim \frac{1}{2}x^2$ و $tg x \backsim x$.

هذا وإن الطريقة العملية لايجاد الجزء الرئيسي هي كما يلي :

ليكن α لامتناهياً في الصغر أساسياً . ولنبحث عن الجزء الرئيسي للامتناهي في الصغر β . من أجل هذا نعيّن أولاً (اذا كان ممكناً) مرتبة β بالنسبة لـ α ، أيّ نعيّن $K > 0$ بحيث يكون $\lim \frac{\beta}{\alpha^K} = C \neq 0$. وبالتالي فان $C \cdot \alpha^K$ يكون الجزء الرئيسي لـ β وذلك لأن $\lim \frac{\beta}{C \cdot \alpha^K} = 1$.

مثال (٩) : أوجد الجزء الرئيسي من الشكل Cx^K للامتناهي في الصغر $\beta = (1+x^2)^3 - 1$.

الحل : لما كان $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^3-1}{x^2} = 3$ فإن المقدار $3x^2$ يكون الجزء الرئيسي لـ β وهو المطلوب .

لاحظنا أن $(1+x)^{\mu}-1 \backsim \mu x$ ومنه ، كحالة خاصة، عندما $n \in N^{*}$ ، يمكننا أن نكتب $\sqrt[n]{1+x}-1 \backsim \frac{1}{n}x$. وتستخدم هذه الصيغة من أجل الحساب التقريبي للجذور . . . .

مثال (١٠) : أوجد قيمة تقريبية للجذر $\sqrt[3]{1051}$.

الحل : نلاحظ أن : $\sqrt[3]{1051}=\sqrt[3]{1000 \cdot 1,051}=10\sqrt[3]{1,051}=10\sqrt[3]{1+0,051}$

كما ونلاحظ أن : $\sqrt[3]{1+0,051}-1 \backsim \frac{1}{3} \cdot 0,051$ ،

ومنه : $\sqrt[3]{1,051} \backsim 1+\frac{1}{3} \cdot 0,051 = 1,017$ ،

وبالتالي: $\sqrt[3]{1051}=10\sqrt[3]{1,051} \backsim 10,17$ وهو المطلوب .

نلاحظ أن الصيغة $\ln(1+x) \backsim x$ [عندما تكون قيم x صغيرة] تفيدنا من أجل الحساب التقريبي للوغارتم .

تعاريف : لنفرض أن α و β لامتناهيان في الكبر عندما تسعى x الى نهايته معينة . نقول إن اللامتناهي في الكبر α ذو مرتبة أعلى من مرتبة اللامتناهي في الكبر β إذا كان $\lim \frac{\alpha}{\beta}=\infty$.

ونقول عن α إنه لامتناه في الكبر ذو مرتبة أدنى من مرتبة اللامتناهي في الكبر β اذا كان $\lim \frac{\alpha}{\beta}=0$. اذا كان $\lim \frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$ ، حيث $A \in R$ ، فإننا نقول عن اللامتناهيين في الكبر α و β إنهما من مرتبة واحدة (أيّ لهما نفس المرتبة) . وكحالة خاصة ، اذا كان $A=1$ فإنّ اللامتناهيين

في الكبر α و β يكونان متكافئين أى $\beta \backsim \alpha$. اذا كـــان

$$\lim \frac{\alpha}{\beta^{K}} = A \neq 0$$ فان اللامتناهي في الكبر α

يكون من المرتبة K بالنسبة للامتناهي في الكبر β .

وتجدر الإشارة إلى أنه من أجل اللامتناهيات في الكبر يمكننا كتابة مبرهنة مماثلة للمبرهنة (٢) المتعلقة باللامتناهيات في الصغـــــر.

مثال (١١) : عندما $x \longrightarrow \infty$ يكون اللامتناهي في الكبر $f(x) = x^2+5x+4$ ذا مرتبة أدنى من مرتبة اللامتناهي في الكبر $\varphi(x) = x^3-2$ ، وذلك لأنّ :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+4}{x^3-2} = 0$$

مثال (١٢) : عندما $x \to \infty$ يكون للامتناهيين في الكبر $2x^2+3$ و $(x-1)^2$ نفس المرتبة ، وذلك لأنّ ; $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{(x-1)^2} = 2 \neq 0$.

مثال (١٣) : عندما $x \to \infty$ يكون اللامتناهيان في الكبر $\sqrt{x+a}$ و $\sqrt{x}$ متكافئين ، وذلك لأنّ ; $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+a}{x}} = 1$.

مثال (١٤) : عيّن مرتبة اللامتناهي في الكبر x^4+5x-1 بالنسبـــة للامتناهي في الكبر $3x^2+2$ عندمـــا $x \to \infty$.

الحل : بملاحظة أن $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+5x-1}{(3x^2+2)^2} = \frac{1}{9}$$
يمكننا أن نقول إن المرتبة المطلوبة هي $K = 2$.

..../....

تمارين

١) لتكن لدينا اللامتناهيات في الصغر γ, β, α • برهن على صحة الاقتضاء التالي : $\alpha \sim \beta$ و $\beta \sim \gamma \Longrightarrow \alpha \sim \gamma$ •

٢) بيّن أن كلاً من حجم كرة ومساحتها يكون لامتناهياً في الصغر عندما يسعى نصف قطر هذه الكرة الى الصغر ، ثم عيّن مرتبة كل من هذين اللامتناهيين في الصغر بالنسبة للامتناهي في الصغر r ، حيث r هو نصف قطر الكرة •

الجواب : مرتبة الحجم هي 3 ومرتبة المساحة هي 2 •

٣) قارن كلاً من اللامتناهيات في الصغر الآتية مع اللامتناهي في الصغر $\varphi(x) = x$:

أ) $f(x) = 5x$ ب) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$

حـ) $f(x) = 1 - \cos 2x$ د) $f(x) = x + \sin x$ •

هـ) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ و) $f(x) = tg\, x - \sin x$

٤) عيّن ، عندما $x \to 2$ ، مرتبة كل من اللامتناهيات في الصغر الآتية بالنسبة للامتناهي في الصغر $\varphi(x) = x - 2$:

أ) $f(x) = x^3 - 8$ الجواب : لهما نفس المرتبة

ب) $f(x) = tg(x-2)$ الجواب : متكافئتان

حـ) $f(x) = \sqrt{x-2}$ الجواب : $K = \frac{1}{2}$

د) $f(x) = \sqrt[5]{x-1} - 1$ الجواب : لهما نفس المرتبة

١٥) عندما $x \to +\infty$ قارن اللامتناهيات في الصغر وفقاً لما يلي :

أ) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ و

$\varphi(x) = x^3 + 8x^2 - 3x + 2$

ب) $f(x) = x^3 + 2x - 1$ و $\varphi(x) = (x-1)^3$

ج) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 3}$ و $\varphi(x) = 2x + 5$

د) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ و $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$

هـ) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ و $\varphi(x) = \sqrt{x}$

١٦) عين ، عندما $x \to 1$ ، مرتبة كل من اللامتناهيات في الكبر الآتيـة بالنسبة للامتناهي في الكبر $\varphi(x) = \dfrac{1}{x-1}$:

أ) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ الجواب : لهما نفس المرتبة

ب) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$ الجواب : $K = \dfrac{1}{3}$

ج) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ الجواب : $K = \dfrac{1}{2}$

١٧) أوجد النهايات الآتية باستبدال اللامتناهيات في الصغر الموجودة في البســـط والمقام بما يكافئهــــا :

أ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ الجواب : $\dfrac{m}{n}$

ب) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x^2}{5x^2 + 4x^3}$ الجواب : $\dfrac{1}{5}$

ء) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt[n]{1+tg x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x \cdot \sin x}$ الجواب : $\dfrac{1}{4n}$

٨) أوجد الجزء الرئيسي (من الشكل $C x^{k}$) لكل من اللامتناهيات في الصغر الآتية عندما $x \to 0$:

أ) $2x - 3x^2 + x^3$ الجواب : $2x$

ب) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ الجواب : x

٩) أوجد الجزء الرئيسي [من الشكل $C(x-1)^{k}$] لكل من اللامتناهيات في الصغر الآتية عندما $x \to 1$:

أ) $x^3 - 3x + 2$ الجواب : $3(x-1)^2$

ب) $\ln x$ الجواب : $x-1$

حـ) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ الجواب: $\dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{2}}$

١٠) أوجد قيمة تقريبية لكل من $\sqrt[3]{1018}$ و $\ln 1{,}03$.

١١) لنعتبر أن x هو لامتناه في الصغر أساسي • والمطلوب :

أ — برهن أن الدالة $y = 1 - \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x$ هي لامتناه في الصغر عندما $x \to 0$ ثم عين مرتبة هذا اللامتناهي في الصغر وجزأه الرئيسي •

ب) عين مرتبة اللامتناهي في الصغر الآتي واحسب جزأه الرئيسي :

$y = \sqrt{1+x} - 1$ •

حـ — عين مرتبة اللامتناهي في الصغر الآتي واحسب جزأه الرئيسي :

$$y = (1 - \cos x)\, arctg\, x$$

د — عين مرتبة اللامتناهي في الصفر الآتي واحسب جزأه الرئيسي :

$$y = \sin x - tg\, x$$

هـ — برهن أن x و $\ln(1+x)$ هما لامتناهيان في الصفر متكافئـــــان .

الأجوبة : آ — المرتبة هي 4 والجزء الرئيسي هو $\frac{1}{8} x^4$.

ب — المرتبة هي 1 والجزء الرئيسي هو $\frac{1}{2} x$.

حـ — المرتبة هي 3 والجزء الرئيسي هو $\frac{1}{2} x^3$

د — المرتبة هي 3 والجزء الرئيسي هو $-\frac{1}{2} x^3$

١٢) أوجد النهاية الآتية وذلك باستبدال اللامتناهيات في الصغـــر بما يكافئهـــا :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$$

(الجواب : $-2\sqrt{3}$)

١٣) أوجد المرتبة والجزء الرئيسي للامتناهي في الصغر $(x \to 1)$ $y = arc\cos(1-x)$

عندما $x \to 0$.

الجواب : المرتبة هي $\frac{1}{2}$ والجزء الرئيسي هو $\sqrt{2x}$

[ارشـــــاد : احســـب النســـبة $\frac{2x}{y^2}$]

٤ — ١١ — استمرار وانقطاع دالة : لنفرض أننا أعطينا ، على فترة معينة ، دالة $f(x)$ ، ولتكن x_0 نقطة من هذه الفتـــرة .

تعريف : إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ فإننا نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة في النقطة x_0 .

ينتج من هذا التعريف أن الدالة المستمرة في نقطة يجب أن تكون معرفة فيها ، أي يوجد العدد $f(x_0)$. وكذلك يمكننا أن نكتب المساواة ، المذكورة في تعريف استمرار الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 ، بالصورة التالية :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)$. ومنه، إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة وطلب إلينا حساب نهايتها عندما $x \to x_0$ ؛ فإنه يكفي أن نستبدل في عبارة هذه الدالة كل x بـ x_0 ثم حساب القيمة $f(x_0)$ فنحصل على قيمة النهاية المطلوبة .

تعريف (١) : نقول عن الدالة $f(x)$ إنها مستمرة في النقطة x_0 إذا تحقق مايلي : من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من قيم x متقاربة من x_0 تكون المتتالية $\{f(x_n)\}$ متقاربة من $f(x_0)$. [عندما تسعى x الى x_0 يمكن لـ x أن تأخذ ، كحالة خاصة ، القيمة x_0] .

تعريف (٢) : نقول عن الدالة $f(x)$ إنها مستمرة في النقطة x_0 إذا تحقق مايلي :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ فإنه يوجد $\delta \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكون :

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ملاحظة : إن التعريفين (١) و (٢) الســـابقين متكافئان .

لنفرض أن x_0 نقطة من X التي هي منطقة تعريف الدالة $f(x)$.

[إذا كانت النقطة x_0 منعزلة في X فإن الدالة $f(x)$ تكون مستمرة في هذه النقطة x_0] . بالحقيقة ، $\forall \varepsilon \ni \mathbb{R}^{(+)}$ يمكن ايجاد $\delta \ni \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث تكون النقطة الوحيدة x من X التـــي تحقق المتباينة $|x - x_0| < \delta$ هي النقطة $x = x_0$. ومنه يكــون : $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ وبهذا يتم اثبات النص الذي كتبناه

لنفرض أن المتغير x ، أثناء تغيراته ، تغيّر من القيمة x_0 الى القيمة x_1 . عند ئذ يرمز لحاصل الطرح $x_1 - x_0$ بالرمز Δx ويدعى بتغير x [وقد يسمى أحياناً بتزايد x] .

ومنه $x_1 = x_0 + \Delta x$: وبالمقابل تتغير الدالة $y = f(x)$ من القيمة $f(x_0)$ الى القيمة $f(x_0 + \Delta x)$. عند ئذ يرمز لحاصل الطرح $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ بالرمــز Δy ويدعى بتغير الدالة (في النقطة x_0) الموافق ـــ للتغيـــر Δx .

مثال : لنأخذ الدالة $f(x) = x^2 + 2x - 3$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

ثم لنأخذ النقطة x_0 والنقطة $x = x_0 + \Delta x$ (بأن نعطي

x_0 تغيراً قدره Δx ، عندئذ نجد :

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \left[(x_0+\Delta x)^2 + 2(x_0+\Delta x) - 3\right] +$$

$$-(x_0^2 + 2x_0 - 3) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x_0 +$$

$$+2(\Delta x) - 3 - x_0^2 - 2x_0 + 3 =$$

$$= 2x_0(\Delta x) + 2(\Delta x) + (\Delta x)^2 =$$

$$= 2(x_0+1)\Delta x + \Delta x^2$$

من هذا المثال نجد أن Δy يرتبط بـ Δx و بـ x_0 .

تعريف (٣) : نقول عن الدالة $y = f(x)$ إنها مستمرة في النقطة x_0 اذا تحقق مايلي :

$$\Delta x \longrightarrow 0 \implies \Delta y \longrightarrow 0$$

بالحقيقة ، إن الشرط ($\Delta y \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$) يعني أن $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ ، وهذه الصيغة الأخيرة تكافئ الصيغة $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ التي تعني أن $f(x)$ مستمرة في x_0 .

تعريف : نقول عن الدالة $f(x)$ إنها مستمرة من اليمين في النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ ، ونقول عن $f(x)$ إنها مستمرة من اليسار في x_0 إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

نجد بسهولة أنه يمكننا أن نقول مايلي :

إذا كانت الدالة مستمرة في نقطة داخلية فإنها تكون مستمرة في هذه النقطة من اليمين ومن اليسار ، وبالعكس ، إذا كانت الدالة مستمرة في نقطة معينة من اليمين ومن اليسار فإنها تكون مستمرة في هذه النقطة ، إلّا أنه قد تكون الدالة مستمرة من جهة واحدة فقط ، خذ مثلاً الدالة $f(x) = [x]$ التي تكون مستمرة من اليمين فقط في كل نقطة $x = \xi$ ، حيث $\xi \in \mathbb{Z}$.

تعريف : نقول عن الدالة $f(x)$ إنها مستمرة على فترة معينة إذا كانت مستمرة في كل نقطة من هذه الفترة . [إذا كان أحد طرفي هذه الفترة ينتمي إلى هذه الفترة فإن الاستمرار في هذا الطرف هو استمرار من طرف واحد فقط] .

تعريف : نقول عن النقطة x_0 ، التي تنتمي إلى منطقة تعريف الدالة $f(x)$ ، إنها نقطة انقطاع لهذه الدالة إذا كانت هذه الدالة $f(x)$ غير مستمرة في هذه النقطة x_0 . وهذا يعني أنه : إما لا توجد نهاية محدودة للدالة $f(x)$ في النقطة x_0 ، أو توجد نهاية محدودة للدالة $f(x)$ في النقطة x_0 ولكن هذه النهاية لا تساوي $f(x_0)$.

ملاحظة : في تعريفنا السابق لنقطة الانقطاع نجد أنه يجب أن تكون الدالة معرفة في نقطة الانقطاع . ولكن غالباً ما تضاف (إلى نقاط —

الانقطاع هذه) نقاط انقطاع لا تنتمي الى منطقة تعريف الدالة $f(x)$ [أيْ لا تكون الدالة معرفة في نقطة الانقطاع من هذا النمط] . فإذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على المجموعة : $]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$ فإنه لا يمكننا القول بأن الدالة $f(x)$ مستمرة في x_0 لأنَّ هذه الدالة غير معرفة في النقطة x_0 . كما أنه لا يمكننا القول أن x_0 هي نقطة انقطاع لـ $f(x)$ (بحسب التعريف المذكور قبل هذه الملاحظة) لأنَّ الدالة غير معرفة في x_0 . ومع ذلك فإنه إذا كانت لا توجد لـ $f(x)$ نهاية محدودة في النقطة x_0 فإن هذه النقطة x_0 تعتبر نقطة انقطاع للدالة $f(x)$. فمثلاً ، يقال عن النقطة $x=0$ إنها نقطة انقطاع للدالة $y=\frac{1}{x}$ (لاحظ هنا أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$) .

أما اذا كانت توجد لـ $f(x)$ نهاية محدودة في النقطة x_0 فإنه يقال عن الدالة $f(x)$ إنه يمكن تمديد تعريفها الى النقطة x_0 بحيث تصبح مستمرة في x_0 إلاّ أنه لا يمكن القيام بهذا التمديد عندما لا توجد لـ $f(x)$ نهاية محدودة عندما $x \to x_0$.

ولذلك سوف نسمي أيضاً كل نقطة x_0 لا تنتمي الى منطقة تعريف الدالة $f(x)$ بحيث يتقاطع جوارها مع منطقة تعريف $f(x)$ بمجموعة غير خالية ، نقطة انقطاع لهذه الدالة .

اذا كانت x_0 نقطة انقطاع للدالة $f(x)$ فإننا نقول إن — هذه الدالة $f(x)$ منقطعة في هذه النقطة x_0 .

لنتأمل الأنماط الممكنة لنقاط انقطاع الدالـــة :

١ — تعريف : نقول عن النقطة x_0 إنها نقطة انقطاع قابل للإزالـــة للدالة $y = f(x)$ إذا كانت توجد نهاية محدودة للدالـــة $f(x)$ في النقطة x_0 إلّا أن الدالة $f(x)$ إما غيـــر معرفة في x_0 أو معرفة فيها ولكن قيمتها $f(x_0)$ لا تســـاوي $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

مثال : إن النقطة $x = 0$ هي نقطة انقطاع قابل للازالة للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0 \text{ عندما}) \\ 2 & (x = 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

وذلك لأنّ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ بينما $f(0) = 2$.

مثال آخر : إن الدالة $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ غير معرفة فـــي النقطة 0 التي تكون نقطة انقطاع قابل للازالة لها .

ملاحظة : إذا كان للدالة $f(x)$ انقطاع قابل للازالة فـــي النقطة x_0 فإنه يمكننا إزالة هذا الانقطاع بأن نضع $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. ففي المثالين السابقين يكفي أن نضع : $f(0) = 1$ لكي نحصل على الصيغة $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

التي تسمح لنا القول بأن كلاً من الدالتين السابقتين $f(x)$ تكون مستمرة في النقطة $x = 0$ (حينئذ) .

٢ — تعريف : نقول عن النقطة x_0 إنها نقطة انقطاع من النوع الاول للدالة $f(x)$ إذا كانت توجد للدالة $f(x)$ نهايتان من طرف واحد محدودتان وغير متساويتين، أي :

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$$

مثال : لنأخذ الدالة :

$$\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} 1 & (x > 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x = 0 \text{ عندما}) \\ -1 & (x < 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

فنجد أن النقطة $x = 0$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول لهذه الدالة ، وذلك بملاحظة أن $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{Sgn} x = 1$ و $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$

مثال آخر : إن النقطة $x = 0$ هي انقطاع من النوع الأول للدالة

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$$

للأسباب التالية :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من الصفر ، حيث $x_n > 0$ من أجل كل n من N^* ، عندئذ يكون المتغير $\frac{1}{x_n}$ لا متناهياً في الكبر موجباً (عندما $n \to \infty$) ، ومنه فالمتتالية $\{1 + 2^{1/x_n}\}$ تكون متباعدة الى اللانهاية ، وبالتالي فالمتتالية $\left\{\frac{1}{1 + 2^{1/x_n}}\right\}$ تتقارب من الصفر ، وبالتالي $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 0$ ، وأيضاً ، إذا فرضنا

أن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من الصفر ، حيث $x_n < 0$ [illegible] من أجل كل n من N^*) ، فإن المتغير $\frac{1}{x_n}$ يكون لامتناهياً في الكبر سالباً (عندما $n \to \infty$) ، وبالتالي فإن المتغير $2^{\frac{1}{x_n}}$ يكون لامتناهياً في الصغر (عندما $n \to \infty$) ، وبالتالي يكون $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 1$.

[illegible] ـ تعريف : نقول عن النقطة x_0 إنها نقطة [illegible] من النوع الثاني للدالة $f(x)$ إذا حقق مايلـــي :

إما أن لاتوجد لـ $f(x)$ في النقطة x_0 واحدة على الأقل مـــن النهايتين من طرف واحد ، أو أن تكون واحدة على الأقل من هاتيـــن النهايتين من طرف واحد غير محدودة .

مثال : إن [illegible] المثال (٤) المذكور في الفقرة ٤ ـ ٧ يبيّن أنــه لاتوجد للدالة [illegible] $f(x)$ نهاية من اليمين فـي النقطة [illegible]

[illegible] الدالة [illegible] نهاية من اليسار في النقطة $x = 0$.

[illegible]

مثال آخر : إن النقطة [illegible] n [illegible]

نقطة انقطاع من النوع الثاني للدالة [illegible] .

نقول عن الدالة $f(x)$ إنها منقطعة من اليمين في النقطة x_0 إذا لم تكن مستمرة من اليمين في x_0 . ونقول عن $f(x)$ إنها منقطعة من اليسار في x_0 إذا لم تكن مستمرة من اليسار في x_0 .

نقول عن الدالة $f(x)$ إنها مستمرة قطعياً على الفترة $[a,b]$ إذا كانت هذه الدالة مستمرة في جميع النقاط الداخلية في الفترة $]a,b[$ ماعدا ، ربما ، عدداً محدوداً من هذه النقاط ، والتي تكون عبارة عن نقاط انقطاع من النوع الأول ، واذا كانت ، بالاضافة الى ذلك ، توجد نهايتان محدودتان من طرف واحد في النقطتين a و b .

ونقول عن الدالة $f(x)$ إنها مستمرة قطعياً على الفترة $]a,b[$ (أو الفترة $]-\infty, +\infty[$) إذا كانت مستمرة قطعياً على أية فترة $[\alpha,\beta]$ محتواة في $]a,b[$ (أو $]-\infty,+\infty[$) .

مثال : إن الدالة $f(x) = E(x)$ مستمرة قطعياً على أية فترة مغلقة ، وعلى الفترة $]-\infty, +\infty[$.

مبرهنة (١) : إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ ، المعطاتان على فترة معينة ، مستمرتين في نقطة x_0 من هذه الفترة ، فإنّ الدوال الآتية تكون مستمرة في النقطة x_0 :

$$f(x) \mp g(x) \quad و \quad f(x) \cdot g(x) , \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

[حيث $g(x) \neq 0$ في الدالة الأخيرة] .

تنتج هذه المبرهنة مباشرة من المبرهنة المتعلقة بالنهايات . فمثلاً ، تكون الدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$ مستمرة في النقطة x_0 لأن $= \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ $= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

لنستعرض بتفصيل الدوال المطردة : لنفرض أننا أعطينا على فترة معينة X دالة غير متناقصة أو غير متزايدة $f(x)$. لما كانت توجد ، لكل دالة مطردة ، نهايتان محدودتان من طرف واحد في كل نقطة من منطقة تعريفها ، فإنه لا يمكن أن توجد إلاّ نقاط انقطاع من النوع الأوّل لهذه الدالـــــة .

مبرهنة (٢) : تكون الدالة المطردة $y = f(x)$ ، المعطاة علــى فترة X ، مستمرة على هذه الفترة ، إذا كانت مجموعة جميع قيمها Y تؤلف فترة على محور العينات .

الاثبـــات : لتكن $f(x)$ دالة غير متناقصة وتحقق شروط النص . ولنفرض جدلاً أنه توجد نقطة x_0 من X ، غير متطابقة مع الطرف الأيمن للفترة X ، بحيث تكون الدالة $f(x)$ منقطعة من اليمين فيها . عند ئذ يكون $f(x_0) \underset{\neq}{\leq} f(x_0+0)$.

وبما أن $f(x)$ مطردة فإننا نستنتج $f(x) \leq f(x_0)$ عندما $x < x_0$ و $f(x) \geq f(x_0+0)$ عندما $x > x_0$.

ومنه ينتج أنه لاتوجد قيم ل $f(x)$ بين العددين $f(x_0)$ و $f(x_0+\sigma)$ ، وبالتالي فإن مجموعة القيم Y للدالة $f(x)$ لايمكن أن تؤلف فترة مما يناقض شروط النص .

وبطريقة مماثلة نثبت على صحة النص عندما تكون الدالة غير متزايدة. وبهذا يتم اثبات المطلوب .

تمارين

تمرين (١) : أثبت ، باستخدام تعريف الدالة المستمرة ، أن الحدودية $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ مستمرة على الفترة $]-\infty, +\infty[$.

تمرين (٢) : أثبت ، باستخدام تعريف استمرار الدالة بلغة $\delta - \varepsilon$ ، أن الدالة $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$ مستمرة في النقطة $x = 1$ ،

ثم بيّن حدود تغيرات x لكي تتحقق المتباينة $|f(x) - f(1)| < \frac{1}{2}$

ثم بيّن أن النقطة $x = \frac{1}{2}$ هي نقطة انقطاع من النوع الثاني . [الجواب للطلب الثاني : $\frac{15}{16} < x < \frac{17}{16}$] .

تمرين (٣) : أثبت أن الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x = 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

تكون منقطعة في النقطة $x=0$.

تمرين (٤) : أثبت أن الدالة الثابتة $f(x) = C$ تكون مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين (٥) : أثبت أن الدالة $f(x) = x$ تكون مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين (٦) : أثبت أن الدالة $f(x) = cx^n$ ، حيث $n \in \mathbb{N}$ ، هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين (٧) : أثبت أن الدالة $f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ تكون مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين (٨) : أثبت أن الدالة $f(x) = \dfrac{a_0 x^n + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$ تكون مستمرة على $\mathbb{R}$ باستثناء جذور المقام (المخرج) .

تمرين (٩) : أثبت أن كلاً من الدالتين $\sin x$ و $\cos x$ تكون مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين (١٠) : أثبت أن كلاً من الدالتين $tg\,x$ ، $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ تكون مستمرة على $\mathbb{R}$ باستثناء النقط $x = (2K+1)\dfrac{\pi}{2}$ ، حيث $K = 0, \mp 1, \ldots$.

تمرين (١١) : أثبت أن كلاً من الدالتين $\cot g\, x$ و $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ تكون مستمرة على $\mathbb{R}$ باستثناء النقط $x = K\pi$ ، حيث : $K = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$.

تمرين (١٢) : أثبت أن الدالة $f(x) = |x|$ تكون مستمرة على $\mathbb{R}$

تمرين (١٣) : أثبت أن الدالة $f(x) = x^2 + 2\sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين (١٤) : أثبت أن الدالة $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6}$

مستمرة على المجموعة $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ ، وبيّن أن النقطتين $x = 2$ و $x = 3$ هما نقطتا انقطاع من النوع الثاني .

تمرين (١٥) : أثبت أن الدالة $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ مستمرة

على $\mathbb{R}$ باستثناء النقط $x = (4K+1)\dfrac{\pi}{2}$ حيث

$K = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots\ldots$.

تمرين (١٦) : لنعتبر الدالة ، المعطاة بالصيغة التاليـــــة :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 2 \text{ عندما}) \\ x+1 & (x \geq 2 \text{ عندما}) \end{cases}$$

أثبت أن هذه الدالة مستمرة على المجموعة $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ وبين أنهـــا

مستمرة من اليمين في النقطة $x = 2$ ، ولكنها متقطعة من اليسار

في النقطة $x = 2$ ، وبين أن النقطة $x = 2$ هي نقطة انقطاع

من النـــوع الأول .

تمرين (١٧) : لنأخذ الدالـــــة :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & (x < 0 \text{ عندما}) \\ 2x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ عندما}) \\ \operatorname{tg} x & (x > \frac{\pi}{2} \text{ عندما}) \end{cases}$$

والمطلوب : أ) أثبت أن الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$ باستثنـــاء

النقط $\frac{\pi}{2}(2K+1) = x$ ($K = 1, 2, 3, \ldots$)

٢) أثبت أن النقط $x = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ هي نقطة انقطاع من النوع الثاني للدالة $f(x)$.

٣) أثبت أن الدالة $f(x)$ مستمرة في النقطة $x = 0$.

٤) أثبت أن الدالة $f(x)$ مستمرة من اليسار في النقطة $x = \frac{\pi}{2}$ إلا أن هذه النقطة $x = \frac{\pi}{2}$ هي نقطة انقطاع من النوع الثاني لها .

تمرين (١٨) : أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ مستمرة على المجموعة $R \setminus \{2\}$ وبيّن أن النقطة $x = 2$ هي نقطة انقطاع من النوع الثاني لهذه الدالـــــة .

تمرين (١٩) : لتكن لدينا الدالـــــة :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (-2 \le x < 0 \text{ عندما}) \\ 4 & (x = 0 \text{ عندما}) \\ \frac{1}{x} & (0 < x \le 2 \text{ عندما}) \end{cases}$$

أثبت أن هذه الدالة تكون مستمرة على المجموعة $[-2, 2] \setminus \{0\}$ وبيّن أن النقطة $x = 0$ هي نقطة انقطاع من النوع الثانـــي لهـــذه الدالـــــة .

تمرين (٢٠) : هل يمكن ازالة الانقطاع للدوال التاليـــة :

أ) $f(x)=\frac{1}{x-a}$ في النقطة $x=a$ ، الجواب : كلا

ب) $g(x)=\begin{cases} 1-x^2 & (x\le 2 \text{ عندما}) \\ x-3 & (x>2 \text{ عندما}) \end{cases}$ في النقطة $x=2$.

الجواب: كلا .

حـ) $\varphi(x)=\begin{cases} x^2 & (x\ne 1 \text{ عندما}) \\ 2 & (x=1 \text{ عندما}) \end{cases}$ في النقطة $x=1$.

الجواب: نعم .

تمرين (٢١) : مدّد تعريف الدالة $f(x)=\frac{tg\,x}{x}$ الى النقطة $x=0$ بحيث تصبح مستمرة في هذه النقطة .

[ارشاد : ضع $f(0)=1$] .

تمرين (٢٢) : ماذا يجب أن تكون القيمة $f(0)$ لكي تكون الدالة

$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{2x} & (x\ne 0 \text{ عندما}) \\ 2 & (x=0 \text{ عندما}) \end{cases}$ مستمرة في النقطة $x=0$

الجواب : $f(0)=\frac{1}{2}$.

تمرين (٢٣) : أثبت أن دالة ديريكليه

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 & (x\in \mathbb{Q} \text{ عندما}) \\ 0 & (x\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ عندما}) \end{cases}$$

المعرفة على $\mathbb{R}$ تكون منقطعة في كل نقطة x من $\mathbb{R}$.

تمرين (٢٤) : لنضع :

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\in \mathbb{Q} \text{ عندما}) \\ 0 & (x\notin \mathbb{Q} \text{ عندما}) \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad .$$

أثبت أن الدالة f تكون مستمرة في النقطة $x = 0$ وتكون منقطعة في جميع النقاط الأخرى ، والانقطاع يكون من النوع الثاني .

تمرين (٢٥) : لنضع :

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-3 < x < -2 \text{ عندما}) \\ -x-2 & (-2 \le x < 0 \text{ عندما}) \\ x+2 & (0 \le x < 1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

. أثبت أن الدالة f تكون منقطعة في النقطة $x=0$ ومستمرة في جميع النقاط الأخرى من الفترة $]-3 , 1[$.

تمرين (٢٦) : لنضع :

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x\neq 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x=0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

. أثبت أن هذه الدالة f تكون منقطعة في النقطة $x = 0$ ، والانقطاع يكون من النوع الثاني ، وبرهن أن هذه الدالة f تكون مستمرة في كل نقطة $x \neq 0$.

تمرين (٢٧) : لنضع :

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x=0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

. بيّن فيما اذا

كانت هذه الدالة مستمرة في النقطة $x = 0$ أم لا .

٤ ـ ١٢ ـ استمرار الدالة المركبة : إن المبرهنة التالية تبين الشروط التي تجعل الدالة المركبة مستمرة :

مبرهنة : لنفرض أننا أعطينا على فترة X الدالة $z = \varphi(x)$ ، التي جميع قيمها تنتمي الى فترة Z . ولنفرض أننا أعطينا على الفترة Z الدالة $y = f(z)$. ولنفرض أن الدالة $\varphi(x)$ مستمرة في النقطة x_0 ، وأن الدالة $f(z)$ مستمرة في النقطة $z_0 = \varphi(x_0)$. عند ئذ تكون الدالة المركبة $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ مستمرة في النقطة x_0 .

الاثبات : لنأخذ متتالية اختيارية x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ، ... من عناصر X ، متقاربة من النقطة x_0 ، ولنضع $z_n = \varphi(x_n)$. عند ئذ ، باعتبار أن الدالة $z = \varphi(x)$ مستمرة في النقطة x_0 ، نجد : $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0) = z_0$

وهذا يعني أن المتتالية z_1 ، z_2 ، ... ، z_n ، ... من عناصر Z ، تتقارب من النقطة z_0 . ومنه ، باعتبار أن الدالة $f(z)$ مستمرة في النقطة z_0 ، نجد : $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

ومنه : $F(x_0) = f[\varphi(x_0)] = \lim\limits_{n\to\infty} f[\varphi(x_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)$.

وبهذا يمكننا أن نقول بأن الدالة $F(x)$ مستمرة في النقطة $x = x_0$ وهو المطلوب .

تمارين

تمرين (١) : أثبت أن الدالة $y = \sin x^2$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

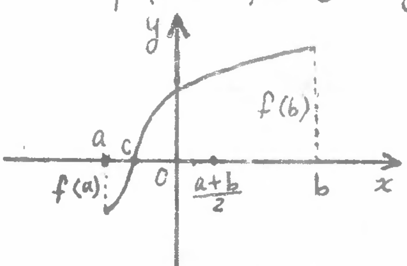
تمرين (٢) : أثبت أن الدالة $y = \cos^3(x^2 + 5x + 8)$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين (٣) : أثبت أن الدالة $y = \dfrac{1}{\sin x}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ باستثناء النقط $x = K\pi$ ، حيث $K = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$.

تمرين (٤) : أثبت أن الدالة $y = tg^2 \dfrac{1}{x-1}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ باستثناء النقط $x = 1$ و $x = 1 + \dfrac{2}{(2K+1)\pi}$ حيث $K = 0, \mp 1, \ldots$.

٤ ـ ١٣ ـ خواص الدوال المستمرة :

مبرهنة (١) : لنفرض أن الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ ، وأنها مستمرة على هذه الفترة ، وأن لقيمتيها في طرفي هذه الفترة اشارتين مختلفتين . عندئذ يوجد عنصر واحد على الاقل مثل $c \in]a,b[$ بحيث يكون $f(c) = 0$.



شكل (٨)

الاثبات : لنفرض من أجل التحديد ، أن $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ [انظر الشكل (٨)] .

ولنقسم الفترة $[a,b]$ الى

قسمين متساويين ، وذلك بواسطة النقطة $\frac{a+b}{2}$ • فإذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ فإن النقطة $\frac{a+b}{2}$ تكون هي النقطة c التي نبحث عنها • أما اذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$ فإن لقيمتي الدالة $f(x)$ في طرفي إحدى الفترتين $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ و $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ إشارتين مختلفتين • لنرمز لإحدى هاتين الفترتين ، التي تحقق ماقلناه بالرمز $[a_1, b_1]$ • عندئذ نجد ، بسهولة ، أن $f(a_1)<0$ و $f(b_1)>0$ (لأنه إذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ فإنّ لقيمتي الدالة $f(x)$ في طرفي الفترة $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ اشارتين مختلفتين • وفي هذه الحالة يكون $a_1=a$ و $b_1=\frac{a+b}{2}$ و $f(a_1)<0$ و $f(b_1)>0$ • وبصورة مماثلة يمكننا أن نناقش عندما $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$) • وبذلك نحصل على الفترة $[a_1, b_1]$ التي في طرفيها تكون لقيمتي الدالة $f(x)$ اشارتان مختلفتان • ثم لنقسم هذه الفترة الى قسمين متساويين بالنقطة $\frac{a_1+b_1}{2}$.

فاذا كان $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$ فإن النقطة $\frac{a_1+b_1}{2}$ تكون هي النقطة التي نبحث عنها • لنفرض $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$ فعندئذ نرمز لإحدى الفترتين $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ و $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ ، التي تكون لقيمتي الدالة $f(x)$ في طرفيها اشارتان مختلفتان ، بالرمز $[a_2, b_2]$ • وعندها يكون $f(a_2)<0$ و $f(b_2)>0$ •

ثم لنقسم الفترة $[a_2, b_2]$ الى قسميـــــن متســـاويين ،
ولنكرر المناقشة نفسها ..... وهكـــــــذا .

هذا ومن الممكن أن تكون نقطة التقسيم ، في احدى المراحل ، هي النقطة
c التي نبحث عنها . كما ومن الممكن أن يكون $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \neq 0$
من أجل جميع قيم n من $\mathcal{N}^*$ ؛ وبالتالي نحصل على المتتالية مـــن
الفترات المتداخلـــــــة :

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots \quad (1)$$

حيث $f(b_n) > 0$ و $f(a_n) < 0$ من أجل جميـــع
قيم n من $\mathcal{N}^*$ ؛ و $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

ومنه ، بحسب مبرهنة الفترات المتداخلة ، توجد نقطة وحيدة c تنتمي
الى جميع فترات المتتالية (١) بحيث يكون $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = c =$
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n =$. ولكن الدالة $f(x)$ مستمرة في النقطة c .
(باعتبار أن $c \in [a, b]$) .

ومنـــــه :
$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \leq 0$$
$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) \geq 0$$

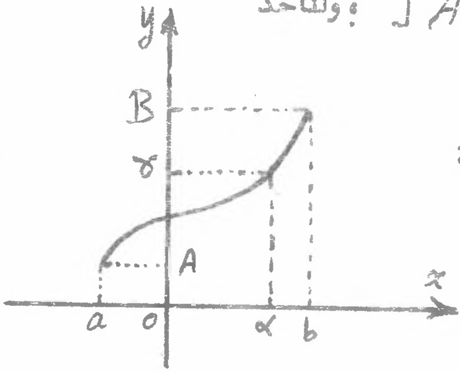
اذن $f(c) = 0$ ، وبذلك يتم اثبات المطلوب .

مبرهنة (٢) : لنفرض أنه قد عرفت على الفترة $[a, b]$ دالة مستمـــــرة
$f(x)$ ، بحيث يكون $f(a) = A \neq B = f(b)$.

نص
نقط

عندئذ، أياً كان γ عدداً اختيارياً واقعاً بين العددين A و B فإنه يوجد $\alpha \in]a,b[$ بحيث يكون $\gamma = f(\alpha)$.

الاثبات : لنفرض ، من أجل التحديد ، أن $A<B$ [انظر الشكل (٩)] • وليكن $\gamma \in]A,B[$ ، ولنأخذ الدالة المساعدة $\varphi(x) = f(x)-\gamma$ فنجد أن هذه الدالة مستمرة على $[a,b]$ ((باعتبار أنها تساوي حاصل طـــــرح الدالتين المستمرتين :



شكل (٩)

$f(x)$ و $\psi(x)=\gamma$)) • وبالاضافة الى ذلك نجد أن :

$$\varphi(a) = f(a)-\gamma = A-\gamma<0$$

$$\varphi(b) = f(b)-\gamma = B-\gamma>0$$

ومنه ، بحسب المبرهنة (١) السابقة ، توجد $\alpha \in]a,b[$ بحيث يكون $\varphi(\alpha)=0$ وبالتالي يكون $f(\alpha)-\gamma=0$

وبالتالي يكون $f(\alpha)=\gamma$ وبهذا يتم اثبات المطلـــوب •

نتيجة (١) : إذا كانت الدالة $f(x)$ ، المعطاة على فترة X ، مستمرة على هذه الفترة ، فإن مجموعة قيمها Y تؤلف فترة معينة •

الاثبات : لنضع : $M = \sup\{f(x) : x \in X\}$

$m = \inf\{f(x) : x \in X\}$

وذلك في $\bar{\mathbb{R}}$ [أيّ أنه قد يكون $M = +\infty$ أو $m = -\infty$] .

عندئذ لا توجد نقط في Y بحيث تقع تحت m أو فوق M . كما ويكون : $Y \supseteq]m, M[$ للأسباب التالية :

ليكن $y_0 \in]m, M[$ ، ولنأخذ قيمتين y_1 و y_2 للدالة $f(x)$ بحيث يكون : $m < y_1 < y_0 < y_2 < M$.

ولنفرض أن $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. ثم لنستخدم المبرهنة (٢) من أجل الدالة $f(x)$ على الفترة التي طرفاها x_1 و x_2 فنجد أن y_0 هي إحدى قيم الدالة $f(x)$.

ومنه $y_0 \in Y$.

اذن $]m, M[\subseteq Y$. فإذا كان $m, M \in Y$ فإننا نستنتج أن $[m, M] = Y$. واذا كان $m, M \notin Y$ فإننا نستنتج أن $]m, M[= Y$. واذا كان $m \in Y$ و $M \notin Y$ فإننا نستنتج أن $[m, M[= Y$. واذا كان $m \notin Y$ و $M \in Y$.

فاننا نستنتج أن $]m, M] = Y$. إذن Y تؤلف فترة معينة وهو المطلوب .

نتيجة (٢) : لتكن $y = f(x)$ دالة مطردة ، معطاة على

فترة X . ولنفرض أن Y هي مجموعة قيم هذه الدالـة $f(x)$. عندئذ : (($f(x)$ مستمرة على X $\Longleftrightarrow$ Y تؤلف فترة معينـة)) .

الاثبات : تنتج صحة هذه النتيجة من المبرهنة (٢) في ٤ ـ ١١ ومن النتيجة (١) السـابقة .

تلعب النصوص السابقة دوراً هاماً في التحليل الرياضي . كما وإننا نجد لها تطبيقات عملية مفيدة كما يتضح من الأمثلة التاليـة :

مثال (١) : أثبت أنه يوجد للمعادلة $x^5-8x+4=0$ جذر واقع على الفتـرة $[-2,2]$.

الحل : لنستخدم المبرهنة (١) آخذين بعين الاعتبار أن الدالـة $f(x)=x^5-8x+4$ مستمرة على الفترة $[-2,2]$ وأن :

$$f(-2) = -32+16+4 = -12<0$$

$$f(2) = 32-16+4 = 20>0$$

فيمكننا أن نقول بأنه يوجد $c \in]-2,2[$ بحيث يكون $f(c)=0$.

اذن فللمعادلة المفروضة جذر واحد على الأقل واقع علـى الفترة $[-2,2]$.

مثال (٢) : أثبت أنه يوجد ، لأية حدودية ذات درجة فردية وذات معاملات حقيقية ، جذر حقيقي واحد على الأقـل .

الاثبات : لنأخذ الحدودية ، المحققة لشروط النص ،

$$f(x)=a_1 x^{2K+1}+a_2 x^{2K}+\cdots+a_{2K+1} x + a_{2K+2}$$

إن إشارة $f(x)$ من أجل قيم كبيرة بقدر كاف لـ x حيث $x>0$ ، هي إشارة a_1 نفسها ، وإن اشارة $f(x)$ من أجل قيم كبيرة بالقيمة المطلقة لـ x ، حيث $x<0$ ، هي عكس اشارة a_1 ، ومنه يمكننا أن نقول بأن الدالة $f(x)$ مستمرة ولها قيمتان مختلفتا الاشارة ، وعند ها يوجد عدد واحد على الاقل مثل c بحيث يكون $f(c)=0$

مثال (٣) : أثبت أن للدالة $f(x)=\frac{x^3}{5}-\frac{x^2}{3}+3$ قيمة قدرها $2\frac{1}{3}$ من أجل نقطة داخلية في الفترة $[-2,2]$.

الحل : إن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[-2,2]$. كما وإن :

$$\left[f(2)=\frac{8}{5}-\frac{4}{3}+3=3\frac{4}{15}\right] \text{ و } \left[f(-2)=-\frac{8}{5}-\frac{4}{3}+3=\frac{1}{15}\right].$$

ومنه ، بحسب المبرهنة (٢) ، يوجد $x_0 \in]-2,2[$ بحيث يكون

$$f(x_0)=2\frac{1}{3}.$$

بلا برهان

مبرهنة (٣) : إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإنها تكون محدودة عليها (أي : يوجد عددان m و M بحيث يكون $m\le f(x)\le M$ من أجل كل من x $[a,b]$) .

لنفرض جدلاً أن f غير محدودة من الأعلى أي $\forall M : \exists x \in [a,b] : f(x) > M$

الاثبات : لنبرهن أن الدالة $f(x)$ محدودة من الأعلى (أما البرهان على أنها محدودة من الأدنى فيتم بطريقة مماثلة) . لنفرض جدلاً أن الدالة المستمرة $f(x)$ غير محدودة من الأعلى على الفترة $[a,b]$. عندئذ لا يوجد عدد M بحيث يكون $f(x) \leqslant M$ من أجل جميع قيم x من $[a,b]$ ، وهذا يعني أنه أياً كان العدد الحقيقي M يوجد $x \in [a,b]$ بحيث يكون $f(x) > M$.

وبإعطاء M القيم المتوالية 1 و 2 و 3 و ... نجد مايلي :

توجد، من أجل $M = 1$ ، نقطة x_1 من $[a,b]$ بحيث يكون $f(x_1) > 1$.

توجد، من أجل $M = 2$ ، نقطة x_2 من $[a,b]$ بحيث يكون $f(x_2) > 2$.

توجد، من أجل $M = 3$ ، نقطة x_3 من $[a,b]$ بحيث يكون $f(x_3) > 3$.

. . . .

توجد، من أجل $M = n$ ، نقطة x_n من $[a,b]$ بحيث يكون $f(x_n) > n$.

. . . .

وبذلك نحصل على المتتالية المحدودة $\{x_n\}$ من عناصر $[a,b]$. ومنه ، بحسب المبرهنة (٢) في ٢ — ١٠ ١٢٢ ، توجد في هذه المتتالية متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ متقاربة ، سنرمز لنهايتها بـ α فيكون $\alpha \in [a,b]$ ، (لأنه لو كان $\alpha \notin [a,b]$ لحصلنا على تناقض مع كون $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$) . وبما أن $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$

، فإنه يمكننا أن نقول بأن $f(x)$ مستمرة في α . ومنه $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha)$. وبما أننا اخترنا النقاط x_n بحيث يكون $f(x_{n_k}) > n_k$ فإنه يمكننا أن نكتب $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$ مما يناقض ما وصلنا اليه قبل قليل . وبذلك يتم اثبات المطلوب.

ملاحظة : إن المبرهنة السابقة تصبح غير صحيحة اذا استبدلنا الفترة المغلقة $[a,b]$ بالفترة المفتوحة $]a,b[$. فمثلاً ، الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ مستمرة على الفترة المفتوحة $]0,1[$ ولكنها غير محدودة عليها بملاحظة أن $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \infty$.

لنفرض أن $f(x)$ دالة معرفة على فترة معينة X ، ولتكن $X \ni x_0$. نقول إن القيمة $f(x_0)$ للدالة $f(x)$ هي القيمة الأعظمية (العظمى) لها على X اذا كان $f(x) \leq f(x_0)$ من أجل جميع قيم x من X . ونقول إن القيمة $f(x_0)$ للدالة $f(x)$ هي القيمة الأصغرية (الصغرى) لها على X اذا كان $f(x) \geq f(x_0)$ من أجل جميع قيم x من X . ونقول إن لهذه الدالة $f(x)$ قيمة أعظمية في النقطة x_0 على X اذا كانت $f(x_0)$ هي القيمة الأعظمية لها على X . ونقول إن لهذه الدالة $f(x)$ قيمة أصغرية في النقطة x_0 على X اذا كانت $f(x_0)$ هي القيمة الأصغرية لها على X .

لنفرض أن Y هي مجموعة قيم الدالة $f(x)$. إن القيمة الأعظمية (في حالة وجودها) لهذه الدالة على X هي $\sup Y$ ، وذلك بشرط أن يكون $\sup Y \in Y$. كما وإن القيمة الأصغرية (في حالة وجودها) لهذه الدالة على X هي $\inf Y$ ، وذلك بشرط أن يكون $\inf Y \in Y$. أما إذا كان $\sup Y \notin Y$ و $\inf Y \notin Y$ فإنه لا توجد قيمة أعظمية ولا توجد قيمة أصغرية لهذه الدالة على X .

مثال : لنأخذ الدالة $f(x) = x - E(x)$ المعطاة على الفترة $[0,1]$ ، فنجد أنها محدودة على هذه الفترة ، إذ أن مجموعة قيمها هي الفترة $[0,1[$. وبملاحظة أن $\sup[0,1[= 1$ و $\inf[0,1[= 0$ يمكننا أن نقول بأن لهذه الدالة قيمة أصغرية على الفترة $[0,1]$ قدرها الصفر ، ولكن ليس لها قيمة أعظمية على هذه الفترة .

مبرهنة (٤) : إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $I = [a,b]$ ، فإنه توجد ، بين جميع قيمها على هذه الفترة I ، قيمتان إحداهما الأعظمية لها والأخرى الأصغرية لها على I .

مصادرات

الاثبات : لنفرض أن $f(x)$ مستمرة على $I = [a,b]$. عندئذ تكون $f(x)$ محدودة على هذه الفترة [بحسب المبرهنة (٣)] . ومنه يوجد $M = \sup Y$ و $m = \inf Y$ ، حيث Y هي مجموعة قيم هذه الدالة $f(x)$.

هذا وسنبيّن أنه يوجد $x_1 \in [a,b]$ بحيث يكون $f(x_1) = M$. من أجل ذلك، نفرض جدلاً عدم وجود مثل هذه النقطة x_1 ، التي تحقق الشرط $f(x_1) = M$. عندئذ يكون $f(x) < M$ من أجل جميع قيم x من $[a,b]$.

ثم لنأخذ الدالة المساعدة $0 < \varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$

موجبة على [illegible]

فنجد أنها مستمرة على $[a,b]$ ، لأنها تساوي خارج قسمة دالتين مستمرتين على $[a,b]$ ، ولأن المقام مغاير للصفر .

ومنه ، بحسب المبرهنة (٣) ، تكون الدالة $\varphi(x)$ محدودة على تلك الفترة .

ومنه ، بفرض μ حداً أعلى لـ $\varphi(x)$ ، حيث $\mu > 0$ ، يمكننا أن نكتب :

$\forall x \in [a,b]$ فإنّ $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} < \mu$.

ومنه $f(x) < M - \dfrac{1}{\mu}$ من أجل كل x من $[a,b]$. وهذا يعني أن العدد $M - \dfrac{1}{\mu}$ يكون حداً أعلى لـ Y مما يناقض كون $M = \sup Y$. إذن .

توجد $x_1 \in [a,b]$ بحيث يكون : $f(x_1) = M$.

وبطريقة مشـــــابهة نبرهن على وجود $x_2 \in [a, b]$
بحيث يكون : $f(x_2) = m$ ، وبهذا يتم اثبـــــات
المطلـــــوب ·

نتيجـــــة :

إذا كانت الدالة $f(x)$ مســـتمرة على الفترة $[a, b]$
فإن مجموعة قيمهـــا Y تكون مســـاوية للفترة $[m, M]$ ، حيث
$M = \sup Y$ و $m = \inf Y$ ·

الاثبـــــات :

لنفرض أن شـــروط النص محققة · عند ئذ يكون $m \leq f(x) \leq M$
من أجل كل x من $[a, b]$ · ومنه $Y \subseteq [m, M]$ · وبالعكـــس ،
ليكن $\delta \in [m, M]$ · عند ئذ نميز بين ثلاثة احتمالات :

١) $\delta = M$: ضمن هذا الشـــرط يوجد ، بحســـب المبرهنة
(٤) عنصر $\alpha \in [a, b]$ بحيث يكون $f(\alpha) = M = \delta$ ·
ومنـــــه $\delta \in Y$ ·

٢) $\delta = m$: ضمن هذا الشرط يوجد ، بحسب المبرهنة (٤) ،
عنصر $\beta \in [a, b]$ بحيث يكون $f(\beta) = m = \delta$ ومنه $\delta \in Y$ ·

٣) $m < \delta < M$: ضمن هذا الشرط يوجد، بحسب المبرهنة (٢) ،
عنصـــر $\gamma \in [a, b]$ بحيـــث

يكون $f(\gamma) = \delta$. ومنه $Y \ni \delta$.

إذن $Y \supseteq [m, M]$.

وبذلك نكون قد برهنا أن $Y = [m, M]$ وهو المطلوب .

٤ ـ ١٤ ـ وجود واستمرار الدالة المعاكسة :

مبرهنة : لنفرض أننا عرفنا على فترة معينة X دالة $y = f(x)$ مستمرة ومتزايدة ، سنرمز لمجموعة قيمها بالرمز Y . عند ئذ توجد دالة $x = \varphi(y)$ معاكسة للدالة $y = f(x)$ ومعرفة على Y ومستمرة ومتزايدة . وبصورة مماثلة ، توجد ، لكل دالة مستمرة ومتناقصة $y = f(x)$ معطاة على فترة X وذات مجموعة قيم Y ، دالة $x = \varphi(y)$ معاكسة لها ومعرفة على Y ومستمرة ومتناقصة .

الاثبات : بحسب النتيجة (١) في ٤ ـ ١٣ نستنتج أن Y هي عبارة عن فترة معينة . وبحسب تعريف Y يمكننا أن نقول بأنه توجد، من أجل كل y_0 من Y ، نقطة x_0 من X بحيث يكون $f(x_0) = y_0$. كما وان هذه النقطة تكون وحيدة بسبب كون الدالة $f(x)$ متزايدة، إذ أن $f(x_1) \neq f(x_2)$ عندما $x_1 \neq x_2$. وبالتالي توجد ، من أجل كل قيمة y_0 من Y ، قيمة وحيدة x_0 من X . وبالتالي نحصل على الدالة المعاكسة $x = \varphi(y)$ وحيدة القيمة (التعيين) ، المعرفة على Y ، والتي مجموعة قيمها X . وسنبين

أن هذه الدالة متزايدة :

ليكن $y_1<y_2$. ولنضع $\varphi(y_1)=x_1$ و $\varphi(y_2)=x_2$ ،
عندئذ يكون $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$. فلو فرضنا
جدلاً أن $x_1\geq x_2$ لحصلنا على المتباينة $f(x_1)\geq f(x_2)$
[لأن الدالة $f(x)$ متزايدة] ، وبالتالي لحصلنا على
المتباينة $y_1\geq y_2$ مما يناقض كون $y_1<y_2$. إذن $x_1<x_2$ ،
أي : $\varphi(y_1)<\varphi(y_2)$. وبذلك بقي إثبات أن الدالة
$\varphi(y)$ مستمرة على Y وهذا ينتج مباشرة من النتيجة (٢)
في ٤ ــ ١٢ . وكذلك يبرهن على صحة القسم الثاني من النص بصورة
مشابهة ، وبذلك يتم اثبات المطلوب .

ملاحظة : إذا كانت الدالة غير مطردة فإنه يجب أن نجزئ X إلى
فترات بحيث تكون هذه الدالة مطردة على كل منها ، ثم نقوم ببناء
الدالة المعاكسة على كل منها .

تمرين مشهور : لنأخذ الدالة $y=x^n$ ، حيث $n\in N^*$ ، فنجد
أنها مستمرة ومتزايدة على الفترة $X=[0, +\infty[$. ومنه
فمجموعة قيمها تؤلف فترة سنرمز لها بالرمز Y . وبما أن القيمة
الأصغرية للدالة x^n على X تساوي الصفر (حيث نحصل عليها
عندما $x=0$) ، فإن الصفر يكون الطرف الأيسر للفترة Y .

ولما كان $x^n \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ فإنه يمكننا أن نكتب :

$Y = [0, +\infty[$ ومنه، بحسب المبرهنة السابقة، توجد على الفترة $[0, +\infty[$ الدالة المعاكسة $x = \sqrt[n]{y}$ • وبتغيير مواقع الرموز يمكن كتابة هذه الدالة بالشكل $y = \sqrt[n]{x}$ • إن هذه الدالة الأخيرة مستمرة ومتزايدة على الفترة $[0, +\infty[$ • وبذلك نكون قد برهنا على صحة النص التالي :

من أجل كل عدد حقيقي غير سالب α وكل عدد طبيعي مغاير للصفر n يوجد عدد حقيقي غير سالب $\beta = \sqrt[n]{\alpha}$ بحيث يكون $\beta^n = \alpha$ •

٤ ــ ١٥ ــ استخدام استمرار الدوال في حساب النهايات : إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في النقطة $x = \alpha$ فإن: $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$ • ولذلك فإننا نجد على سبيل المثال أنه عندما $x \to \alpha$ يكون :

$$\sin x \longrightarrow \sin \alpha, \quad e^x \longrightarrow e^\alpha, \quad x^n \longrightarrow \alpha^n,$$

$$\sqrt[p]{x} \longrightarrow \sqrt[p]{\alpha}, \quad a^x \longrightarrow a^\alpha,$$

$$\ln x \to \ln \alpha, \quad x^\mu = (a^{\log_a x})^\mu = a^{\mu \cdot \log_a x} \longrightarrow a^{\mu \log_a \alpha} = \alpha^\mu$$

$$x^\mu = (e^{\ln x})^\mu = e^{\mu \cdot \ln x} \longrightarrow e^{\mu \ln \alpha} = \alpha^\mu$$

[لاحظ أننا استخدمنا كون الدالة $\ln x$ مستمرة عندما $x > 0$ وكون الدالة a^x مستمرة على R (برهن كل ذلك).كما واننا نختار

[القيمة α بشكل مناسب بحيث يكون استخدامنا لها منطقياً وقانونياً]

مثال (١) : أثبت أنه $\forall x \in R$ فإنّ $\lim\limits_{n \to \infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x$.

الحل : لنعتبر $x \neq 0$ فنجد :

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{x}{n})^{n/x}\right]^x =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^{n/x}\right]^x = e^x$$

وإذا اعتبرنا $x = 0$ فإننا نحصل على النهاية بسهولة ويتم المطلوب .

مثال (٢) : أثبت أن : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

الحل : نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}$$

ولما كانت الدالة اللوغارتمية مستمرة فإنه يتم المطلوب .

حالة خاصة : عندما $a = e$ نجد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

[وبالتالي $\ln(1+x) \sim x$] .

مثال (٣) : أثبت أن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

الحل : لنضع $a^x - 1 = \beta$. عندئذ $a^x = 1+\beta$ و

$x = \log_a(1+\beta)$. ولكن ، عندما $x \to 0$ وبسبب كون الدالة

الأسية مستمرة ، نجد $a^x \to 1$ ، وبالتالي $\beta \to 0$. ومنه ،

بحسب المثال (٢) ، نجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

مثال (٤) : أثبت أن : $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu$.

الحل : لنضع $(1+x)^{\mu} - 1 = \beta$ ، عندئذ $[(1+x)^{\mu} = 1+\beta]$ و $[\mu \ln(1+x) = \ln(1+\beta)]$.

ولكن ، عندما $x \to 0$ وبسبب كون الدالة الأسية مستمرة ، نجد $\beta \to 0$.

ومنه : $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} =$

$$\lim_{\beta\to 0} \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \cdot \mu \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\cdot\mu\cdot 1 = \mu$$

[استعملنا ، هنا ، المثال (٢) مرتين] .

مثال (٥) : أوجد قيمة النهاية : $\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$.

الحل : $\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x-e} =$

$$\frac{1}{e} \lim_{x\to e} \frac{\ln\frac{x}{e}}{\frac{x}{e}-1} = \frac{1}{e} \lim_{z\to 0} \frac{\ln(z+1)}{z} = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}$$

حيث $z = \frac{x}{e} - 1$.

مثال (٦) : إنّ : $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\sin x} - 1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \frac{(1+\sin x)^{1/n} - 1}{\sin x} =$

$$= 1\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

مثال (٧) : إنّ : $\lim_{x\to a} \frac{e^{x} - e^{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^{a}(e^{x-a}-1)}{x-a} =$

$$= e^{a}\cdot \ln e = e^{a}$$

مثال (٨) : إنّ : $\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/3} - 1}{x} =$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/3}-1}{2x} = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

مثال (٩) : إنّ : $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}-1}{2x} = -\frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}-1}{-3x} =$

$$= -\frac{3}{2}\ln e = -\frac{3}{2}$$

مثال (١٠) : لنفرض أن $u \to u_0 > 0$ و $v \to v_0$ عندما $x \to \alpha$.

عند ئذ [بالاستفادة من الاستمرار] :

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} u^v = \lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} e^{\ln u^v} = \lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} e^{v \ln u} = e^{v_0 \ln u_0} = u_0^{v_0}$$

مثال (١١) : ليكن $a_n > 0$ و $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ حيث : $0 < a < +\infty$.

لما كان $\lim_{n \to \infty} \ln a_n = \ln a$ (بسبب استمرار الدالة — اللوغاريتمية) فإنّ :

$$\lim_{n \to \infty} \ln \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \ln a_n = \ln a$$

[وذلك استناداً إلى مبرهنة شتولتس ونتائجها] . وبسبب استمرار الدالة الأسية ،

نجد :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{\ln a} = a$$

لنفرض الآن أنّ $a = 0$ أو $a = +\infty$ فنجد أن

النتيجة تبقى صحيحة وذلك بالاستفادة من النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty] \quad \text{و}$$

و $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ (عندما $a > 1$)] و [$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$] و

و $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ (عندما $0 < a < 1$)] و [$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$]

و $\lim_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty$ (عندما $a > 1$)] .

وبذلك يمكننا أن نكتب النص التالي :

إذا كان للمتغير الموجب a_n نهاية (محدودة أو غير محدودة) فإن للمتغير $b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ النهاية نفسها .

وكتطبيق على هذا ، نأخذ المتتالية :

$$a_1 , \frac{a_2}{a_1} , \frac{a_3}{a_2} , \ldots\ldots\ldots , \frac{a_n}{a_{n-1}} , \frac{a_{n+1}}{a_n} , \ldots\ldots$$

فنجد أن : $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

وذلك بفرض أن النهاية في الطرف الأيمن موجودة (محدودة أو غير محدودة) وبهذا نكون قد برهنا على صحة النص المذكور في ٢ ـ ٢٥ .

تمارين

١ـ أوجد النهاية في كل مما يلي :

أ) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2+x-3}{3x^2+2x-5}$ الجواب : $\frac{3}{5}$

.../...

٢) $\lim_{x\to 0} \frac{-2x^2-x+3}{+3x^2+2x-5}$ الجواب: $-\frac{3}{5}$

٣) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2+x-3}{-3x^2+2x+5}$ الجواب: $-\frac{2}{3}$

٤) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2+x-3}{3x^2+2x-5}$ الجواب: $\frac{2}{3}$

٥) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{3x^2+2x-5}$ الجواب: $\frac{5}{8}$ [ارشاد: ضع $x=1+y$ ثم اجعل $y\to 0$]

٦) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$ الجواب: e^2

٧) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^{1/3}}{1-x^{1/5}}$ الجواب: $\frac{5}{3}$ [ارشاد: ضع $t=x^{1/15}$ ثم اختصر مايلزم]

٨) $\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}+\frac{\sin x}{x}\right]$ الجواب: 1

٩) $\lim_{\varphi\to \frac{\pi}{2}} (\sin\varphi-1)\,tg^2\varphi$ الجواب: $-\frac{1}{2}$

١٠) $\lim_{\psi\to \gamma} \frac{\cos\psi-\cos\gamma}{\sin\psi-\sin\gamma}$ الجواب: $-tg\gamma$

١١) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ الجواب: 1

٢- ادرس نهاية الدالة الآتية عندما يسعى المتغير x نحو الصفر :

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

الجواب : $f(0+0)=2\sqrt{2}$ و $f(0-0)=-2\sqrt{2}$

٣- أوجد نهاية الكسر التالي وذلك عندما تسعى x نحو العدد 3 :

$$\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$$

الجواب : $+\infty$ عندما $x\to 3+0$ وليس لهذا الكسر نهاية من اليسار .

٤- ماهي نهاية الدالة $y=\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$ وذلك عندما تنتهي x الى a .

الجواب : $\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$.

٥– ادرس نهاية الدالة الآتية وذلك عندما يسعى x الى الصفر :

$$f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

الجواب : $f(0+0) = 1$ و $f(0-0) = -1$

٦ – عين نهاية الدالة الآتية ، وذلك عندما ينتهي المتغير x الى 2 :

$$y = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$$ ، الجواب : $\frac{9}{8}$.

٧– عيّن نهاية الدالة الآتية وذلك عندما يسعى t نحو c :

$$y = \frac{\sqrt[3]{c^2 - ct} + \sqrt{c^2 - t^2}}{\sqrt[3]{c^2 - t^2} + \sqrt{c^3 - c^2 t}}$$ ، الجواب : $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

٨–عين نهاية كل من الدوال الآتية وذلك عندما ينتهي t ، مقدراً بالراديان ، الى الصفر : $\frac{\sin 3t}{5t}$ و $\frac{\sin 3t}{\sin 5t}$ و $\frac{\sin 2t}{tg\, 3t}$

الجواب : $\frac{3}{5}$ ، $\frac{3}{5}$ ، $\frac{2}{3}$

٩ – عين نهاية الدالة الآتية ، وذلك عندما يسعى المتغير t الى الصفر :

$$y = \frac{\sin 2t}{\sqrt{1 - \cos t}}$$ ، الجواب : $2\sqrt{2}$ من اليمين ، $-2\sqrt{2}$ من اليسار

١٠ – احسب

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$$

الجواب : $A = -6$.

١١ – ادرس نهاية التركيب التالي وذلك عندما تسعى x الى اللانهاية :

$$y = \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} .$$

الجواب : $\lim_{x \to -\infty} y = \frac{1}{2}$ ، $\lim_{x \to +\infty} y = 2$.

١٢ـ ماهي القيمة التي يسعى إليها التركيب : $y = \frac{1}{x(x-1)} \cdot a^{\frac{x}{x-1}}$

وذلك عندما يسعى x الى الصفر وعندما يسعى الى اواحد •

الجواب : $\lim\limits_{x \to 0-0} y = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0+0} y = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1-0} y = 0$ و $\lim\limits_{x \to 1+0} y = +\infty$

١٣ـ أثبت أن $1 = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (tgx)^{tg2x}$

٤ ـ ١٦ ـ الدوال القطعية وخواصهـــــا :

(الجيب القطعي) $sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(جيب التمام القطعي) $ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(الظل القطعي) $th\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(ظل التمام القطعي) $coth\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

ينتج من تعريف الدوال القطعية أن جميعها دوال ابتدائيـــــــة •

وكذلك ، بفرض $X = ch\,x$ و $Y = sh\,x$ نجد أنهما يحققـــان

معادلة القطع الزائد : $X^2 - Y^2 = 1$

لأنّ : $X^2 - Y^2 = ch^2x - sh^2x = \left[\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\right] = 1$

، ومن هنا جاءت تسمية هذه الدوال

بدوال قطعية ، إذْ أننا نعلم أن تسمية الدوال المثلثية بالدوال ـ

الدائرية جاءت من ملاحظة أن $X = \cos x$ و $Y = \sin x$ يحققان

معادلة الدائرة $X^2 + Y^2 = 1$ • ونلاحظ أيضاً أنّ :

$th\,x=\frac{sh\,x}{ch\,x}$, $coth\,x=\frac{ch\,x}{sh\,x}$ و $th\,x\cdot coth\,x=1$ و

$ch^2x-sh^2x=1$, $sh\,2x=2\,sh\,x\,ch\,x$,

$sh(x+y)=sh\,x\,ch\,y+ch\,x\,sh\,y$ و ....

إن الدوال $th\,x$ و $ch\,x$ و $sh\,x$ معرفة ومستمرة على R • أما الدالة $coth\,x$ فتكون معرفة ومستمرة على R^* • كما وإن الدوال $sh\,x$ و $th\,x$ و $coth\,x$ هي دوال فردية ، وإن الدالة $ch\,x$ هي دالة زوجية.كما وإن الدالة الوحيدة المحدودة هي $th\,x$ لأن $|th\,x|<1$ • هذا وإن الدالة $y=Arg\,sh\,x$ تعبّر عن الدالة المعاكسة للدالة $x=sh\,y$ • ويمكننا أن نستنتج أن : $Arg\,sh\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ وذلك بناء على مايلي :

لدينا : $x=sh\,y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}$

ومنه : $(e^y)^2-2x(e^y)-1=0$

وبالتالي : $e^y=\frac{2x+\sqrt{4x^2+4}}{2}=x+\sqrt{x^2+1}$

[لقد رفضنا الحل $e^y=\frac{2x-\sqrt{4x^2+4}}{2}$ لأن e^y موجب دوماً بينما الكسر $\frac{2x-\sqrt{4x^2+4}}{2}$ سالب دوماً]

إذن : $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

أيْ أن : $Arg\,sh\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ •

كما وإن الدالة $y=Arg\,ch\,x$ تعبّر عن الدالة المعاكسة للدالة

$x = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y}+1}{2e^{y}}$ التي تكتب بالشكل $x = ch\, y$

وبالتالي : $(e^{y})^{2} - 2x(e^{y})+1 = 0$ ومنـــه :

$$e^{y} = \frac{2x \mp \sqrt{4x^{2}-4}}{2} = x \mp \sqrt{x^{2}-1}$$

وبالتالي : $Arg\,ch\,x = y = \ln(x \mp \sqrt{x^{2}-1})$ حيث $x \geq 1$.

وبملاحظة أن : $(x+\sqrt{x^{2}-1})(x-\sqrt{x^{2}-1}) = 1$ نجد :

ومنـــه : $\ln(x+\sqrt{x^{2}-1}) + \ln(x-\sqrt{x^{2}-1}) = \ln 1 = 0$

$$\ln(x-\sqrt{x^{2}-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$$

وإذن فالدالة المعاكسة $Arg\,ch\,x$ تتألف من فرعين أحدهما يوافـــق تغيرات y من الصفر حتى $+\infty$ والآخر يوافق تغيرات y من $-\infty$ حتى الصفر. وبطريقة مماثلة ، نجد : $Arg\,th\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

و $Arg\,coth\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ ، حيث الدالة $y = Arg\,th\,x$ هي الدالة المعاكسة للدالة $x = th\,y$ ، والدالة $y = Arg\,coth\,x$ هي الدالة المعاكسة للدالة $x = coth\,y$.

تمارين

١ ـ أثبت صحة مايلي :

$$ch(x+y) = ch\,x\,ch\,y + sh\,x\,sh\,y$$

$$sh(x+y) = sh\,x\,ch\,y + ch\,x\,sh\,y$$

و $th(x \pm y) = \frac{th\,x \pm th\,y}{1 \pm th\,x \cdot th\,y}$:

$$\coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth x \coth y}{\coth x \pm \coth y}$$

$$sh2x = 2\, shx\, chx \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} thx = \lim_{x \to +\infty} \coth x = 1$$

$$sh^2 x = \frac{ch2x - 1}{2} \quad \text{و} \quad ch^2 x = \frac{ch2x + 1}{2}$$

$$ch2x = ch^2 x + sh^2 x \quad \text{و} \quad 1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$1 - \coth^2 x = -\frac{1}{sh^2 x}$$

٢ً ــ أثبت أن $Arg\, thx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

٣ً ــ أثبت أن $Arg \coth x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$.

٤ ــ ١٧ ــ الاستمرار المنتظم (الشامل) : نقول عن الدالة $f(x)$ ، المعطاة على فترة معينة I ، إنها مستمرة بانتظام (بشمول) على هذه الفترة إذا كان يوجد ، من أجل كل عدد حقيقي موجب ε ، عدد حقيقي موجب δ بحيث يكـــــــون :

$$\forall x', x'' \in I : |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

هذا وتجدر الاشارة إلى أن δ لا يتعلق إلا بـ ε . كما ونجد أن كل دالة مستمرة بانتظام على فترة معينة تكون مستمرة عليهـــــا ، إلاّ أن العكس غير صحيح في الحالة العامة ، ويدل على ذلك المثال ـــ التالـــــــــي :

مثال : لنأخذ الدالة $y = f(x) = \frac{1}{x}$ على الفتـرة $]0, 1[$ فنجد أنها مستمرة على هذه الفترة حســـب المبرهنة (١) في ٤ ــ ١١ ، ولكن هذه الدالة غير محدودة

على هذه الفترة • وسنبرهن أن استمرار هذه الدالة ليس بانتظام على الفترة $]0,1[$ • من أجل ذلك نفرض أن $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ وأن $\delta \in \mathbb{R}^{(+)}$ • ثم لنأخذ $\delta_1 \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكون :

$\delta_1 < \min(\delta, \frac{1}{2\varepsilon}, \frac{1}{2})$ • وبعد ذلك نأخذ $x' = \delta_1$ و $x'' = 2\delta_1$ ؛

فنجد أن : $|x' - x''| = \delta_1 < \delta$ و

$|f(x') - f(x'')| = \frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{2\delta_1} = \frac{1}{2\delta_1} > \varepsilon$ ؛ وبما أن هذا الكلام صحيح من أجل أيّ عدد $\delta > 0$ فإن استمرار الدالة $f(x)$ على الفترة $]0,1[$ غير منتظم •

مبرهنة : إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة (المغلقة) $[a,b]$ ؛ فإنها تكون مستمرة بانتظام على هذه الفترة •

الاثبات : لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ • ولنفرض جدلاً أن استمرارها غير منتظم على $[a,b]$ • عندئذ يوجد $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث أنه $\forall \delta \in \mathbb{R}^{(+)}$ توجد نقطتان x' و x'' بحيث يكون :

$|x' - x''| < \delta$ و $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$ •

لنأخذ المتتالية 1 و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و ... و $\frac{1}{n}$ و ... من قيم δ ، المتقاربة من الصفر ، فنجد مايلي :

توجد ، من أجل $\delta = 1$ ، نقطتان x_1'' و x_1' بحيث يكون :

$|x_1' - x_1''| < 1$ و $|f(x_1') - f(x_1'')| \geq \varepsilon_0$.

وتوجد ، من أجل $\delta = \frac{1}{2}$ ، نقطتان x_2' و x_2'' بحيث يكون :

— $|x_2' - x_2''| < \frac{1}{2}$ و $|f(x_2') - f(x_2'')| \geq \varepsilon_0$.

وتوجد ، من أجل $\delta = \frac{1}{3}$ ، نقطتان x_3' و x_3'' بحيث يكون :

— $|x_3' - x_3''| < \frac{1}{3}$ و $|f(x_3') - f(x_3'')| \geq \varepsilon_0$.

. . . .

وتوجد ، من أجل $\delta = \frac{1}{n}$ ، نقطتان x_n' و x_n'' بحيث يكون :

— $|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n}$ و $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0$

. . . .

وبمتابعة هذه العملية نحصل على المتتاليتين المحدودتين من عناصر $[a, b]$ التاليتين :

(١) x_1' و x_2' و .... و x_n' و .....

(٢) x_1'' و x_2'' و .... و x_n'' و .....

وبحسب المبرهنة (٢) في ٢ — ١٠ توجد في المتتالية (١) متتالية جزئية متقاربة . ولكي لا ندخل رموزاً جديدة سنعتبر أن المتتالية (١) نفسها تتقارب من نقطة معينة x_0 . ومنه تكون المتتالية (٢) متقاربة من x_0 للاسباب التالية :

من المساواة $x_n'' - x_0 = x_n'' - x_n' + x_n' - x_0$ ينتج أن :

$|x_n'' - x_0| \leq |x'' - x_n'| + |x_n' - x_0|$. وبما أن :

$|x''_n - x'_n| < \frac{1}{n} \to 0$ و $x'_n - x_0 \to 0$ عندما $n \to \infty$

فإننا نستنتج أن $\left[x''_n - x_0 \to 0 \right.$ • ولما كانت الدالة $f(x)$

مستمرة في النقطة x_0 [حسب شروط النص] فإننا نستنتج عندمـــا

$n \to \infty$ ، أنّ $f(x'_n) \to f(x_0)$ و $f(x''_n) \to f(x_0)$ •

ومنه $|f(x'_n) - f(x''_n)| \to 0$ عندما $n \to \infty$ • ولكن هـــذا

يناقض المتباينة $\varepsilon \leq |f(x'_n) - f(x''_n)|$ من أجل جميع قيم n •

وبذلك يتم إثبات ما نريده .

<u>تمرين محلول</u> : نعلم أن الدالة $f(x) = x^2$

مستمرة على الفترة $[0,1]$ • ومنه ، بحسب المبرهنة السابقة ،

ينتج أن $f(x)$ مستمرة بانتظام على $[0,1]$ • ولكننا ســـنبرهن

على أن $f(x)$ مستمرة بانتظام على الفترة $[0,1]$ بدون الاعتماد

على المبرهنة الســـابقة ، وذلك كما يلـــي :

ليكن x' و x'' عنصرين اختاريين من الفترة $[0,1]$ • عند ئذ يكون :

$$f(x'') - f(x') = x''^2 - x'^2 = (x''+x')(x''-x') .$$

ومنه ، باعتبار أن $0 \leq x''+x' \leq 2$ ، نجد : $|f(x'') - f(x')| \leq 2|x''-x'|$ •

فاذا أخذنا عدداً حقيقياً موجباً اختيارياً ε ،

ووضعنا $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ فإننا نجد :

$\left(\forall x', x'' \in [0,1] : |x''-x'| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon \right)$ وبهذا يتم

اثبـــات المطلـــــوب •

تعريف : إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومحدودة على الفترة $[a,b]$ فإننا نسمي الفرق $\omega = M - m$ ، حيث :

$M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$ و $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$ ، بذبذبة هذه الدالة على الفترة $[a,b]$.

نتيجة : إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على الفترة $[a,b]$ فإنه يتحقق مايلي :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ فانه يمكن تقسيم (تجزئة) هذه الفترة $[a, b]$ إلى عدد محدود من الأجزاء بحيث تكون ذبذبة الدالة $f(x)$ على كل جزء من هذه الأجزاء لا تتجاوز ε .

الاثبات : بحسب المبرهنة السابقة نستنتج أن $f(x)$ مستمرة بانتظام على $[a,b]$. ومنه ، بفرض $\varepsilon \in \mathbb{R}^{(+)}$ ، يوجد $\delta \in \mathbb{R}^{(+)}$ بحيث يكون :

$$\forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

لنقسم الفترة $[a,b]$ إلى أجزاء بحيث يكون طول كل جزء منها أصغر من δ . عندئذ يكون $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ من أجل كل نقطتين x' و x'' تنتميان إلى أيّ جزء من هذه الأجزاء ، وبالتالي تكون ذبذبة الدالة $f(x)$ على كل جزء من هذه الأجزاء لا تتجاوز ε .

الفصـــل الخامـــس

الاشـــتقاق والمفاضلـــة

٥ - ١ - المشتق : لتكن $y = f(x)$ دالة معرفة على فتـرة معينة X ، ولتكن $x_0 \in X$ ، نعرف مشتق الدالـــة $f(x)$ في النقطة x_0 بأنه النهاية التاليـــة :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

أما إذا كانت هذه النهاية غير موجودة فيقال بأنه لايوجد لهذه الدالة مشتق في النقطة x_0 ، واذا كانت هذه النهاية تساوي ∞ باشارة محددة ، فإننا سنقول أحياناً بأنه يوجد مشتق لانهائي لهذه الدالة في هذه النقطة ، كما وتدعى الدالة ، التي يوجد لها مشتق محدود في النقطة x ، بدالة قابلة للاشتقاق (للمفاضلة) في هذه النقطة ، ويستخدم أحد الرموز y' و y'_x و $\frac{dy}{dx}$ و $f'(x)$ للتعبير عن المشتق بالنسبة لـ x ، كما ويستخدم الرمز $f'(x_0)$ للتعبير عن المشتق في النقطة x_0 ، وبما أن $f'(x_0)$ هو عدد ، وأن قيم المشتق في النقط المختلفة هي أعداد مختلفة (في الحالة العامة) ، فإنه يمكن النظر الى المشتق كدالـــة في النقطة ، أي في x ، وبالاضافة الى ذلك ، فإن النهايـــة $\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تعبّر عن المشتق من اليسار للدالـــة

$f(x)$ في النقطة x_0 ، حيث يرمز لهذا المشتق بالرمز :
$f'(x_0-0)$. أما المشتق من اليمين للدالة $f(x)$
في النقطة x_0 فهو $f'(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ونلاحظ أنه اذا كان المشتق $f'(x_0)$ موجوداً فإن المشتقين من اليسار ومن اليمين يكونان موجودين ومتساويين . وبالعكس ، اذا كان المشتقان من اليسار ومن اليمين موجودين ومتساويين فإن المشتق $f'(x_0)$ يكون موجوداً ومساوياً للقيمة المشتركة لهما ، أي :

$$f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$$

أما اذا كان المشتق $f'(x_0)$ غير موجود فإن المشتقين من اليسار ومن اليمين قد يكونان موجودين . فمثلاً ، لا يوجد مشتق للدالة $f(x)=|\sin x|$ في النقطة $x_0=0$ ، لأنه لا توجد النهاية :

$$\lim_{x\to x_0=0}\frac{|\sin x|-|\sin x_0|}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$$

ولكن المشتقين من اليمين ومن اليسار موجودان :

$$f'(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{|\sin x|}{x}=+1$$ و

$$f'(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{|\sin x|}{x}=-1$$.

ملاحظة : إذا كان المشتق موجوداً ومحدوداً في كل نقطة من نقاط مجموعة فإننا نقول عن الدالة إنها قابلة للاشتقاق على هذه المجموعة .

٥ ــ ٢ ــ المعنى الهندسي للمشتق : إن قيمة المشتق في النقطة

x_0 للدالة $f(x)$ تساوي ميل المماس للمنحني:

$y = f(x)$ في النقطة $(x_0, f(x_0))$ ، أي تساوي ظـل الزاوية الموجبة التي يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات •

إذا كان المشتق لانهائياً في نقطة معينة فإن المماس للمنحني يكون موازيا لمحور العينات • أما إذا كان المشتق معدوماً في النقطة فإن المماس للمنحني يكون موازيا لمحور السينات •

٥ ـ ٣ ـ حساب مشتقات الدوال الابتدائية : سنذكر فيما يلي مشتقات بعض الدوال ، ونبيّن حساب بعضها ونترك حساب البعض الآخر كتمرين للقارئ : [حيث الاشتقاق هو بالنسبة لـ x هنا]:

١) مشتق الدالة الثابتة يساوي الصفر •

٢) $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$ ، حيث $\mu \in \mathbb{R}$ •

٣) $(a^x)' = a^x . \ln a$ ، حيث $0 < a \neq 1$ •

٤) $(e^x)' = e^x$

٥) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ ، حيث $0 < a \neq 1$ •

٦) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

٧) $(\sin x)' = \cos x$

الاثبات : لتكن $y = \sin x$ • عندئذ يكون :

وبالتالي : $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

وبما أن الدالة $\cos x$ مستمرة وأن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ فإننا

نجد : $(\sin x)' = \cos x$

٨) $(\cos x)' = -\sin x$

٩) $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

١٠) $(cotg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -cosec^2 x$

مبرهنة : لتكن $y = f(x)$ دالة محققة لشروط المبرهنة المذكورة في ٤ ـ ١٤ ، ولتكن $x = \varphi(y)$ دالة معاكسة لها. فإذا كان المشتق $f'(x_0)$ موجوداً وغير معدوم فإنه يوجد مشتق للدالة المعاكسة في النقطة $y_0 = f(x_0)$ ، ويكون : $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

الاثبات : لنعط القيمة y_0 تغيّراً $\Delta y \neq 0$ ، عندئذ يكون تغيّر الدالة $x = \varphi(y)$ الموافق هو Δx ، إن هذا التغير غير معدوم لأنه لو كان $\Delta x = 0$ لكان $x_0 + \Delta x = x_0$ وبالتالي لكان: $f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$ أي لكان $\Delta y = 0$ وهذا غير صحيح ، إذن $\Delta x \neq 0$ ، ومنه يمكننا أن نكتب :

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$$

وبملاحظة أنه عندما $\Delta x \to 0$ يكون $\Delta y \to 0$ طالما أن الدالة $x = f(y)$

مستمرة . ومنه : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}$

وبالتالي توجد النهاية : $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ ويكون : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

أو $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ وبهذا يتم اثبات المطلوب .

أمثلة : ١) لنأخذ الدالة $y = \arcsin x$ على $[-1, 1]$ فنجد

أنها معاكسة للدالة $x = \sin y$ على $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ وعلى هذه الفترة

يكون $x'_y = \cos y \neq 0$. ومنه :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

(لاحظ أننا أخذنا اشارة + قبل الجذر لأن $\cos y > 0$ على الفترة

$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) .

٢) إن الدالة $y = \arctan x$ معرفة على $\mathbb{R}$ وتكون معاكسة

للدالة $x = \tan y$. وبما أن $x'_y = \sec^2 y \neq 0$ على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

فإن :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

٣) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ، حيث $-1 < x < 1$

(برهن ذلك ؟) .

٤) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$ ، حيث $x \in \mathbb{R}$

(برهـــن ذلــــــك) .

٥ ـ ٤ ـ العلاقة بين الاشتقاق والاستمرار : لنفرض أن الدالـــة $f(x)$ معرفة على فترة X وأن $x_0 \in X$ وأن للدالة مشتقـاً محدوداً $f'(x_0)$ في النقطة x_0 . عندئذ تكون الدالة $f(x)$ مســـتمرة في النقطـــــة x_0 .

بالحقيقة ، عندما $x \to x_0$ نجـــد :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \longrightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

وبالتالي $f(x) \to f(x_0)$

وإذن $f(x)$ مستمرة في x_0 .

ملاحظة : إذا كانت الدالة مستمرة في نقطة فليس من الضروري أن تكون قابلة للاشتقـــاق فيهـــــا .

مثال : لنأخذ الدالة $f(x) = |x|$ فنجد أنها مستمرة فـــي النقطة $x = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ ، ونجد أنها غير قابلة للاشـــتقاق في النقطة $x = 0$ لأنّ : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{و}$$

$\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1$ ، وبالتالي فالنهاية $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ غير موجـــــــــودة .

٥ ـ ٥ ـ <u>قواعد حســـــاب المشـــتقات</u> : [الاشتقاق بالنسبة لـ x هنا باستثناء البند ٩ والبند ١٠] .

١) $(Cu)' = Cu'$ ، حيث u هي دالة في x .

٢) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$ ، حيث u, v, w هي دوال في x .

٣) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ، حيث u و v هما دالتان في x .

٤) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ، حيث u و v هما دالتان في x .

٥) $(Sh\,x)' = Ch\,x$ لأنّ :

$$(Sh\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = Ch\,x$$

٦) $(Ch\,x)' = Sh\,x$

٧) $(th\,x)' = \frac{1}{Ch^2 x}$ لأنّ :

$$(th\,x)' = \left(\frac{Sh\,x}{Ch\,x}\right)' = \frac{Ch^2 x - Sh^2 x}{Ch^2 x} = \frac{1}{Ch^2 x}$$

٨) $(coth\,x)' = -\frac{1}{Sh^2 x}$

٩) لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ ، حيث $x = \varphi(t)$ ولنفرض وجود المشتقين المحدودين $f'(x_0)$ و $\varphi'(t_0)$ ، حيث $x_0 = \varphi(t_0)$. عندئذ تكون الدالة $y = f(\varphi(t)) = F(t)$ في t قابلة للاشتقاق في النقطة t_0 ، ومشتقها هو $F'_t(t_0) = f'_x(x_0) \cdot \varphi'_t(t_0)$.

أي : $y'_t = y'_x \cdot x'_t$.

[نفترض هنا أن لـ $F(t)$ معنى ، في جميع الحالات ، في فترة معينة ، حاوية t_0] . ولإثبات صحة هذا النص نعطي القيمة t_0 تغيراً Δt . عندئذ يأخذ x_0 تغيراً Δx . ومنه يأخذ y تغيراً Δy . لما كان العدد $f'(x_0)$ يساوي نهاية $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$ ، فإنه يمكننا أن نكتب : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$

حيث α هو لامتناه في الصفر عندما $\Delta x \to 0$.

ومنه نجد : $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ ، حيث $\alpha \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$. وبطريقة مماثلة نجد :

$\Delta x = \varphi'(t_0)\Delta t + \beta \cdot \Delta t$ ، حيث $\beta \to 0$ عندما $\Delta t \to 0$.

إذن يمكننا أن نكتب :

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha](x - x_0)$$

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = [\varphi'(t_0) + \beta](t - t_0)$$

ومنه : $F(t) - F(t_0) = f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0)) =$

$$= [f'(x_0) + \alpha] \cdot [\varphi(t) - \varphi(t_0)] =$$

$$= [f'(x_0) + \alpha] \cdot [\varphi'(t_0) + \beta] \cdot (t - t_0)$$

ومنه بفرض $t \neq t_0$ ، نجد :

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = [f'(x_0) + \alpha] \cdot [\varphi'(t_0) + \beta]$$

ومنه، إذا جعلنا $t_0 \to t$ فإننا نجد $\beta \to 0$ وبسبب استمرار الدالة $\varphi(t)$ في t_0 نجد $x_0 \to x$ وبالتالي $\alpha \to 0$، ولذلك فإنّ الطرف الأيمن من المساواة السابقة يسعى إلى $f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)$؛ وبالتالي : $F'_t(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = f'_x(x_0) \cdot \varphi'_t(t_0)$

<u>أمثلة هامة</u> : $1°$) إذا كان $y = e^{x^2}$ فإن $y'_x = 2x \cdot e^{x^2}$

$2°$) إذا كان $y = u^v$ ، حيث u و v عادالتان في x ($u > 0$) لهما مشتقان u' و v' في النقطة المعطاة ، فإنه يمكننا أن نكتب :

$$y = u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$$

ومنه :

$$y'_x = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} \cdot (v \ln u)' = e^{v \ln u}(v' \ln u + v \frac{u'}{u}) =$$

$$= u^v(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u})$$

اذن : $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'$.

$3°$) اذا كان $y = (\sin x)^{\cos x}$ فإنّ :

$$y'_x = (\sin x)^{\cos x} \cdot \ln \sin x \cdot (-\sin x) + \cos x (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot \cos x$$

$$= (\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x)$$

$4°$) اذا كان $y = x^{x^x}$ فإنه يمكننا أن نكتب $y = x^v$ ، حيث $v = x^x$ وبالتالي نستنتج $y' = x^v \cdot \ln x \cdot v' + v \cdot x^{v-1}$

$$v' = x^x \cdot \ln x + x \cdot x^{x-1}$$ و

وبالتالي : $y' = x^{x^x + x - 1}\left[x \ln x\,(\ln x + 1) + 1\right]$

5) $(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ، حيث u دالة في x .

6) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ ، حيث u دالة في x .

7) $(e^u)' = e^u \cdot u'$ ، حيث u دالة في x .

8) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ ، حيث u دالة في x .

9) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ ، حيث u دالة في x .

10) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ ، حيث u دالة في x .

11) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ ، حيث u دالة في x .

12) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ، حيث u دالة في x .

13) $(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ، حيث u دالة في x .

14) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ ، حيث u دالة في x .

15) $(\operatorname{Sh} u)' = \operatorname{Ch} u \cdot u'$ ، حيث u دالة في x .

16) $(\operatorname{Ch} u)' = \operatorname{Sh} u \cdot u'$ ، حيث u دالة في x .

17) $(\operatorname{Th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{Ch}^2 u}$ ، حيث u دالة في x .

18) $(\operatorname{arccotg} u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$ ، حيث u دالة في x .

19) $(\operatorname{coth} u)' = \frac{-u'}{\operatorname{Sh}^2 u}$ ، حيث u دالة في x .

20) لتكن لدينا الدالة y في x المعطاة وسيطياً بالمعادلتين:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

إذا قمنا بحل المعادلة الأولى بالنسبة للوسيط t وحصلنا على المعادلة ($t = \phi(x)$ مثلاً ، فإننا نجد أن :

$y = \psi[\phi(x)] \equiv f(x)$ ومنه نحصل على المشتق y'_x .

إلاّ أنه يمكننا الحصول على المشتق y'_x (في حالة وجوده) كما يلي :

لنفرض أنه يوجد للدالتين ($x = \varphi(t)$ و $y = \psi(t)$

مشتقان ، وأن $\varphi'(t) \neq 0$ [على فترة معينة] ، ولنفرض

أنه توجد للدالة ($x = \varphi(t)$ دالة معاكسة ($t = \chi(x)$

وأنه يوجد لهذه الدالة المعاكسة مشتق محدود ($\chi'(x)$.

((ملاحظة : يمكننا أنه نستنتج من الشرط $\varphi'(t) \neq 0$ أن الدالة

$x = \varphi(t)$ مطردة ، ومنه ، بحسب المبرهنة في ٤ ــ ١٤ ،

توجد لها دالة معاكسة ($t = \chi(x)$ ، وهذه الدالة تكون قابلة

للاشتقاق بحسب المبرهنة في ٥ ــ ٣)) .

عندئذ يكون : $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t}$.

أيْ أن : $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ أيْ : $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

مثال : أوجد المشتق y'_x للدالة التالية المعطاة وسيطياً :

$$x = a\cos^3 t \quad , \quad y = a\sin^3 t$$

وذلك في النقطة الموافقة للقيمة $t = \dfrac{\pi}{4}$.

الحل : $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3a\cdot\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t} = -tg\, t$.

ومنه $y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -tg\,\dfrac{\pi}{4} = -1$ وهو المطلوب

تمارين :

تمرين (١) : أوجد المشتق y' للدالة $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

الجواب : $y' = \dfrac{7}{8\sqrt[8]{x}}$ $\qquad y = x^{\frac{7}{8}}$

تمرين (٢) : برهن على انه إذا كان x_1 جذراً للحدودية $f(x)$ مكرراً (مضاعفاً) k مرة فإن x_1 يكون جذراً للمشتق $f'(x)$ مكرراً $k-1$ مـــرة .

تمرين (٣) : أوجد المشتق y' للدالة $y = tg^2\sqrt{x^2+1}$.

الجواب : $y' = \dfrac{2x\, tg\sqrt{x^2+1}\cdot\sec^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

تمرين (٤) : أوجد المشتق y' للدالة $y = \ln\sin\sqrt{arc\,tg\, e^{3x^5}}$.

الجواب :

$$y' = \frac{1}{\sin\sqrt{arc\,tg\,e^{3x^5}}}\cdot\cos\sqrt{arc\,tg\,e^{3x^5}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{arc\,tg\,e^{3x^5}}}\cdot\frac{1}{1+e^{6x^5}}\cdot e^{3x^5}\cdot 15x^4$$

تمرين (٥) : أوجد المشتق y' لكل من الدوال التاليـــة :

(أ) $y = (tg\,x)^x$ الجواب :

$y' = (tg\,x)^x\left(\ln tg\,x + \dfrac{2x}{\sin 2x}\right)$

(ب) $y = x^{\ln x}$ الجواب : $y' = 2x^{\ln x-1}\cdot\ln x$

(جـ) $y = x^{x^2}$ الجواب : $y' = x^{x^2+1}(2\ln x+1)$

(د) $y = th(\ln x)$ الجواب : $y' = \dfrac{1}{x\,ch^2(\ln x)}$

هـ) $y = x \operatorname{arctg}^2 \dfrac{x}{3} + \sin x^2$

الجواب : $y' = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{x}{3} + \dfrac{6x}{9+x^2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3} + 2x \cos x^2$

و) : $y = \dfrac{1 + x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$

الجواب : $y' = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

ز) : $y = 5^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt[3]{4x^2} + 1\right)^2$

الجواب :

$y' = \left(\sqrt[3]{4x^2} + 1\right)\left[\dfrac{\ln 5\left(\sqrt[3]{4x^2}+1\right)}{2\sqrt{x}(1+x)} + \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{4}{x}}\right] 5^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$

ح) : $y = \ln\left[\ln(\ln x)\right]$ الجواب : $y' = \dfrac{1}{x \ln x \cdot \ln \ln x}$

ط) $y = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \cos x \ln \operatorname{tg} x$ الجواب : $y' = \sin x \ln \operatorname{tg} x$

ي) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ الجواب : $y' = \dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

ك) $y = x^{\sqrt{x}}$ الجواب : $y' = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\ln x}{2} + 1\right)$

ل) $y = (\ln x)^x$ الجواب : $y' = (\ln x)^x\left(\dfrac{1}{\ln x} + \ln \ln x\right)$

م) $y = x^{\sin x}$ الجواب : $y' = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x\right)$

ن) $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$ الجواب : $y' = \operatorname{th}^3 x$

س) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$ الجواب : $y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$

ع) $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$ الجواب : $y' = e^{\operatorname{ch}^2 x} \operatorname{sh} 2x$

تمرين (٦) أوجد المشتق y'_x للدوال الآتية المعطاة وسيطياً :

(٤) $y = t - \operatorname{arctg} t$ ، $x = \ln(1+t^2)$.

الجواب : $y'_x = \dfrac{t}{2}$

(ﻫ) $x = \arcsin t$ ، $y = \arcsin\sqrt{1-t^2}$

الجواب : $y'_x = \dfrac{1}{t}\sqrt{1-t^2}$

(ﺩ) $x = e^t \sin t$ ، $y = e^t \cos t$

الجواب : $y'_x = \dfrac{\sin 2t + 1}{\cos 2t}$

(ﺯ) $x = a\operatorname{ch} t$ ، $y = b\operatorname{sh} t$

الجواب : $y'_x = \dfrac{b}{a}\coth t$

تمرين (٧) : ماهو مشتق الدالة $f(x)$ المعرفة بالصيغة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x = 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

الجواب : $f'(x) = \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ ، حيث $x \neq 0$ أما المشتق في النقطة $x = 0$ فهو غير موجود .

تمرين (٨) : ماهو مشتق الدالة $f(x)$ المعرفة بالصيغة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x = 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

الجواب : $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ حيث :

$$f'(0) = 0 \;,\; x \neq 0$$

تمرين (٩) : برهن أن مشتق الدالة الزوجية (دالة) دالة فردية وأن مشتق الدالة الفردية (هي) دالة زوجيـــــة .

تمرين (١٠) : ليكن y دالة في x ، ولنأخذ الدالة $\ln|y|$ ،

اثبت أن $\left(\ln|y|\right)' = \dfrac{y'}{y}$

((ملاحظة : يسمى $\dfrac{y'}{y}$ بالمشتق اللوغارتمي لـ y))

تمرين (١١) : احسب مشتق الدالة $y = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$

الجواب : $y' = \dfrac{8}{\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^{2}}$

تمرين (١٢) : احسب مشتق كل من الدوال التاليـــــة :

أ) $y = Argsh\,x$ الجواب : $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

ب) $y = Argch\,x$ الجواب : $y' = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x > 1)$

ج) $y = Argth\,x$ الجواب : $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$

د) $y = Argcoth\,x$ الجواب : $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| > 1)$

تمرين (١٣) : احسب مشتق الدالة $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$

الجواب : $y' = \dfrac{2}{1-x^2}$

تمرين (١٤) : احسب ميل مماس الخط البياني للدالة [illegible]

في النقطـــة (١ ، [illegible])

الجواب : [illegible]

تمرين (١٥) : برهن صحة الصيغة $Arg\coth x = Arg\,th\,\frac{1}{x}$

وأستنتج من ذلك مشتق الدالـــة $y = Arg\coth x$.

٥ ــ ٦ ــ التفاضل : لنفرض أن للدالة $y = f(x)$ مشـتقـاً محدوداً $f'(x_0)$ في النقطة x_0 . نعرّف تفاضــــل الدالة y في النقطة x_0 بالصيغة :

$$dy = f'(x_0) . \Delta x$$

لنعتبر Δx لامتناهياً في الصغر أساسياً ولنقارن معه Δy . فمــن تعريف المشـــتق نكتــب :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وضمن الشرط $f'(x_0) \neq 0$ يكون اللامتناهيات في الصغر Δy و Δx من مرتبة واحدة ، ويكون $f'(x_0)\Delta x$ الجزء الرئيسي والخطــــي للامتناهي في الصغر Δy . ولهذا يمكن تعريف التفاضل dy للدالة y بأنه الجزء الخطي الرئيسي للتغير Δy .

لتكن $y = f(x)$ دالة لها المشتق $f'(x_0)$ في النقطة x_0 . عندئذ ، اذا كان $x - x_0 = \Delta x$ فإنّ :

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ و } dy = f'(x_0)(x - x_0)$$

ولما كان $dy \backsim \Delta y$ فإنّ : $f(x) - f(x_0) \backsim f'(x_0)(x - x_0)$

وبالتالـــــي :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

وعندما $x_0 = 0$ يكون لدينا : $f(x) \simeq f(0) + f'(0)\, x$

ومنه (عندما تكون x قريبة بقدر كاف من الصفر)

نستنتج : $(1+x)^{\mu} \simeq 1 + \mu x$ و $\ln(1+x) \simeq x$

و $e^{x} \simeq 1 + x$ و $tg\, x \simeq x$ و $\sin x \simeq x$

تمرين محلول : أوجد قيمة تقريبية لـ $\sin 60^\circ 3'$ إذا علمت أن :

$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025$ و $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

الحل : لنفرض $f(x) = \sin x$ ولنأخذ $x_0 = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$

و $x = 60^\circ\, 3' = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{3 \cdot \pi}{60 \cdot 180}$ ،

فيكون $x - x_0 = \dfrac{3 \cdot \pi}{60 \cdot 180} = 0{,}000872$ و $f'(x_0) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

وبالتالي :

$$\sin 60^\circ 3' = f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 0{,}000872$$

$$= 0{,}866025 + 0{,}000436 = 0{,}866461 .$$

وهو المطلوب .

لنأخذ الآن $y = x$. عندئذ $dy = dx$. ولما كان :

$dx = \Delta x$. فإننا نجد : $dy = y' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ وبالتالي :

$$dy = f'(x) \cdot dx \qquad (*)$$

ومنه $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

ملاحظة : لنفرض أن $y = f(x)$ بحيث $x = \varphi(t)$

ولنفرض وجود المشتقين y'_x و x'_t ، عندئذ نجد :

$dy = y'_t\, dt$ ، حيث $y'_t = y'_x \cdot x'_t$. ومنه $dy = y'_x \cdot x'_t \cdot dt$

وبالتالي $dy = y'_x\, dx$. اذن فالمساواة ($\ast$)

تكون صحيحة عندما يكون x متغيراً مستقلاً ($dx = \Delta x$) ،

وعندما يكون x دالة في متغير جديد t ($dx \neq \Delta x$) .

ملاحظة أخرى : بما أن التفاضل يساوي جداء المشتق بتفاضل المتغير فإنّ خواص التفاضل تنتج عن خواص المشتقات ويمكننا أن نعيد جـــدول المشتقات الذي أثبتناه في ٥ ـ ٣ بعد أن نبدل y' بـ dy ونضرب الطرف الثاني بتفاضل المتغير dx .

٥ ـ ٧ ـ المشتقات والتفاضلات من مرتبة أعلـــــى :

إن المشتق من المرتبة الثانية للدالة y هو : $(y')' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

كما وان المشتق من المرتبة الثالثة للدالة y هو :

$$(y'')' = y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

....

وهكذا .... $(y^{(n-1)})' = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

أمثلة : ١) $\forall n \in \mathcal{N}$ فإنّ $(e^x)^{(n)} = e^x$

٢) إذا كان $y = \sin x$ فإنّ $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

[يبرهن على صحة هذه القضية بالاستقراء الرياضي] .

٣) اذا كان $y = \cos x$ فإنّ $y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

٤) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$

٥) ليكن $y = u \cdot v$ ، حيث u و v دالتان في x ولهما مشتقات من أيّة مرتبة • عندئذ نجـــــد :

$$y' = u'v + uv' \quad , \quad y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' =$$

$$= u''v + 2u'v' + uv'' \quad ,$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$

$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \, , \ldots\ldots$$

واذا اصطلحنا أن نكتب $u = u^{(0)}$ = المشتق من المرتبة صفر لـ u

و $v = v^{(0)}$ = المشتق من المرتبة صفـر لـ v ، فإننا نجد :

$$y^{(n)} = (u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + n\,u^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} \cdot v'' + \cdots +$$

$$+ \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-K+1)}{K!} u^{(n-K)} \cdot v^{(K)} +$$

$$+ \cdots + u\,v^{(n)}$$

تدعى هذه الصيغة بدستور ليبنتز • ويبرهن على صحة هذا الدستور بالاستقراء الرياضي ، حيث نجد أنه صحيح من أجل $n = 2$ و $n = 3$ •

وبفرض أن هذا الدستور صحيح من أجل $n \geq 3$ فإننا سنبرهن على صحته من أجل $n+1$ كما يلـــــي :

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)} \cdot v + u^{(n)} \cdot v' + n\left[u^{(n)} \cdot v' + u^{(n-1)} \cdot v''\right] +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left[u^{(n-1)} v'' + u^{(n-2)} v'''\right] + \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-K+1)}{K!}\left[u^{(n-K+1)} v^{(K)} + u^{(n-K)} \cdot v^{(K+1)}\right] + \cdots\cdots +$$

$$+ u' v^{(n)} + u \cdot v^{(n+1)} .$$

ومنه : $y^{(n+1)} = u^{(n+1)} \cdot v + (n+1) u^{(n)} v' + \left[n + \frac{n(n-1)}{2!}\right] u^{(n-1)} v'' + \cdots +$

$$+ \left[\frac{n(n-1)\cdots(n-K+2)}{(K-1)!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-K+1)}{K!}\right] u^{(n-K+1)} v^{(K)} +$$

$$+ \cdots\cdots + (n+1) u' v^{(n)} + u \cdot v^{(n+1)}$$

ولكن : $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-K+2)}{(K-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1)}{K!} =$

$$= \frac{n!}{(K-1)!(n-K+1)!} + \frac{n!}{K!(n-K)!} = \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!}\left(\frac{1}{n-K+1} + \frac{1}{K}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} \cdot \frac{(n+1)}{K(n-K+1)!} = \frac{(n+1)!}{K!(n-K+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)\, n\,(n-1)\cdots(n-K+2)}{K!}$$

اذن : $y^{(n+1)} = u^{(n+1)} v + (n+1) u^{(n)} v' + \frac{(n+1)n}{2!} u^{(n-1)} v'' + \cdots +$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-K+2)}{K!} u^{(n-K+1)} \cdot v^{(K)} + \cdots + (n+1) u' v^{(n)} + u v^{(n+1)}$$

إذن فدستور ليبنتز صحيح من أجل كل n .

وبهذا يتم اثبات المطلـــــــوب .

٦) أوجد المشتق الخامس للدالة $y = x^5 \cdot e^{\frac{x}{2}}$.

الحل : بفرض $u = x^5$ و $v = e^{\frac{x}{2}}$ نجد :

$u' = 5x^4$ و $u'' = 20x^3$ و $u''' = 60x^2$ و

$u^{(4)} = 120x$, $u^{(5)} = 120$ و $v' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $v'' = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$,

$v''' = \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}$, $v^{(4)} = \frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}$, $v^{(5)} = \frac{1}{32}e^{\frac{x}{2}}$

ومنه بحسب دستور ليبنتز نجد :

$$y^{(5)} = 120e^{\frac{x}{2}} + 5 \cdot 120x \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 60x^2 \cdot \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} +$$
$$+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 20x^3 \cdot \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}} + 5 \cdot 5x^4 \cdot \frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}} + x^5 \frac{1}{32}e^{\frac{x}{2}}$$

$$= e^{\frac{x}{2}}\left(120 + 300x + 150x^2 + 25x^3 + \frac{25}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^5\right)$$

٢) أوجد المشتق الخامس والعشرين للدالة $y = x^3 \cos x$.

الحل : نفرض أن $u = x^3$ فيكون : $u' = 3x^2$ و $u'' = 6x$ و $u''' = 6$

$u^{(n)} = 0$ عندما $n \geq 4$ • ونفرض أيضاً أن $v = \cos x$ •

عند ئذ يكون $v^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ من أجل كل n من

N • ومنه (بحسب دستور ليبنتز) :

$$y^{(25)} = \frac{25 \cdot 24 \cdots 5 \cdot 4}{22!} u''' v^{(22)} + \frac{25 \cdot 24 \cdots 4 \cdot 3}{23!} u'' v^{(23)} +$$
$$+ \frac{25 \cdot 24 \cdots 3 \cdot 2}{24!} u' v^{(24)} + u \cdot v^{(25)} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} \cdot 6\cos\left(x + 22\frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ \frac{25 \cdot 24}{2!} 6x\cos\left(x + 23 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 25 \cdot 3x^2\cos\left(x + 24 \cdot \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \quad x^3 \cos\left(x + 25 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -13800 \cos x + 1800 x \sin x + 75 x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

٨) لتكن $x = \varphi(t)$ و $y = \psi(t)$. نعلم ضمن شروط قابلية الاشتقاق أن $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ وبالتالي ، اذا أخذنا الدالة المعطاة وسيطياً بالمعادلتين $x = \varphi(t)$ و $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ ، نجد :

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{x'_t \cdot y''_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^2}}{x'_t} =$$

$$= \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}$$

٩) أوجد المشتق الثاني y''_{xx} للدالة التالية المعطاة وسيطياً :

$$x = \cos t \quad \text{و} \quad y = 3 \sin t$$

الحل : نلاحظ أن :

$$x'_t = -\sin t \quad \text{و} \quad x''_t = -\cos t$$

$$y'_t = 3 \cos t \quad \text{و} \quad y''_t = -3 \sin t$$

ومنه :

$$y''_{xx} = \frac{(-\sin t)\cdot(-3\sin t) - (-\cos t)\cdot(3\cos t)}{(-\sin t)^3}$$

$$= \frac{3\sin^2 t + 3\cos^2 t}{-\sin^3 t} = \frac{-3}{\sin^3 t} \quad \text{(وهو المطلوب)}$$

لنفرض الآن أن للدالة $y = f(x)$ مشتقات من أية مرتبة في النقطة

x ، حيث x هو متغير مستقل • عند ئذ يكون بالتعريف

مايلـــــــي : $dy = y' dx$

$$= d^2 y = d(dy) = (y' dx)' dx = y'' \cdot dx \cdot dx = y'' dx^2$$

= (التفاضل من المرتبة الثانيـــــة)

$$= d^3 y = d(d^2 y) = (y'' dx^2)' dx = y''' dx^2 \cdot dx = y''' dx^3$$

= (التفاضل من المرتبة الثالثـــــة)

• •

$$= d^n y = d(d^{n-1} y) = (y^{(n-1)} dx^{n-1})' dx = y^{(n)} dx^{n-1} \cdot dx = y^{(n)} dx^n$$

= (التفاضل من المرتبـــة n)

ومنه نحصل على الكسر $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ الذى يعبر عن المشـــتق من المرتبة n للدالة y •

وكذلك نستنتج أن :

$$d^n(uv) = d^n u \cdot v + n\, d^{n-1} u \cdot dv + \frac{n(n-1)}{2!} d^{n-2} u \cdot d^2 v + \dots + u\, d^n v$$

ملاحظة : إن الصيغة $d^n y = y^{(n)} dx^n$ ، حيث $n > 1$ ، تكون صحيحة عندما يكون x متغيراً مستقلاً ، ولا تكون صحيحة عندما يكون x دالة في متغير آخر • فإذا فرضنا $y = f(x)$ حيث $x = \varphi(t)$ فإننا نجـــــد :

$$dy = y' dx$$

$$d(dy) = d(y' dx) = dy' \cdot dx + y' d(dx) = y'' dx^2 + y' d^2x$$

$$d^2y = y'' dx^2 + y' d^2x$$

[لاحظ أنه يوجد حد إضافي $y' d^2x$ لأننا لانستطيع اعتبار dx كعدد ثابت في الوقت الذي لايكون فيه x متغيراً مستقلاً . أما اذا كان x متغيراً مستقلاً فإن $dx = \Delta x$ يكون كمية ثابتة — وبالتالي $d^2x = d\,(dx) = 0$] .

مثال : أوجد التفاضلات dy و d^2y و d^3y للدالة $y = x^4 - 3x^2 + 2$ في الحالتين التاليتيــــن :

أ) x هو متغير مســــتقل .

ب) x هو دالة في متغير مســــتقل آخر .

الحــل : في كلتا الحالتين أ) و ب) يكــون :

$$dy = y' dx = (4x^3 - 6x)\,dx = 2\,(2x^3 - 3x)\,dx$$

حيث $dx = \Delta x$ (ثابت) عندما يكون x متغيراً مســتقلاً

و $dx \neq \Delta x$ (متغير) عندما تكون x دالة في متغير مستقل آخر .

أ) $d^2y = d(dy) = d\left[2(2x^3 - 3x)\,dx\right] = 2dx \cdot d(2x^3 - 3x)$

$$= 2dx \cdot (6x^2 - 3)\,dx = 6\,(2x^2 - 1)\,dx^2$$

$$d^3y = d(d^2y) = d[6(2x^2-1)dx^2] =$$

$$= 6dx^2 \cdot d(2x^2-1) = 6dx^2 \cdot 4x\,dx =$$

$$= 24x\,dx^3$$

ب)

$$d^2y = d(dy) = d[2(2x^3-3x)dx] =$$

$$= 2d[(2x^3-3x)dx] =$$

$$= 2[d(2x^3-3x)dx + (2x^3-3x)d(dx)] =$$

$$= 2[3(2x^2-1)dx\,dx + (2x^3-3x)d^2x] =$$

$$= 6(2x^2-1)dx^2 + 2(2x^3-3x)d^2x$$

$$d^3y = d(d^2y) = d[6(2x^2-1)dx^2 + 2(2x^3-3x)d^2x] =$$

$$= 6d[(2x^2-1)dx^2] + 2d[(2x^3-3x)d^2x] =$$

$$= 6[d(2x^2-1)dx^2 + (2x^2-1)d(dx^2)] +$$

$$+2[d(2x^3-3x)d^2x + (2x^3-3x)d(d^2x)] =$$

$$= 6[4x\,dx\,dx^2 + (2x^2-1)2dx\,d^2x] +$$

$$+2[(6x^2-3)dx\,d^2x + (2x^3-3x)d^3x] =$$

$$= 24x\,dx^3 + 18(2x^2-1)dx\,d^2x +$$

$$+2(2x^3-3x)d^3x.$$

تمارين

١) احسب المشتقات من المرتبة n للدوال :

أ) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

الجواب : $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} x^{-(n+\frac{1}{2})}$

ب) $y = \sin ax$

الجواب : $y^{(n)} = a^n \cdot \sin(ax + n \cdot \frac{\pi}{2})$

ح) $y = \cos ax$

الجواب : $y^{(n)} = a^n \cdot \sin\left[ax + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]$

د) $y = \ln(1+x)$

الجواب : $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1)(1+x)^{-n}$

ه) $y = e^x \cdot \sin x$

الجواب : $y^{(n)} = e^x\left[\sin x + \frac{n}{1}\sin(x+\frac{\pi}{2}) + \frac{n(n-1)}{2!}\sin(x+2\frac{\pi}{2}) + \cdots + \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})\right]$

٢) احسب المشتق ذا المرتبة الخمسين للدالة $y = x^2 e^{2x}$.

الجواب : $y^{(50)} = 2^{50} \cdot e^{2x}\left(x^2 + 50x + \frac{50 \cdot 49}{4}\right)$

٣) تعرف حدوديات لوجاندر بالصيغة :

$$P_n(x) = \left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

أيْ المشتق من المرتبة n للقوة $(x^2-1)^n$.

برهن صحة الصيغتيـــــــن :

$$(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0$$

$$P_{n+1}(x)-(4n+2)xP_n(x)+4n^2P_{n-1}(x)=0$$

٤) احسب قيمة تقريبية لـ $\sqrt[3]{25}$ وذلك باســـــتعمال مفهوم التفاضل.

الجواب : $2,926$.

٥) احسب تفاضل الدالة : $y=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

الجواب : $dy=\dfrac{2\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\sin\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}$

٦) احسب المشتق من المرتبة n لكل من الدوال التاليـــــــة :

أ) $y=x^{\mu}$ ، حيث $\mu\in\mathbb{R}$.

الجواب : $y^{(n)}=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$

ب) $y=\ln x$ الجواب : $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

د) $y=a^x$ الجواب : $y^{(n)}=a^x\cdot(\ln a)^n$

٧) إذا كان $y=x^2\cos ax$ فأوجد $y^{(50)}$.

الجـــــــــواب :

$$y^{(50)} = a^{48}\left[(2450 - a^2x^2)\cos ax - 100\,ax \cdot \sin ax\right]$$

٨) اذا كان $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ فاثبت أن :

$$y^{(n)} = (ad - bc)\,(-1)^{n-1}\; n!\,(cx+d)^{-(n+1)}\; c^{n-1}$$

٩) أوجد المشـــتق النوني للحدوديــــة :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

الجواب : $P_n^{(n)}(x) = a_0\, n!$

١٠) أوجد d^2y للدالة $y = \ln \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ وذلك :

أ) إذا كان x متغيراً مســـــتقلاً .

ب) إذا كان x دالة في متغير آخر .

الجواب: أ) $d^2y = -\dfrac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}\,dx^2$

ب) $d^2y = \dfrac{4x}{x^4-1}\,d^2x - \dfrac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}\,dx^2$

.../...

الفصل السادس

مبرهنات القيم الوسطى وتطبيقاتها

٦ ـ ١ ـ المبرهنات الأساسية في الحساب التفاضلي :

مبرهنة (١) [مبرهنة فيرما] : لنفرض أن الدالة $y = f(x)$ معرفة على فترة معينة X • ولنفرض أن لهذه الدالة قيمة أعظمية أو أصغرية في نقطة داخلية x_0 (في X) على هذه الفترة X •

عندئذ تكون القضية التالية صحيحة : إذا كان يوجد مشتق محدود لهذه الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 فإن قيمة هذا المشتق تكون معدومة ، أي $f'(x_0) = 0$ •

الاثبات : لنفرض أن $f(x_0)$ هي قيمة أعظمية للدالة $f(x)$ على الفترة X . عندئذ يكون $f(x) \leqslant f(x_0)$ من أجل جميع قيم x من X • ولدينا $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ، وهذه النهاية لا تتعلق بالطريقة التي تسعى بها x نحو x_0 •

ولكن ، إذا سعت x نحو x_0 من اليسار ، فإن $x - x_0 < 0$ و $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ ، أما إذا سعت x نحو x_0 من اليمين فإن $x - x_0 > 0$ و $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$. ومنه بالانتقال إلى النهايات نجد $f'(x_0) \geqslant 0$ و $f'(x_0) \leqslant 0$ وبالتالي $f'(x_0) = 0$ • وأخيراً عندما تكون القيمة $f(x_0)$ قيمة أصغرية لـ $f(x)$ على الفترة X فإن البرهان على

صحة النص يتم بصورة مشابهة • وبذلك يتم اثبات المطلوب •

مبرهنة (٢) [مبرهنة رول] : لنفرض أن الدالة $y=f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ بحيث يتحقق مايلي :

١) الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ •

٢) الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]a,b[$ •

٣) $f(a)=f(b)$ •

عندئذ يوجد $c \in]a,b[$ بحيث يكون $f'(c)=0$ •

الاثبات : لنفرض أن $f(a)=f(b)=\mu$ • اذا كان $f(x)=\mu$ من أجل جميع قيم x من $[a,b]$ فإن $f'(x)=0$ (لأن مشتق الكمية الثابتة يساوي الصفر).

وفي هذه الحالة يمكننا أن نأخذ بمثابة c أية نقطة من الفترة $]a,b[$ •

لنفرض ، الآن، وجود نقاط x في الفترة $]a,b[$ بحيث يكون :

$f(x)>\mu$ أو $f(x)<\mu$ •

وسنفرض ، من أجل التحديد ، أن $f(x)>\mu$ من أجل بعض النقاط في الفترة $]a,b[$ • وبما أن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإنه ، بحسب المبرهنة (٤) في ٤ ـ ١٢ ، توجد $c \in [a,b]$ بحيث تكون القيمة $f(c)$ أعظمية بين قيم الدالة $f(x)$ على هذه الفترة • ومنه $f(c)>\mu$ •

وبالتالي يكون $c \in]a,b[$. ومنه ، بحسب مبرهنة فيرما ،
يكون لدينا $f'(C)=0$. وبهذا يتم اثبات المطلـــــوب .

نتيجة : يوجد ، بين كل جذرين للدالة القابلة للاشتقاق $f(x)$ ،
جذر واحد على الأقل للمشـــتق $f'(x)$.

مثال : أثبت أن للمعادلة $x^3+3x-6=0$ جذراً حقيقياً واحداً
فقـــــــــط .

الحــل : لنأخذ الدالة $f(x)=x^3+3x-6$ فنجد أنهـــا
مستمرة على الفترة $]-\infty,+\infty[$ ، ولها مشتق $f'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)$.
ونلاحظ ، بسهولة ، أن $f'(x)\neq 0$ مــن
أجل جميع قيم x من $\mathbb{R}$. ومنه فللمعادلة المفروضة جذر واحد على
الاكثر [لانه لوكان يوجد جذران مختلفان C_1 و C_2 للمعادلة —
المفروضة لكان $f(C_1)=f(C_2)=0$ وبالتالي لكان يوجد ،
بحسب مبرهنة رول ، عدد C واقع بين C_1 و C_2 بحيث يكون $f'(C)=0$
وهذا مستحيل] . ولما كانت الحدودية من مرتبة فردية فإنه يوجـد
للمعادلة المفروضة جذر واحد على الاقل. وبذلك نستنتج أنه يوجد جـــذر
حقيقي واحد فقط للمعادلة المفروضــــة .

مبرهنة (٣) [مبرهنة لاغرانج] : لنفرض أن الدالة $y=f(x)$
معرفة على الفترة $[a,b]$ بحيث يتحقق مايلـــــي :

١) الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$.

٢) الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]a,b[$.

عندئذ يوجد $c \in]a,b[$ بحيث يكون :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) .$$

الاثبات : لنعتبر ، على الفترة $[a,b]$ ، الدالة المساعدة

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

فنجد أنها تحقق شـــروط مبرهنة رول لما يلي :

بالحقيقة ، إن $\varphi(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ ،

وذلك لانها تساوي حاصل الطرح بين الدالة المستمرة $f(x)$

ودالة خطية . كما وإن $\varphi(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]a,b[$

ومشـــتقها هو $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

وبالاضافة الى ذلك ، فإن $\varphi(a) = \varphi(b)$ لأن :

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0$$

اذن توجد ، بحسب مبرهنة رول ، نقطة $c \in]a,b[$ بحيث يكون :

$\varphi'(c) = 0$ ، وبالتالي يكون : $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

وبهذا يتم اثبات المطلوب .

ملاحظة : ١) يسمى الدستور $f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$

بدستور القيمة الوسطى أو دستور التغيرات]أو

(التزايدات)[المحدودة .

٢) إذا فرضنا أن القيمة المطلقة للمشتق $f'(x)$ محدودة

ضمن الفترة $]a,b[$ بعدد نرمز له بـ K $\left(|f'(x)| < K\right)$ ،

وإذا كان x_1 و x_2 عددين واقعين ضمن الفترة المذكورة فإنه

ينتج عن ذلك المتباينة :

$$|f(x_2) - f(x_1)| < K|x_2 - x_1|$$

٣) الخطأ القياسي : لتكن الدالة $f(x)$ ولنفرض أننا نريد

حساب قيمة لهذه الدالة من أجل قيمة ما لـ x نرمز لها بـ a .

ولنفرض أيضاً أننا لا نعرف القيمة الحقيقية لـ a بل قيمة تقريبية a'

حيث $a - a' < \varepsilon$. سنرتكب نتيجة هذا الحساب خطأ يساوي

طبعاً إلى : $f(a) - f(a')$

نسمي هذا الخطأ بالخطأ القياسي ويعطى استناداً الى دستور

التزايدات المحدودة بالصيغة

$$f(a) - f(a') = (a - a')\, f'(\alpha)$$

حيث α واقع بين a و a' . إن لهذا الخطـــأ حداً أعلى يساوي جداء ε الحد الأعلى لـ $(a-a')$ بـ A الحد الأعلى لـ $f'(x)$ ، حيث قيم x تكون واقعة بين a و a'.

مبرهنة (٤) [مبرهنة كوشي] : لنفرض أننا أعطينا دالتين $f(x)$ و $g(x)$ على الفترة $[a,b]$ بحيث يتحقق مايلي :

١) الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرتان على الفترة $[a,b]$.

٢) الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتان للاشتقاق على الفترة $]a,b[$ ، وبالاضافة الى هذا $g'(x) \neq 0$ من أجل جميع قيم x من هذه الفتـــرة .

عندئذ يوجد $c \in]a,b[$ بحيث يكـــون :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{[صيغة كوشي]}$$

الاثبات : سنبين أولاً أن لطرفي صيغة كوشي معنى . فللطرف الأيمـــن معنى لأن $g'(c) \neq 0$ بحسب شروط النص ، كما وإن للطـــرف الأيسر معنى لأن $g(b) \neq g(a)$ بسبب مايلـــي :

لو كان $g(a) = g(b)$ لتحققت شروط مبرهنة رول من أجـــل الدالة $g(x)$ ، وبالتالي لوجد $x_0 \in]a,b[$ بحيث يكـــون $g'(x_0) = 0$ وهذا يخالف كون $g'(x) \neq 0$ من أجل

جميع قيم x من الفترة $]a,b[$.

ولإثبات صحة المبرهنة نعتبر الدالـــــة :

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)$$

فنجد أنها تحقق شروط مبرهنة رول كما يلي :

بالحقيقة ، إن الدالة $\phi(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ وان

هذه الدالة $\phi(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]a,b[$

ومشـــتقها هو : $\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$

كما وان $\phi(a) = \phi(b) = 0$ ومنه ،

توجد ، بحسب مبرهنة رول ، نقطة $c \in]a,b[$ بحيث يكـــــون

$\phi'(c) = 0$ ، ولكن $\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$.

ومنه : $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$

وبالتالي $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

وهو المطلـــــوب .

مثال : عين قيمة c من أجل الدالة $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$

على الفترة $[0,2]$ وذلك استناداً إلى مبرهنة لاغرانج .

الحل : لدينا $f(b) = f(2) = 12$ و $f(a) = f(0) = -2$

و $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$.

وبحسب دستور التزايدات المحدودة يكـــــون :

$$12-(-2)=2\cdot f'(c)$$

ومنه $f'(c)=7$ وبالتالي $12c^2-10c+1=7$. ومنه نجد أن القيمة المطلوبة هي $c=\frac{5+\sqrt{97}}{12}$ ، حيث أهملنا القيمة الثانية لـ c ، الناتجة عن حل المعادلة من الدرجة الثانية $12c^2-10c-6=0$ ، لأنّ هذه القيمة الثانية لا تنتمي الى الفترة $]0,2[$.

تمارين

١) أثبت أن مبرهنة لاغرانج تكون حالة خاصة من مبرهنة كوشي عندما يكون $g(x)=x$.

٢) عيّن قيمة c من أجل الدالة $f(x)=\ln x$ على الفترة $[1,a]$ ، حيث $a>1$ ، وذلك استناداً إلى مبرهنة لاغرانج .

٣) أثبت أن للمعادلة $x^4-4x-1=0$ جذرين حقيقيين مختلفين ، اثنين فقط .

٤) أوجد ، على المنحني $y=5-3x^2$ ، نقطة M يكون المماس فيها لهذا المنحني موازياً للمستقيم المار من النقطتين $B(0,5)$ ، $A(-1,2)$ ، وذلك بطريقتين مختلفتين .

٥) حقق مبرهنة رول على الدالة $f(x)=x^3-4x$.

٦) لتكن الدالة $y=e^x$. حقق دستور التزايدات المحدودة ، على هذه الدالة من أجل $a=0$ و $\alpha=1$.

٧) أوجد قيمة c التي تعدم المشتق للدالة $f(x)=x-x^3$

على الفترة $[-1,0]$ وذلك باستخدام مبرهنة رول .

٨) حقق مبرهنة رول على الدالة $f(x)=(x-a)^m \cdot (x-b)^n$

، حيث m,n عددان صحيحان موجبان .

٩) لتكن الدالة : $f(x)=\dfrac{x+4}{x^3+1}$. والمطلوب حساب حد

أعلى للخطأ القياسي الناتج عن حساب قيمة هذه الدالة من أجل

$x=\pi$ وذلك عندما نأخذ $3,14$ قيمة تقريبية للعدد π ؛

علماً بأن القيمة التقريبية للعدد π بثلاثة أرقام عشرية هي $3,142$.

١٠) لنكتب دستور التزايدات المحدودة بالشكل :

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x+\theta h)\,,\quad 0<\theta<1$$

يطلب حساب الدالة $f(x)$ لتكون

θ مستقلة عن x .

١١) اذا فرضنا $a<b$ فبرهن على صحة الصيغتين :

أ) $$\frac{b-a}{1+b^2}<\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a<\frac{b-a}{1+a^2}$$

ب) $$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\operatorname{arctg}\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$$

١٢) لتكن الدالة $f(x)=1-(x-1)^{2/3}$ ، حيث

$0\le x\le 2$. بيّن لماذا لا يمكن تطبيق مبرهنة رول على هذه

الدالة .

١٣) لنأخذ دالتين $f(x)$ و $g(x)$ محققتين لجميع شروط مبرهنة كوشي . عندئذ تكون كل منهما محققة لشروط مبرهنة لاغرانج .

ومنه سوف نكتب :

$$\left.\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f'(c)(b-a)\ , \quad a<c<b \\ g(b)-g(a) &= g'(c)(b-a)\ , \quad a<c<b \end{aligned}\right]$$

وبالتالي :

$$\left[\!\left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ , \quad a<c<b \right.\right.$$

إن هذه المناقشة لا تعتبر اثباتاً لمبرهنة كوشي والمطلوب إيجاد الخطأ في هذه المناقشة .

١٤) لتكن $f(x)$ دالة حقيقية قابلة للاشتقاق على الفترة : $[a,b]$. ولنفرض أن $f'(a)<\lambda<f'(b)$. أثبت أنه توجد نقطة x_0 في $]a,b[$ بحيث يكون $f'(x_0)=\lambda$.

كرر المسألة بفرض $f'(a)>f'(b)$.

١٥) بيّن أن الدالة $y=x^4-2x^3+2x-1$ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1,1]$ ثم أوجد قيمة c التي تعدم مشتقتها والتي تكون موجودة بحسب مبرهنة رول .

١٦) أثبت أن مبرهنة رول تكون غير صحيحة إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $]a,b[$ ؛

وغير مستمرة في النقطة a من اليمين أو في النقطـــة b من اليسار . ((ارشـــاد : خذ الدالة :

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b} & (a<x<b \text{ عندما}) \\ 0 & (x=a=b \text{ عندما}) \end{cases}$$ على الفترة $[a,b]$))

١٧) أثبت أن مبرهنة رول تكون غير صحيحة إذا كانت الدالة $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق في نقطة ما من الفترة $]a,b[$.

ارشاد : خذ الدالة $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ على الفترة $[-1,+1]$.

ـــ الأجوبـــــــــــــة ـــ

٢) $C=\dfrac{a-1}{\ln a}$

٤) $M\left(-\dfrac{1}{2} \text{ و } \dfrac{17}{4}\right)$

٥) ينعدم المشتق من أجل $C=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ ، $C=+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، حيث $f(2)=0$ $=f(0)=$ $f(-2)$.

٦) ينعدم المشتق من أجل C ، حيث $0<0{,}537<C<0{,}542<1$ و $e\approx 2{,}71828$.

٧) ينعدم المشـــتق من أجل $C=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

٨) ينعدم المشتق من أجل $C=\dfrac{mb+na}{m+n}$ ، حيث C واقعـــة بين a و b و $f(a)=f(b)=0$.

٩) الحد الأعلى للخطأ القياسي هو 5.10^{-4} ضمن الشروط المفروضة .

١٠) $f(x) = A + Bx + C e^{au}$ ، حيث $u = \theta h$ و

u دالة في h فقط و θ غير تابعة لـ x ؛

$$\theta = \frac{1}{ah} \cdot \ln \frac{e^{ah} - 1}{ah}$$

١٢) لأن المشتق $f'(x)$ غير مستمر ولا محدود من أجل $x = 1$.

١٣) ليس من الضروري أن تكون قيمة c هي نفسها من أجل — الدالتين $f(x)$ و $g(x)$.

١٥) $c = \frac{-1}{2}$.

٦ — ٢ — حالات عدم التعيين : لقد ذكرنا في ٢ — ٦ الأشكال غير المعينة وسندرس الآن كيف يمكن استخدام الحساب — التفاضلي في ازالة عدم التعيين بأسلوب أسهل من الأساليب — السابقة . ولأجل ذلك نبدأ بحالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

مبرهنة (١) [قاعدة لوبيتال] : لنفرض أن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ معرفتان على الفترة $]a, b[$ بحيث يتحقق مايلي :

١) $\lim_{x \to a+0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to a+0} g(x) = 0$.

٢) الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتان للاشتقاق على الفترة $]a, b[$ ، وبالاضافة الى هذا $g'(x) \neq 0$ من أجل كل x من هذه الفترة .

٣) النهاية $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$ موجودة ، حيث K هو عدد حقيقي محدود أو غير محدود .

عند ئذ يكون : $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$.

الاثبات : لنمدد تعريف الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في النقطة $x=a$ بحيث تكون هاتان الدالتان مستمرتين من اليمين في هذه النقطة ومن أجل هذا يكفي أن نضع $f(a)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=0$ و $g(a)=\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=0$.

عند ئذ تكون الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرتين على الفترة : $[a,b[$. ((لاحظ أن استمرار هاتين الدالتين في النقاط الداخلية في هذه الفترة تنتج من وجود المشتقات $f'(x)$ و $g'(x)$ بحسب الفرض)) . ثم ، لتكن $x\in[a,b[$. عند ئذ تحقق الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ جميع شروط مبرهنة كوشي على الفترة $[a,x]$. ومنه ، توجد $c\in]a,x[$ بحيث يكون :

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

وبالتالي يكون :
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

واذا جعلنا x تسعى إلى a فإن c سوف تسعى إلى a (لأن : $a<c<x$) ، وبالتالي يكون :

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K$$

وبهذا يتم اثبات المطلوب •

ملاحظة : إن النقطة a هي الطرف الأيسر للفترة و x تسعى الى a من اليمين • وبصورة مماثلة يمكن دراسة الحالة التي تكون فيها a الطرف الأيمن للفترة و x تسعى الى a من اليسار ، أو الحالة التي تكون فيها a نقطة داخلية في الفترة و $x \to a$ بأية طريقة •

ملاحظة أخرى : إذا كانت النهاية $\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ تمثل حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ فإننا نطبق قاعدة لوبتال مرة ثانية ويكون :

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

أيْ أنه يمكن تطبيق قاعدة لوبتال عدة مرات متتالية طالما أن شروطها تتحقق •

مبرهنة : لنفرض أن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ معرفتان على الفترة $]a, b[$ بحيث يتحقق مايلي :

١ً) $\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$ و $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

٢ً) الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتان للاشتقاق على الفترة $]a, b[$ ، وبالاضافة إلى هذا $g'(x) \neq 0$ من

أجل كل x من هذه الفترة .

٣) النهاية $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$ موجودة ، حيث

K هو عدد حقيقي محدود أو غير محدود .

عندئذ يكون :

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

إن هذه المبرهنة تدعى أيضاً بقاعدة لوبيتال وسنقبل صحتها دون التعرض لاثباتها .

ملاحظة : تبقى قاعدة لوبيتال صحيحة عندما تكون $a=\infty$ أي عندما $x \to \infty$ ، وذلك لانه إذا كان $f(x) \to 0$ و $g(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$ وكان $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$

فإننا نضع $x = \dfrac{1}{t}$. عندئذ نجد أن $t \to 0$ عندما $x \to \infty$ ؛

وأن : $f(x) = f\left(\dfrac{1}{t}\right) \to 0$ و

$g(x) = g\left(\dfrac{1}{t}\right) \to 0$. ومنه ، بحسب المبرهنة (١)، نجد :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

ملاحظة ثانية : يتم ايجاد النهاية $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ، بتطبيق قاعدة لوبيتال ، إذا كانت النهاية $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

موجودة . أما إذا كانت النهاية $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة ،

فإن هذا لا يعني أن النهاية $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ غيـر موجودة . فمثلاً ،

النهاية $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

موجودة ، في حين أن النهاية $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$

غير موجودة .

ملاحظة ثالثة : ليكن $n \in N$. عندئذ ، باستخدام قاعدة لوبيتال n مرة ، نجـــــد :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\cdot \ln a}{n\cdot x^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{n(n-1)\,x^{n-2}} = \cdots\cdots =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^n}{n!} = \infty$$

وهذا يعني أن a^x تكبر بصورة أسرع من x^n (عندما $x \longrightarrow +\infty$) .

ملاحظة رابعة : ليكن μ عدداً حقيقياً موجباً . عندئذ نجد (بحسب قاعدة لوبيتال) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\mu x^\mu = \infty$$

وهذا يعني أنه عندما $x \to +\infty$ فإن x^μ تكبر بصورة أسرع من $\ln x$.

إن حالتي عدم التعيين من الشكل $\infty\cdot 0$ و $\infty-\infty$

يمكن ردهما الى حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ثم يُزال

عدم التعيين باستخدام قاعدة لوبيتال . لنبين ذلك بالتمرينين المحلولين

التاليــــــــــــين :

تمرين محلول (١) : أوجد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - tg\, x)$.

الحل : نلاحظ أننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$ • ولكـــن :

$$\sec x - tg\, x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} \;\bullet$$

ومنه نكون أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ •

لذا نطبق قاعدة لوبيتال فنجـــــد :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - tg\, x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

تمرين محلول (٢) : أوجد $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{1-x}$ •

الحل : لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $0 . \infty$ • ولكن $x^2 \cdot e^{1-x} = \frac{x^2}{e^{x-1}}$

وبالتالي نصبح أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ • ومنـه

بحسب قاعدة لوبيتال نجـــــد :

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0 \;\bullet$$

وأخيراً فإنه يمكن بواسطة المطابقة $u^{v} = e^{v \ln u}$ •

رد حالات عدم التعيين من الشكل 0^0 و 1^∞ و ∞^0 الى حالة عـــدم

التعيين من الشكل $\infty . 0$ التي عالجناها قبل قليل •

مثال (١) أوجـــد $\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}$ •

الحل : لدينا حالة عدم تعيين من الشكل 0^0 • ولكن:

$(x-1)^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln(x-1)}$ وبالتالي تكون لدينا حالة عدم تعيين من

الشكل $\infty . 0$ ومنـــــــه :

$$\lim_{x\to 1}[\ln x \cdot \ln(x-1)] = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}} =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{x(\ln x)^2}{x-1} = -\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2+2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} =$$

$$= -\lim_{x\to 1}[(\ln x)^2+2\ln x] = 0$$

اذن : $\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x} = \lim_{x\to 1} e^{\ln x\cdot\ln(x-1)} = e^0 = 1$

مثال (٢) : أوجد $\lim_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

الحل : لدينا حالة عدم تعيين من الشكل 1^{∞} ، وبما أن :

$$(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}} = e^{tg\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(2-x)}$$ و

$$\lim_{x\to 1}\left[tg\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(2-x)\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{cotg\frac{\pi x}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{2-x} = \frac{2}{\pi}$$

فإننا نجد : $\lim_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$

هذا وسوف نحل التمرين التالي بكامل التفاصيل اللازمة ، لكي يكـــون نموذجاً أمام القـــارئ :

تمرين محلول : باستخدام قاعدة لوبيتال أوجد $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tg x}$.

الحل : لدينا $f(x) = 1-\cos x$ و $g(x) = tg x$ ،

ومنه $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$ و

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} tg\, x = 0$ ، والمشتقان $f'(x) = \sin x$

و $g'(x) = \sec^2 x$ موجودان ومحدودان ، مثلاً ، على الجوار

$]-\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}[$ للنقطة $x = 0$ ، وبالاضافة الى هـــذا

$g'(x) \neq 0$ على هذا الجوار ، كما وتكون النهاية الآتية

موجودة : $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sec^2 x} = \frac{0}{1} = 0$

ومنه ، بحسب قاعدة لوبيتال ، يمكننا أن نقول بأن النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

موجودة وتساوي $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ، أيّ تســاوي :

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{tg\, x} = 0$ وبهذا يتم اثبات المطلوب .

إلّا أننا لن نكتب هذه التفاصيل في كل مرة . وسنحل التمرين التالـــي

بصورة مختصرة كنموذج للقارئ :

تمرين محلول : أوجد ، باستخدام قاعدة لوبيتال ، النهاية :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} .$$

الحــــل : نلاحظ أن : $A = \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \frac{0}{0}$ (عدم تعيين)

لذا نطبق قاعدة لوبيتال فنجـــد :

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{1/x - 1} = \lim_{x\to 1} x \cdot \frac{x^x \cdot (\ln x + 1) - 1}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{1 - x} = \frac{0}{0} \text{ (عدم تعيين)}$$

لذا نطبق قاعدة لوبيتال مرة ثانية فنجـــد :

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

تمارين

١ — أوجد ، باستخدام قاعدة لوبيتال ، كلاً من النهايات التالية :

أ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$ الجواب : $\frac{1}{2}$

ب) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x}$ الجواب : 0

حـ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$ الجواب : 1

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec x + x}{\mathrm{tg}\,x - x}$ الجواب : 1

هـ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \coth x$ الجواب : 1

و) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{th}\,x$ الجواب : 1

٢ — طبق قاعدة لوبيتال واحسب $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-2\cos x+\cos^2 x}{x^4}$.

الجـــواب : $\frac{1}{4}$

٣ — ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ ، أوجد $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$.

الجـواب : $\begin{cases} 0 & \text{عندما } \alpha > 0 \\ \infty & \text{عندما } \alpha \leqslant 0 \end{cases}$

٤ — احسب $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ الجواب : 0

٥ — احسب $\lim\limits_{x\to 0+0} x \ln x$ الجواب : 0

٦ — احسب $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$ الجواب : 1

٧ — احسب $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{cotg}\,x)^{x}$ الجواب : 1

٨ — احسب $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ الجواب : $\frac{1}{e}$

٩ ــ باستخدام قاعدة لوبيتال أثبت أن :

$$3a = \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)} \qquad (١$$

$$\frac{4}{9} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x} \qquad (٢$$

$$2 = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \qquad (٣$$

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}} \qquad (٤$$

$$-\frac{1}{2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\operatorname{arctg} x^2 - \pi} \qquad (٥$$

$$-6 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln \cos(2x^2 - x)} \qquad (٦$$

$$\frac{1}{2} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \qquad (٧$$

$$0 = \lim_{x \to 0} x^n . \ln x \quad (n > 0) \qquad (٨$$

$$1 = \lim_{x \to 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \qquad (٩$$

$$1 = \lim_{x \to 0} \left[\ln(1+\sin^2 x) \operatorname{cotg} \ln^2(1+x) \right] \qquad (١٠$$

٦ ــ ٣ ــ متسلسلات القـــوى :

بما أن متسلسلات القوى تدخل في منهاج التحليل (٣) فإننا سنتحدث بإيجاز عنها لكي نستفيد من ذلك في بعض نواحي دراستنا في هذا الكتـــــــاب .

آ ــ متسلسلة القوى هي متسلسلة تحوي متغيراً ولها الشكل :

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (1)$$

حيث $a_0 , a_1 , \cdots , a_n , \cdots$ أعداد ثابتة و x متغير .

ب ـ تقارب متسلسلة القوى : لنأخذ متسلسلة القيم المطلقة :

$$A_0 + A_1 X + \cdots + A_n X^n + \cdots \qquad (٢)$$

حيث نفرض $A_i = |a_i|$ و $X = |x|$

نقول عن المتسلسلة (١) إنها متقاربة بإطلاق فيما اذا كانت المتسلسلة (٢) متقاربة .

إذا كانت المتسلسلة (٢) متقاربة من أجل $X < R$ فإن المتسلسلة(١) تكون متقاربة من أجل قيم x الواقعة ضمن الفترة $]-R ، +R[$.

تسمى هذه الفترة بفترة التقارب ويسمى R بنصف قطر التقارب .

يبرهن أن المتسلسلة (١) تكون متباعدة من أجل قيم x الواقعة خارج الفترة $[-R ، R]$. أما من أجل $x = \mp R$ فقد تكون متقاربة وقد تكون متباعدة . كما يمكننا أن نكتب ضمن فترة التقارب :

$$(٣) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

حيث $f(x)$ هو مجموع المتسلسلة المفروضة .

حـ ـ يبرهن أن $f(x)$ دالة مستمرة من أجل كل قيمة لـ x من فترة التقارب كما يبرهن أن للدالة المذكورة مشتقاً يعطى بالصيغة :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

وتكون متسلسلة الطرف الثاني متقاربة في فترة تقارب المتسلسلة الأصلية نفسها . أي يمكن أخذ مشتق الصيغة (٣) واستكمالها ضمن فترة التقارب .

د ـ يمكن تلخيص خواص متسلسلات القوى بأنها ، ضمن فترة التقارب ، تتصف بكل خواص الحدوديات (كثيرات الحدود) ويمكن أن تطبق عليها كل الأعمال الحسابية الحقيقية و المعينة ، كما يمكن ضمن فترة التقارب اعتبار كل متسلسلة قوى مطابقة لمجموعها .

هـ ـ المتسلسلة الهندسية :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

أساسها x وتكون متقاربة من أجل $-1 < x < 1$.

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

أساسها x^2 وتكون متقاربة من أجل $-1 < x < 1$ أيضاً .

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

أساسها $-x$ وتكون متقاربة من أجل $-1 < x < 1$ أيضاً .

٦ ـ ٤ ـ النشر المحدود (المنتهي) وغير المحدود للدوال :

آ ـ دستور تايلور : لتكن $P_n(x)$ حدودية من الدرجة n في x ، أي : $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ و $a_n \neq 0$

نريد كتابة هذه الحدودية على صورة حدودية من الدرجة n في $(x - x_0)$ ، حيث x_0 عدد مثبت . من أجل هذا ، نبحث عن المعاملات $A_0, A_1, \ldots, A_n$ بحيث تتحقق المطابقة :

$$(1) \quad P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n$$

ولأجل هذا نشتق هذه المطابقة n مرة فنجد :

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2 + \cdots + nA_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P''_n(x) = 2A_2 + 3\cdot 2A_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$P'''_n(x) = 3!A_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$P_n^{(n)}(x) = n!\,A_n$$

لنضع في الصيغ السابقة $x = x_0$ فنجـــد :

$$P_n(x_0) = A_0 \ , \ P'_n(x_0) = A_1 \ , \ P''_n(x_0) = 2A_2 \ ,$$

$$P'''_n(x_0) = 3!\,A_3 \ , \cdots , \ P_n^{(n)}(x_0) = n!\,A_n$$

ومنه :

$$A_0 = P_n(x_0) \ , \ A_1 = \frac{P'_n(x_0)}{1!} \ , \ A_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2!} \ ,$$

$$A_3 = \frac{P'''_n(x_0)}{3!} \ , \cdots , \ A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$$

اذن ، فالصيغة (١) يمكن كتابتها كما يلـــي :

$$(2) \quad P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

تدعى هذه المساواة بدستور تايلور للحدودية .

لنأخذ ، الآن ، دالة $f(x)$ ، معرفة على الفترة $[a, b]$

ولها في نقطة معينة x_0 من هذه الفترة مشتقات حتى المرتبة n ،

بما فيها هذه المرتبة . ولنأخذ ، بصورة شكلية ، الحدودية :

$$(٢) \quad P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ثم لنضع $x = x_0$ فنجد : $P_n(x_0) = f(x_0)$. ثم

لنكتب الحدودية $P_n(x)$ بالصورة (٢) ، فنجد ، بسبب

التطابق بين هاتين الصورتين ، أن : $P'_n(x_0) = f'(x_0)$

$P''_n(x_0) = f''(x_0), \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

فإذا كانت $f(x)$ حدودية من الدرجة n فإننا نجد :

$P_n(x) = f(x)$.

أما إذا كانت $f(x)$ ليست حدودية ، أو حدودية من درجة أعلى

من n ، فإن هذه المساواة لا تكون محققة . وتكون الحدودية -

$P_n(x)$ ، في هذه الحالة ، ممثلة بصورة تقريبية للدالة

$f(x)$ في جوار النقطة x_0 . فإذا كتبنا $f(x) \approx P_n(x)$

فإنّ الخطأ المرتكب يكون : $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

ومنه $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

وبالتالي نحصل على مايسمى بدستور تايلـــور :

$$(٤) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

حيث يدعى $R_n(x)$ بالحد الباقي أو المتمم .

ونلاحظ أنه إذا كانت $f(x)$ حدودية من الدرجة n فإنّ :

$R_n(x) = 0$.

ونلاحظ أيضاً أنه إذا كان $x_0 = 0$ فإننا نحصل على شكل خاص لدستور تايلور ألا وهو :

$$(٥) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

حيث يدعى هذا الدستور بدستور ماك لوران .

وسنبين فيما يلي كيف يمكن التعبير عن $R_n(x)$ بدلالة الدالـــة ومشـــتقاتهـــا :

لنفرض أن للدالة $f(x)$ مشتقات حتى المرتبة $(n+1)$ ، بما فيها هذه المرتبة ، وذلك في النقطة x_0 وفي جوار لهـــا .

عندئذ تكون للدالة $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ مشـــتقات حتى المرتبة $(n+1)$ ، بما فيها هذه المرتبة .

ثم لنكتب دستور تايلور (٤) للدالة $f(x)$. فإذا وضعنا في هذا الدستور $x = x_0$ فإننا نجد :

$$f(x_0) = f(x_0) + R_n(x_0)$$ وبالتالي $R_n(x_0) = 0$

واذا قمنا باشتقاق (٤) n مرة متتالية ، ووضعنا في كل مرة $x = x_0$ ، فإننا نجد :

$$f'(x_0) = f'(x_0) + R'_n(x_0)$$ أي : $R'_n(x_0) = 0$

$$f''(x_0) = f''(x_0) + R''_n(x_0)$$ أي : $R''_n(x_0) = 0$

$$f'''(x_0) = f'''(x_0) + R'''_n(x_0)$$ أي : $R'''_n(x_0) = 0$

....

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + R^{(n)}_n(x_0)$$ أي : $R^{(n)}_n(x_0) = 0$

إذن :
$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = R'''_n(x_0) = \cdots = R^{(n)}_n(x_0) = 0 \qquad (٦)$$

أما المشتق من المرتبة $n+1$ فيأخذ الشكل :

$$f^{(n+1)}(x) = R_n^{(n+1)}(x) \qquad (٧)$$

وذلك من أجل كل x من جوار النقطة x_0 .

[لاحظ أن الحدودية $P_n(x)$ هي من الدرجة n ولذلك فإن مشتقتها من المرتبة $n+1$ يكون معدوماً] .

لنطبق مبرهنة كوشي على الدالتين $R_n(x)$ و $(x-x_0)^{n+1}$ عدة

مرات ، آخذين بعين الاعتبار الخواص (٦) ، فنجد :

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(x_1)}{(n+1)(x_1-x_0)^n} = \frac{R''_n(x_2)}{(n+1)n(x_2-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \frac{R'''_n(x_3)}{(n+1)n(n-1)(x_3-x_0)^{n-2}} = \cdots = \frac{R_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$$

حيث x_1 تقع بين x و x_0 و x_2 تقع بين x_1 و x_0 وبالتالي

بين x و x_0 و ... و x_{n+1} تقع بين x و x_0 .

وإذا رمزنا لـ x_{n+1} بـ C فإننا نحصل من المساواة:

$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}$ على المساواة : $R_n(x) = \frac{R_n^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ؛

حيث تقع C بين x و x_0. ولكن ، بحسب (٧) ،

$R_n^{(n+1)}(C) = f^{(n+1)}(C)$. ومنه :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ [صيغة لاغرانــج

للحد الباقي أو المتمم] (٨)

حيث تقع C بين x و x_0 . ويعبّر ، أحياناً ، عن C بالصيغــة

التالية : $C = x_0 + \theta(x-x_0)$ حيث $0<\theta<1$. وبذلــك

يمكننا أن نكتب دســتور تايلور بالشـــكل :

$$(٩) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

وفي الحالة الخاصة ، عندما $x_0 = 0$ ، يكون لدينا دستور ماك لوران

التالي :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (١٠)$$

ملاحظة (١): إن دستور تايلور (٩) يعتبر تعميماً لدستور التزايدات المحدودة. إذ بالحقيقة، إذا أخذنا $n = 0$ في (٩) فإننا نجد:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(c)}{1!}(x - x_0)$$

وبالتالي: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$

وبالتالي: $\Delta y = f'(c)\Delta x$ ، حيث تقع c بين x و x_0.

ملاحظة (٢): إن الدستورين (٩) و(١٠) يسميان بدستوري النشر المحدود (المنتهي) للدالة $f(x)$ ، الأول حول x_0 والثاني حول الصفـــــر.

وسنتحدث عن النشر المحدود للدوال بعد أن نستعرض بعض الأمثلـــة وبعض الملاحظـــــات.

مثال (١): ليكن $f(x) = e^x$ عندئذ يكون $f^{(n)}(x) = e^x$ حيث $n \in \mathbb{N}$. ومنه $f^{(n)}(0) = 1$ ، حيث $n \in \mathbb{N}$. ومنه، بحسب (١٠)، يكون (حيث $0 < \theta < 1$):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

وإذا حذفنا الحد الباقي فإننا نجـــد:

$$e^x \simeq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \qquad (١١)$$

ويمكن تقدير الخطأ المرتكب (حينئذ) على فترة معينة ، ولتكن ، مثلاً ، الفترة $[1 , 0]$ ، حيث يكون $0 \leqslant x \leqslant 1$ و

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

ونلاحظ من الصيغة الأخيرة أن الخطأ المرتكب يسعى إلى الصفر عندما تزداد n نحو ∞ ، أي كلما زدنا عدد الحدود المأخوذة في دستور تايلور . وهذا يعني أنه يمكننا أن نأخذ بمثابة e^x أيّة حدودية من أية درجة . فمثلاً ، إذا أخذنا $n = 3$ فإنّ $|R_n(x)| < \frac{e}{24}$ ، وإذا أخذنا $n = 5$ فإنّ $|R_n(x)| < \frac{e}{720}$ وهكذا .

هذا ويمكننا أن نضع مسألة معاكسة بأن نطلب إيجاد عدد الحدود التي يجب أخذها في نشر الدالة e^x ، المعطاة على الفترة $[1 , 0]$ ، في دستور تايلور ، لكي لا يتجاوز الخطأ المرتكب (حينئذ) القيمة $0{,}0001$. ولحل هذه المسألة يكفي حل المتباينة :

$\frac{e}{(n+1)!} < 0{,}0001$. ونلاحظ أنّ المتباينة الأخيرة تتحقق عندما $n \geqslant 7$ (لأنّ $8! > 40000$) ،

وأنّ :
$$|R_7(x)| \leqslant \frac{e}{8!} < \frac{3}{8!} < \frac{3}{40000} < \frac{1}{10000}$$

وتجدر الإشارة إلى أنه إذا وضعنا $x = 1$ في الصيغة (11) ، فإننا نحصل على قيمة تقريبية للعدد e :

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{7!} = 2{,}7182$$

مثال (٢) : لتكن $f(x) = \sin x$ ، عندئذ يكون :

$\overset{(n)}{f}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ ، حيث $n \in N$ ، ويكون

$\overset{(2m)}{f}(x) = \sin m\pi = 0$ ، حيث $m \in N$ ،

$\overset{(2m-1)}{f}(0) = \sin(m\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^{m-1}$ ، حيث

$m \in N$ ، ثم بوضع $n = 2m$ في (١٠) نجد :

$$(١٢) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x)$$

حيث يأخذ الحد الباقي ، بحسب صيغة لاغرانج ، الشكل التالي :

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!}x^{2m+1} = (-1)^m \cos\theta x \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

( ) ولما كان $1 \geqslant |\cos\theta x|$ فإنّ الخطأ المرتكب ، عندما

نحذف الحد الباقي ، يُقيَّم كما يلي :

$$|R_{2m}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

ونلاحظ أن الخطأ يتعلق بـ m وبـ x . كما ونلاحظ أنه أياً كانت

قيمة x فإن $R_{2m}(x) \longrightarrow 0$ عندما $m \longrightarrow \infty$. وتجدر الاشارة

إلى أن الصيغة (١٢) تسمح بإعطاء قيمة تقريبية لجيب أية زاوية

(مقدرة بالراديان) وبأية دقة نشاء .

مثال (٣) : بصورة مماثلة يعطي نشر الدالة $f(x) = \cos x$ ،

وفق الصيغة (١٠) ، حيث $n = 2m+1$ ، الصيغة :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

حيـــــث :

$$|R_{2m+1}(x)| = \left| \frac{\cos[\theta x + (m+1)\pi]}{(2m+2)!} x^{2m+2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!} = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

مثال (٤) : أوجد فترة لقيم x ، بحيث تكون الصيغة التقريبية

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

محققة بدقة حتى ٥ ٠ ٠ ٠ ٠ ،٠ [أي بخطأ قيمتــه المطلقة أقل من $5 \cdot 10^{-5}$] .

الحل : نلاحظ ، استناداً إلى الفرض والى دستور تايلور ، أنّ :

$$\cos x = 1 + 0x - \frac{x^2}{2!} + 0x^3 + \frac{x^4}{4!}$$

ومنه يجب أن يكون :
$$|R_5(x)| \leqslant \frac{|x|^6}{6!} = \frac{x^6}{6!}$$

ولكي يكون الخطأ أقل من ٥ ٠ ٠ ٠ ٠ ،٠ يجب أن يكون $\frac{x^6}{6!} < 5 \cdot 10^{-5}$

وبحل هذه المتباينة الاخيرة نجد $|x| < 0{,}84$. وبهذا يمكننا أن نأخذ الفترة $\left] -\frac{84}{100} , \frac{84}{100} \right[$ من قيم x كجواب لمسألتنا ، مع العلم بأنها قد لا تكون أوسع فترة تتحقق من أجلها الشروط المفروضة .

مثال (٥) : احسب ، باستخدام دستور تايلور ، المقدار $\sin 54^\circ$ بخطأ لا يتجـــاوز ٠٫٠٠١ .

الحل : نلاحظ أن $54^\circ = \frac{54 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{10}$. ومنه ، اذا —

وضعنا ، في دستور تايلور للدالة $\sin x$ ، $x = \frac{3\pi}{10}$ فإنه يمكننا أن نكتب :

$$\left| R_{2m}\left(\frac{3\pi}{10}\right) \right| < \frac{\left(\frac{3\pi}{10}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!} < \frac{1}{(2m+1)!}$$

وذلك بملاحظة أن $1 > \frac{3\pi}{10}$.

ولتحديد عدد الحدود ، الواجب أخذها في دستور تايلور للحصول على القيمة التقريبية بخطأ أقل من $0{,}001$ ، يجب حل المتباينة

$\frac{1}{(2m+1)!} < 0{,}001$ أي المتباينة $(2m+1)! > 1000$.

ولما كان $7! = 5040 > 1000$ فإنه يمكننا أن نأخذ $2m+1 \geqslant 7$.

وبالتالي $m \geqslant 3$. ومنه يكفي أخذ $m = 3$ ، أي نأخذ :

$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ وبالتالي :

$$\sin 54^\circ = \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{3\pi}{10} - \frac{(3\pi)^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{(3\pi)^5}{10^5 \cdot 5!} \simeq 0{,}8100$$

[تم الحساب بأخذ أربعة أرقام عشرية] .

اذن $\sin 54^\circ \simeq 0{,}810$.

[ملاحظة : في الجداول ذات الخمسة أرقام عشرية نجد :

$\sin 54^\circ = 0{,}80902$]

ملاحظة (٣) : اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ولها مشتقات $f'(x)$ و $f''(x)$ و ... و $f^{(n)}(x)$ مستمرة على هذه الفترة ، ولها أيضاً مشتق من المرتبة $n+1$ في كل

نقطة من الفترة $]b, a[$ ، فإنه توجد نقطة λ من الفترة $]b, a[$

بحيث يكون :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\lambda)$$

بالحقيقة ، ليكن :

$$R_n = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \cdots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

ولنفتش عن R_n بحيث يكون من الشكل :

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} K$$

من أجل ذلك نأخذ الدالة المساعدة :

$$g(x) = f(b) - f(x) - \frac{(b-x)}{1!} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \cdots - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K$$

فنجد أنها مستمرة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق مرة واحدة على الأقل في كل نقطة من الفترة $]a, b[$ وتحقق الشرط : $g(a) = 0 = g(b)$ ؛ فحسب مبرهنة رول ، توجد نقطة $\lambda \in \mathbb{R}$

بحيث يكون : $g'(\lambda) = 0$ و $a < \lambda < b$.

وبما أن : $g'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} K$

فإنه يكون : $\frac{(b-\lambda)^n}{n!} K = \frac{(b-\lambda)^n}{n!} f^{(n+1)}(\lambda)$

وبالتالي يكـــون : $K = f^{(n+1)}(\lambda)$

وبتعويض K بقيمتها في R_n نجد أن :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\lambda)$$

إذا وضعنا $b = a + h$ و $\lambda - a = \theta(b-a) = \theta h$

حيث $0 < \theta < 1$ فإنّ الصيغة السابقة تصبح على الشكل التالي :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

أما إذا وضعنا $b = x$ و $\lambda - a = \theta(x-a)$ حيث $0<\theta<1$

فإنّ تلك الصيغة تصبح على الشكل التالي :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

وبهذا نكون قد حصلنا من جديد على دستور تايلور للدالة $f(x)$.

وبصورة خاصة ، اذا وضعنا $a = 0$ في دستور تايلور السابق ،

فإننا نحصل على مايسمى بدستور ماك لوران للدالة $f(x)$ التالي :

../..

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ونلاحظ أيضاً أن المقدار $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$

، الذى يسمى باقي لاغرانج ، هوعبارة عن الفرق بين الدالة $f(x)$ والحدودية :

$$\left[P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]$$

. فإذا كانت الدالة $f^{(n+1)}(x)$ محدودة على الفترة $]a, b[$ ، أي أنه يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث يكون $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ من أجل كل نقطة x من الفترة $]a, b[$ ، فإننا نجد أن :

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot M$$

ومنه : $\lim_{x\to a} R_n(x) = 0$

هذا ويمكننا كتابة النتيجة التالية :

إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق n مرة على الفترة $[a, b]$ ومشتقاتها $f'(x)$ و $f''(x)$ و .... و $f^{(n)}(x)$ مستمرة على هذه الفترة ، ولها أيضاً مشتق من المرتبة $(n+1)$ في كل نقطة من الفترة $]a, b[$ ، وكانت الدالة $f^{(n+1)}(x)$

محدودة على الفترة $]a,b[$ (أي : يوجد عدد حقيقي $M > 0$ بحيث يكون

$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ من أجل كل نقطة x من الفترة

$]a,b[$) ، فإنه توجد حدودية من الشكل:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

بحيث يكون : $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

حيث $R_n(x)$ هو لامتناه في الصغر عندما $a \leftarrow x$ من المرتبة $n+1$ بالنسبة للامتناهي في الصغر $x-a$. والخطأ المرتكب باستبدال $f(x)$ بالحدودية $P_n(x)$ لا يتجاوز المقدار

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot M \, .$$

وتجدر الاشارة الى أنه يمكننا أن نكتب :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} =$$

$$= (x-a)^n \cdot \frac{x-a}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$$

$$= (x-a)^n \cdot \varepsilon(x)$$

حيث $\varepsilon(x) = \frac{x-a}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$

ومنه نجد أن : $|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{|x-a|}{(n+1)!} M$

وبالتالي : $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

وبذلك يمكننا أن نكتب دستور تايلور للدالة $f(x)$ على الشكل التالي :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \cdot \varepsilon(x)$$

حيث $\varepsilon(x)$ هو لامتناه في الصغر عندما $x \to a$.

نعود الآن الى الحديث عن النشر المنتهي (المحدود) للدوال العددية :

تعريف : نقول إن الدالة $f(x)$ المعرفة في جوار ما للنقطة x_0 ، قابلة للنشر المنتهي وفق القوى المتزايدة لـ $x - x_0$ اذا كان بامكاننا أن نكتب $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \cdot \varepsilon(x)$$

وذلك من أجل كل قيمة للمتغير x من جوار x_0 ، حيث a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n هي أعداد حقيقية ليست كلها معدومة ، و $\varepsilon(x)$ هو لامتناه في الصغر عندما تنتهي x الى x_0 .

أمثلة : (١) إن الدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ معرفة من أجل كل x من المجموعة $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ، واذا كانت $x \in]-1, 1[$ فإننا نجد من المطابقة :

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$$

أن :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

، حيث $\mathcal{E}(x) = \dfrac{x}{1-x}$

هو لامتناه في الصغر عندما $x \to 0$.

٢) لتكن $f(x)$ و $g(x)$ حدوديتين ، حيث $g(0) \neq 0$. إذا قسمنا الحدودية $f(x)$ على الحدودية $g(x)$ وفق القوى المتزايدة لـ x نحصل على مطابقة من الشكل :

$$f(x) = g(x)\,(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + x^{n+1} R(x)$$

حيث $R(x)$ هي حدودية في x .

ومنه : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$

حيث $\mathcal{E}(x) = \dfrac{x R(x)}{g(x)}$ هو لامتناه في الصغر عندما $x \to 0$ و x هي نقطة ما من جوار للمبدأ لا يحوي أيّ صفر للحدودية $g(x)$.

٣) كتطبيق على المثال السابق نأخذ الحدوديتين :

$$g(x) = 1 + x - x^3 \quad و \quad f(x) = 2x + x^2$$

فنجد أن :

$$2x + x^2 = (1 + x - x^3)(2x - x^2 + x^3) + (x^4 - x^5 + x^6)$$

ومنه : $\dfrac{2x + x^2}{1 + x - x^3} = 2x - x^2 + x^3 + x^3 \cdot \mathcal{E}(x)$

حيث $\mathcal{E}(x) = \dfrac{x(1 - x + x^2)}{1 + x - x^3}$ ، $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

تعريف : نقول إن الدالة $f(x)$ المعرفة من أجل كل نقطة x من $\mathbb{R}$ بحيث يكون $|x| > M$ ، قابلة للنشر المنتهي (المحدود) وفق القوى المتزايدة لـ $\frac{1}{x}$ ، إذا كان بامكاننا أن نكتب $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}$$

وذلك من أجل كل $|x| > M$ ، حيث a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n هي أعداد حقيقية ليست كلها معدومة و $\varepsilon(x)$ هو لامتناه في الصغر عندما $x \to \infty$.

ويتمتع النشر المحدود (المنتهي) لدالة بالخواص التالية ، وذلك بفرض أن $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$ هو نشر محدود للدالة $f(x)$:

(١) إن : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a_0$ وبالتالي فإنه من الضروري أن تكون للدالة نهاية معينة ومحدودة عندما $x \to 0$ حتى يكون قابلاً للنشر المحدود في جوار المبدأ .

(٢) إذا كان $a_k \neq 0$ فإن $a_k \cdot x^k$ يكون الجزء الرئيسي للدالة

$$h(x) = f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1})$$

التي هي لامتناه في الصغر عندما $x \to$ ، ذلك لانه عندما $x \to$ يكون :

$$h(x) \sim a_k x^k + \cdots + a_n x^n + x^n \cdot \varepsilon(x) \sim a_k x^k$$

(٣) إذا كان $m < n$ فإنه يمكننا أن نكتب :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + x^m \cdot \varepsilon'(x)$$

حيث : $\varepsilon'(x) = a_{m+1} \cdot x + \cdots + a_n x^{n-m} + x^{n-m} \cdot \varepsilon(x)$

هو لا متناه في الصغر عندما $x \to 0$.

ومنه النتيجة التالية :

إذا كان لدينا نشر محدود للدالة $f(x)$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

و $m < n$ ، فإننا نحصل على نشر محدود جديد للدالة $f(x)$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + x^m \cdot \varepsilon'(x)$$

(٤) إذا كان للدالة $f(x)$ نشران محدودان :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n \cdot \varepsilon'(x)$$

فإن : $a_0 = b_0$ و $a_1 = b_1$ و ... و $a_n = b_n$.

بالحقيقة ، إن : $a_0 = \lim_{x \to 0} f(x) = b_0$

$$a_1 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - b_0}{x} = b_1$$

$$a_2 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1 x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - (b_0 + b_1 x)}{x^2} = b_2$$

وهكذا نجد أن : $a_3 = b_3 , \ldots , a_n = b_n$

(٥) إذا كان : $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+x^n\cdot\varepsilon(x)$

( ) نشراً محدوداً لـ $f(x)$ في الفترة

$]-\delta,\delta[$ و $f(x)$ تحقق الشرط $f(x)=f(-x)$

فإن الثوابت a_1 و a_3 و a_5 و ... و a_{2k+1} و ... تكون كلها

معدومة

بالحقيقة ، لدينا :

$$f(x)=f(-x)=a_0+(-a_1)x+a_2x^2+(-a_3)x^3+\cdots+$$
$$+(-1)^na_nx^n+x^n\cdot\varepsilon'(x)$$

ومنه : $-a_{2k+1}=a_{2k+1}$

وبالتالي : $a_{2k+1}=0$ حيث $1\leq 2k+1\leq n$.

(٦) إذا كان $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+x^n\cdot\varepsilon(x)$

نشراً محدوداً لـ $f(x)$ في الفترة $]-\delta,\delta[$ و $f(x)$

تحقق الشرط $f(-x)=-f(x)$ فإنّ الثوابت a_0 و a_2 و ...

... و a_{2k} و ... تكون جميعها معدومة .

بالحقيقة ، لدينا :

$$f(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots+(-1)^na_nx^n+$$
$$+x^n\cdot\varepsilon'(x)$$
$$=-f(x)=-a_0-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_nx^n-x^n\cdot\varepsilon(x)$$

ومنه $a_{2K} = -a_{2K}$ وبالتالي $a_{2K} = 0$

حيث $0 \leq 2K \leq n$.

وأخيراً ، يمكننا أن نقول مايلـــــي :

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق حتى المرتبة $n+1$ في جوار ما للنقطة x_0 ، فإنّ دستور تايلور للدالة $f(x)$ يعطينا نشراً منتهياً (محدوداً) لهذه الدالة وفق القوى المتزايدة لـ $x - x_0$ وذلك بشرط أن يكون المشتق $f^{(n+1)}(x)$ محدوداً في جوار النقطة x_0.

أمثـــــــلة :

١) نشـر الدالة $f(x) = Sh\,x$:

لدينا : $f^{(2K+1)}(x) = Ch\,x$ و $f^{(2K)}(x) = Sh\,x$

$f^{(2K-1)}(0) = 1$ و $f^{(2K)}(0) = 0$

إذن :
$$Sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2K+1}}{(2K+1)!} + x^{(2K+1)} \cdot \varepsilon(x)$$

٢) نشـــــر الدالة $f(x) = Ch\,x$:

لدينا $f^{(2K-1)}(x) = Sh\,x$ و $f^{(2K)}(x) = Ch\,x$

$f^{(2K-1)}(0) = 0$ و $f^{(2K)}(0) = 1$

إذن :
$$Ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2K}}{(2K)!} + x^{2K} \cdot \varepsilon(x)$$

٣) إذا طبقنا دستور تايلور على الدالة $f(x)$ ومشتقها $f'(x)$ نجد أنه:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^{n-1} \cdot \varepsilon'(x)$$

ومنه ، نلاحظ أن الجزء: $f'(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0)$

من نشر الدالة $f'(x)$ هو مشتق الجـــزء :

$$f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

من نشر الدالة $f(x)$.

ومنه النتيجة التاليــــــة :

إذا وجدنا نشراً للدالة $f(x)$ على الشـــكل :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \cdot \varepsilon(x)$$

فإننا نحصل بالاشتقاق على نشر لـ $f'(x)$ من الشـــكل :

$$f'(x) = a_1 + 2 a_2 (x - x_0) + \cdots + n a_n (x - x_0)^{n-1} + (x - x_0)^{n-1} \cdot \varepsilon_1(x)$$

وبالعكس، إذا وجدنا نشراً لـ $f'(x)$ فإننا نحصل بالمكاملة على نشر للدالة $f(x)$.

مثال : انشر الدالة $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ في جوار الصفر .

الحل : نعلم أن :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^m + x^m \cdot \varepsilon(x)$$

ومنه (باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x) نجد :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + m x^{m-1} + x^{m-1} \cdot \varepsilon'(x)$$

مثال آخر : انشر الدالة $\ln(1+x)$ بجوار الصفر .

الحل : نعلم أن :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1} \cdot \varepsilon(x)$$

ومنه :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + x^{n-1} \cdot \varepsilon_1(x)$$

ومنه [بمكاملة الطرفين وملاحظة أن $\ln(1+0) = 0$] نجد :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + x^n \cdot \varepsilon'(x)$$

وهناك عمليات على النشر المحدود (المنتهي) للدوال سنذكر منها مايلي :

1) النشر المنتهي لمجموع دالتين في جوار المبدأ :

ليكن :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \cdot \varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m + x^m \cdot \varepsilon_2(x)$$

فإذا كان $m \leq n$ مثلاً نجد أن :

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots$$
$$+ (a_m + b_m)x^m + x^m \cdot \varepsilon(x)$$

حيث : $\varepsilon(x) = \varepsilon_2(x) + a_{m+1} x + a_{m+2} x^2 + \cdots$
$$+ a_n \cdot x^{n-m} + x^{n-m} \cdot \varepsilon_1(x)$$

هو لامتناه في الصفر عندما $x \to 0$.

٢) النشر المنتهي لجداء دالتين :

لنفرض : $\lambda(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

$$\mu(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$$

فيكون : $f(x) = \lambda(x) + x^n \cdot \varepsilon_1(x)$

$$g(x) = \mu(x) + x^m \cdot \varepsilon_2(x)$$

ومنه : $f(x) \cdot g(x) = \lambda(x)\mu(x) + x^m \lambda(x)\varepsilon_2(x) +$
$$+ x^n \mu(x)\varepsilon_1(x) + x^{n+m} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$$

فاذا وضعنا :

$$P(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0)x^k$$

$$\lambda(x)\mu(x) = P(x) + x^k \cdot \varepsilon_3(x)$$

حيث $k = \inf(n, m)$ ، فإننا نجد أن :

$$f(x)\, g(x) = P(x) + x^k \cdot \varepsilon(x)$$

حيث :
$$\varepsilon(x) = \varepsilon_3(x) + x^{m-k}\lambda(x)\varepsilon_2(x) + x^{n-k}\mu(x)\varepsilon_1(x) + x^{n+m-k}\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$$

هو لامتناه في الصغر عندما $x \longrightarrow 0$.

3) النشر المنتهي لدالة كسرية :

ليكن :
$$f(x) = \lambda(x) + x^n \cdot \varepsilon_1(x)$$
$$g(x) = \mu(x) + x^m \cdot \varepsilon_2(x)$$

حيث $\lambda(x)$ و $\mu(x)$ هما حدوديتان من الدرجة n, m على الترتيب و $\mu(0) = b_0 \neq 0$ و $k = \inf(n, m)$.

إذا قسمنا $\lambda(x)$ على $\mu(x)$ وفق القوى المتزايدة ل x نحصل على :
$$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_k x^k + x^{k+1} R(x)$$
$$= P(x) + x^{k+1} R(x)$$

ومنـــه :

$$f(x) = P(x)\mu(x) + x^{K+1} R(x)\mu(x) + x^n \varepsilon_1(x)$$

$$= P(x)\left[g(x) - x^m \varepsilon_2(x)\right] + x^{K+1} R(x)\left[g(x) - x^m \varepsilon_2(x)\right] + x^n \cdot \varepsilon_1(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = P(x) + x^K \cdot \frac{x^{n-K} \cdot \varepsilon_1(x) + x R(x)\mu(x) - x^{m-K} P(x) \cdot \varepsilon_2(x)}{g(x)}$$

$$= P(x) + x^K \cdot \varepsilon(x)$$

حيث $\varepsilon(x)$ هو لامتناه في الصفر عندما $x \to 0$.

[إن هذا النشر لـ $\frac{f(x)}{g(x)}$ صحيح من أجل كل قيمة لـ x في جوار ما للمبدأ لا تنعدم فيه الدالة $g(x)$] .

أمثلة : أ) أوجد نشراً للدالة $f(x) = tg\, x$ في جوار المبدأ من المرتبة الخامسة ؟ لدينـــا :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + x^5 \cdot \varepsilon_1(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{24} + x^5 \cdot \varepsilon_2(x)$$

واذا قسمنا $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ على الحدودية

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

وفق القوى المتزايدة لـ x نحصل على خارج القسمة حتى الدرجة الخامسة

وهو : $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5$

إذن : $tg\, x = x + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15} x^5 + x^5 \cdot \varepsilon(x)$

٢) أوجد نشراً منتهياً للدالة $\sin^2 x$ في جوار المبدأ حتى المرتبة السادسة .

بالحقيقة ، نعلم أن :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \cdot \varepsilon_1(x)$$

ومنه نجد :

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + x^6 \cdot \varepsilon(x)$$

طريقة ثانية للحل : يمكننا أن نكتب :

$$\sin x = x\left[1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \cdot \varepsilon_1(x)\right] = x(1+u)$$

ومنه نجد :

$$\sin^2 x = x^2(1+u)^2 = x^2(1+2u+u^2)$$

$$= x^2\left[1 + 2\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \cdot \varepsilon_1(x)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \cdot \varepsilon_1(x)\right)^2\right]$$

$$= x^2\left[1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{x^4}{60} + \frac{x^4}{36} + x^4 \cdot \varepsilon(x)\right]$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + x^6 \cdot \varepsilon(x)$$

٣) لإيجاد نشر منته من المرتبة الثالثة للدالة $f(x) = \sqrt{tg\, x}$ في جوار النقطة $\frac{\pi}{4}$ نتبع الطريقة التالية :

لنضع $x = \frac{\pi}{4} + t$ فنجد أن :

$$y=\sqrt{tg\,x}=\sqrt{\frac{1+tg\,t}{1-tg\,t}}=\sqrt{\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}}$$

ثم لنأخذ نشراً للدالتين $\sin t+\cos t$ و $\cos t-\sin t$

بجوار $t=0$ من المرتبة الثالثة فنجـد أن :

$$\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}=\frac{1+t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+t^3\cdot\varepsilon_1(t)}{1-t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+t^3\cdot\varepsilon_2(t)}$$

$$=1+2t+2t^2+\frac{8}{3}t^3+t^3\cdot\varepsilon_3(t)$$

ثم بفرض $u=2t+2t^2+\frac{8}{3}t^3+t^3\cdot\varepsilon_3(t)$

نجـد :

$$y=(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{u}{2}-\frac{1}{2\cdot4}u^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}u^3+u^3\cdot\lambda(u)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(2t+2t^2+\frac{8}{3}t^3\right)+$$

$$-\frac{1}{8}\left(4t^2+8t^3\right)+\frac{1}{16}\cdot8t^3+t^3\cdot\varepsilon_4(t)$$

$$=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{5}{6}t^3+t^3\cdot\varepsilon_4(t)$$

إذن : $f(x)=\sqrt{tg\,x}=1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+$

$$+\frac{5}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\cdot\varepsilon(x)$$

٤) إن الدالة $y=\ln\sin x$ لاتقبل النشر بجوار المبدأ. ولكـن

من أجل كل $x\in\,]0,\pi[$ يكون :

$$y=\ln\sin x=\ln\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\cdot\varepsilon_1(x)\right)$$

$$= \ln x + \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \cdot \varepsilon_1(x)\right)$$

$$= \ln x + \ln(1 + u)$$

حيث : $u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \cdot \varepsilon_1(x)$

ولكننا نعلم سابقاً أن :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2 \cdot \lambda(u)$$

$$= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{36} + x^4 \cdot \varepsilon(x)$$

$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + x^4 \cdot \varepsilon(x)$$

اذن : $\ln \sin x = \ln x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + x^4 \cdot \varepsilon(x)$

٤) ليكن $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \cdot \varepsilon_1(x)$

حيث $a_0 \neq 0$ و $\varepsilon_1(x)$ هو لامتناه في

الصغر عندما $x \to 0$. لايمكننا أن نلجأ الى العبارة :

$$e^f = 1 + \frac{f}{1!} + \frac{f^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n}{n!} + f^n \cdot \lambda(f)$$

لأنّ الدوال f و f^2 و ... و f^n ليست لامتناهية في الصغر

عندما $x \to 0$. ولذلك فإننا نكتب $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = a_0 + u(x)$$

حيث $u(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \cdot \varepsilon_1(x)$

ويكـــــــون :

$$e^{f(x)} = e^{a_0} \cdot e^{u} = e^{a_0}\left(1 + \frac{u}{1!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + u^n \cdot \lambda(u)\right)$$

وهكذا نجد نشـــراً منتهياً (محدوداً)

لـ $e^{f(x)}$ من الشكل :

$$e^{f(x)} = e^{a_0} + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

حيث $\varepsilon(x)$ هو لامتناه في الصغر عندما $0 \longrightarrow x$.

تطبيق : أوجد نشراً محدوداً من المرتبة الثانية للدالة :

$$f(x) = \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x$$

وفق القوى المتزايدة للدالة $\frac{1}{x}$ اللامتناهي في الصغر عندما $\infty \longrightarrow x$.

الحل : لنضع $z = \frac{1}{x}$ فنجد مايلـــي :

$$y = f(x) = (1+tz)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{z} \cdot \ln(1+tz)}$$

$$\ln(1+tz) = tz - \frac{1}{2}(tz)^2 + \frac{1}{3}(tz)^3 + z^3 \varepsilon_1(z)$$

$$\frac{1}{z} \cdot \ln(1+tz) = t - \frac{t^2}{2} z + \frac{t^3}{3} z^2 + z^2 \cdot \varepsilon_1(z) =$$

$$= t + u$$

$$f(x) = e^{t} \cdot e^{u} = e^{t} \cdot \left[1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2 \cdot \lambda(u)\right]$$

$$= e^{t}\left[1 - \frac{t^2}{2} z + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{t^4}{4}\right) z^2 + z^2 \cdot \varepsilon'(z)\right]$$

$$= e^{t}\left[1 - \frac{t^2}{2} z + \frac{8t^3 + 3t^4}{24} z^2 + z^2 \cdot \varepsilon'(z)\right]$$

اذن :
$$e^{t}\left[1-\frac{t^{2}}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{8t^{3}+3t^{4}}{24}\left(\frac{1}{x}\right)^{2}+\left(\frac{1}{x}\right)^{2}\cdot\varepsilon(x)\right]=f(x)$$

حيث $\varepsilon(x)$ هو لامتناه في الصغر عندما $x \to \infty$.

ب ـ النشر غير المحدود : إذا جعلنا في دستور تايلور ودستور ماك لوران ، n تسعى إلى ∞ فإننا نحصل على دستورين — نسميهما بدستوري النشر غير المحدود الأول حول x_0 [أو بجوار x_0 أو بحسب قوى $(x - x_0)$] والثاني حول الصفر [أو بجوار الصفر أو بحسب قوى x] . وتجدر الاشارة ، إلى أن الطرفين الأيمنين في الدستورين ، اللذين حصلنا عليهما يسميان حينئذ بمتسلسلة تايلور ومتسلسلة ماك لوران (على الترتيب) .
ويكون $f(x)$ مساوياً لمجموع متسلسلة تايلور أو متسلسلة ماك لوران ضمن فترة تقارب المتسلسلتين الموجودتين في الطرف الأيمن لكل منهما .

وبناء على هذا يكـــــــون :
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n}+\cdots\cdots$$

وهي متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ بجوار النقطة x_0 .
$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\cdots$$

وهي متسلسلة ماك لوران للدالة $f(x)$ بجوار الصفر .

حـ ـ منشورات بعض الدوال الشـــــهيرة :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n(\ln a)^n}{n!} + \cdots$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \cdots$$

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{p!}x^p + \cdots$$

حيث m عدد جبري قد يكون صحيحاً أو كســـرياً .

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n + \cdots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n - \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n + \cdots$$

تمارين

١ ـ لماذا لا يمكننا أن نقول عن الطرف الأيمن للصيغة (١٠) إنه حدودية من الدرجة ($n+1$) ، وذلك إذا لم تكن الدالة $f(x)$ حدودية .

الجواب : لأنّ المعامل $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ للحد الأخير ليس كمية ثابتة بل يتغير بتغير x .

٢ ـ انشر الحدودية $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ بحسب قوى ($x+1$) ، وذلك باستخدام

دستور تايلـــــور .

الجواب :

$$f(x)=-9+22(x+1)+4(x+1)^2-6(x+1)^3+2(x+1)^4$$

٣ ـ انشر ، باستخدام دستور تايلور، الدالة $f(x)=x^6$ بحسب قوى $(x+2)$.

الجواب : $x^6=64-192(x+2)+240(x+2)^2-160(x+2)^3+$

$$+60(x+2)^4-12(x+2)^5+2(x+2)^6$$

٤ ـ أوجد الخطأ المرتكب عندما نضـــع :

$$e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}$$

على الفترة $[0,1]$.

الجواب : $0{,}0002$.

٥ ـ احسب ، باستخدام دستور تايلور ، المقدار $\cos 62^\circ$ وذلك بأربعة مراتب عشـــرية صحيحة .

الجواب : $\cos 62^\circ \approx 0{,}4695$

٦ ـ انشر (بجوار الصفر) الدالة $y=\sqrt{1+\sin x}$ [حســب متسلسلة ماك لوران]

الجواب :

$$y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 . 2!} - \frac{x^3}{2^3 . 3!} + \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{2^{2p} . (2p)!} + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2^{2p+1}(2p+1)!} + \cdots$$

٧ – انشر (بجوار الصفر) الدالة $y = \sin^2 x$ [حسب متسلسلة ماك لوران] .

الجواب :

$$y = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{2^{2p-1} . x^{2p}}{(2p)!} + \cdots$$

٨ – برهن أن الدوال الآتية غير قابلة للنشر بجوار الصفر :

$$\ln x \quad , \quad \operatorname{cosec} x \quad , \quad x^{3/2}$$

الجواب : إن الدالتين $\ln x$ و $\operatorname{cosec} x$ غير معرفتين من أجل $x=0$ ، وإن الدالة $x^{3/2}$ معرفة ولكن مشتقاتها ، اعتباراً من المشتق – الثاني ، غير معرفة من أجل $x = 0$.

٩ – انشر الدالة $\ln x$ بجوار العدد 2 .

[حسب متسلسلة تايلور] .

الجواب :
$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} - \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{(n-1)!(x-2)^n}{2^n . n!} + \cdots$$

١٠ – انشر الدالة $P(x) = (1+x)^n$ بحسب قوى x .

١١ – أوجد نشراً منتهياً (محدوداً) من المرتبة الرابعة للدالة $f(x) = \ln \cos x$ في جوار المبدأ .

الجواب :
$$\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + x^4 . \varepsilon(x)$$

١٢ ـ أثبت أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ يكـــون :

$$\cot g x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3 \cdot \varepsilon(x)$$

١٣ ـ أوجد نشراً محدوداً (منتهياً) من المرتبة الثالثة للدالة $e^{x-\sin x}$ في جوار المـــبدأ .

الجواب : $e^{x-\sin x} = 1 + \frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \varepsilon(x)$

١٤ ـ أوجد نشراً محدوداً (منتهياً) من المرتبة الرابعة في المبدأ لكل من الدوال التاليـــــــة :

آ) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$

الجواب : $y = a + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{24a^3} + x^4 \cdot \varepsilon(x)$

ب) $y = e^x \cdot \sin x$

الجواب : $y = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^4 \cdot \varepsilon(x)$

حـ) $y = \sqrt{\cos x}$

الجواب : $y = 1 - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{96} x^4 + x^4 \cdot \varepsilon(x)$

١٥ ـ أوجد بواسطة النشـــــــر :

آ) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{2 \sin x}$. الجواب : $\frac{1}{2}$

ب) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{e^x - 1}{x}$

الجواب : 1 عندما $x \to +\infty$ ، 0 عندما $x \to -\infty$

حـ) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{e^x - 1}{x}$ الجواب : $\frac{1}{2}$

الفصل السابع

تطبيقات في رسم المنحنيات والبحث عن القيم القصوى

٧ ـ ١ ـ شروط تزايد وتناقص الدوال :

مبرهنة (١) : لنفرض أننا عرفنا على الفترة [ط، a] دالة مستمرة $f(x)$ لها مشتق (محدود) على الفترة]ط، a[(أي : قابلة للاشتقاق على هذه الفترة المفتوحة) . عند ئذ :

أ) لكي تكون الدالة $f(x)$ ثابتة ، أي $f(x) = const.$ ، على الفترة [ط، a] يلزم ويكفي أن يكون $f'(x) = 0$ من أجل جميع قيم x من الفترة]ط، a[.

ب) لكي تكون الدالة $f(x)$ غير متناقصة (غير متزايدة) على الفترة [a، ط] يلزم ويكفي أن يكون $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) من أجل جميع قيم x من الفترة]ط، a[.

ج) لكي تكون الدالة $f(x)$ متزايدة (متناقصة) على الفترة [a، ط] يكفي أن يتحقق الشرط $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) من أجل جميع قيم x من الفترة]ط، a[.

الاثبات : أ) ان لزوم الشرط واضح لأنّ مشتق الدالة الثابتة يساوي الصفر. وسنبرهن الآن كفاية الشرط : من شروط النص نجد أن الدالة $f(x)$ تحقق جميع شروط مبرهنة لاغرانج . ومنه

يمكننا كتابة دستور التزايدات المحدودة ، وذلك على الفترة $[a, x]$ ، حيث x هي أية نقطة من الفترة $[a, b]$:

$$f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x - a) \quad , \quad (a < c < x)$$

ولما كان $f'(c) = 0$ [فرضاً] فإننا نجد أن :

$f(x) = f(a)$ من أجل كل x من الفترة $[a, b]$ وبهذا يتم اثبات الطلب الأول .

٢) سنبرهن صحة هذا الطلب من أجل الدالة غير المتناقصة ، ويتم برهان صحته من أجل الدالة غير المتزايدة بطريقة مماثلة .

لزوم الشرط : لنفرض أن الدالة $f(x)$ غير متناقصة . عندئذ تتحقق المتباينة $f(x) \geq f(x_0)$ من أجل أية نقطتين x و x_0 محققتين للشرط $a < x_0 < x < b$. ومنه يكون : $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. وبأخذ نهاية الطرفين عندما $x \to x_0$ نجد : $f'(x_0) \geq 0$.

ولما كانت x_0 نقطة اختيارية من $]a, b[$ فإن لزوم الشروط يكون قد تم اثباته .

كفاية الشرط : لنفرض أن $f'(x) \geq 0$ من أجل كل x من الفترة $]a, b[$. ولنستعمل دستور التزايدات المحدودة على الفترة $[x', x'']$ المختارة بشكل كيفي من الفترة $[a, b]$:

$f(x'')-f(x')=f'(C)\,(x''-x')$ و $(x'<C<x'')$

وبما أن $f'(C)\geqslant 0$ و $x''>x'$ فإننا نستنتج أن

$f(x'')\geqslant f(x')$ وهذا يعني أن الدالة $f(x)$ غير متناقصة .

٣) لنفرض أن $f'(x)>0$ من أجل كل x من الفترة $]a,b[$.

ولنأخذ نقطتين اختياريتين x_1 و x_2 من $[a,b]$ بحيث يكون :

$x_1<x_2$. ولنستعمل دستور التزايدات المحدودة من أجل

الدالة $f(x)$ على الفترة $[x_1,x_2]$ فنجد :

$f(x_2)-f(x_1)=f'(C)\,(x_2-x_1)$ و $(x_1<C<x_2)$

وبما أن $f'(C)>0$ و $x_2>x_1$ فإنّ $f(x_2)-f(x_1)>0$ وبالتالي

$f(x_2)>f(x_1)$. وهذا يعني أن الدالة $f(x)$ متزايدة على

$[a,b]$. أما الحالة التي يكون فيها $f'(x)<0$ من أجل كل

x من $]a,b[$ فتدرس بصورة مماثلة . وبهذا يتم اثبات صحة

المبرهنة .

ملاحظة : لنأخذ الدالة $y=x^3$ فنجد أنها متزايدة على $\mathbb{R}$ لأن

$x_1^3<x_2^3$ عندما $x_1<x_2$. ونجد أن مشتقها هو $y'=3x^2$ الذي

ينعدم عندما $x=0$. ومنه فالشرط $f'(x)>0$ (أو $f'(x)<0$)

ليس شرطاً لازماً كي تكون الدالة متزايدة (أو متناقصة) .

ملاحظة أخرى : إذا كان $f'(x_0)>0$ (أو $f'(x_0)<0$)

في نقطة معينة x_0 ، فإنه لايمكننا استنتاج أن $f(x)$ مطردة في جوار للنقطة x_0 حتى ولو كان هذا الجوار صغيراً .

مثال : لنأخذ الدالـــة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x = 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

فنجد أن مشتقتها في كل نقطة مغايرة للصفر x هو :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

أما $f'(0)$ فيتم الحصول عليه كما يلـــي :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2} + x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + x\sin\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

ومنه : $f'(0) > 0$

إلّا أن الدالة $f(x)$ ليست مطردة في أي جوار للصفـــر :

بالحقيقة ، إذا أخذنا النقاط : $x_k = \frac{1}{2k\pi} \quad (k = \mp 1, \mp 2, \ldots)$

فإننا نجد : $f'(x_k) = f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \frac{1}{2} - \cos 2k\pi = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$

أما إذا أخذنا النقاط :

$x'_k = \frac{1}{(2k+1)\pi} \quad (k = \mp 1, \mp 2, \ldots)$ فإننا نجـــد :

$$f'(x'_k) = f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = \frac{1}{2} - \cos(2k+1)\pi = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} > 0 .$$

وتكون النقاط المختارة x_k و x'_k

تقع في أيّ جوار للصفر ، لأنّ $x_k \longrightarrow 0$ و $x'_k \longrightarrow 0$ عندما $k \longrightarrow \infty$.

ومنه فالمشتق يغير اشارته في أى جوار للصفر ، وهذا يبرهن ماأردناه [لاحظ أن الدالة $f'(x)$ منقطعة في النقطة $x=0$] .

تمرين محلول (١) : عين الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x)=3x^2-2x$ متزايدة أو متناقصة .

الحل : نلاحظ أن $f'(x)=6x-2$. ومن المتباينتين $6x-2>0$ ، $6x-2<0$ ، نستنتج أن الدالة $f(x)$ تكون متزايدة على الفترة $]\frac{1}{3}, +\infty[$ ومتناقصة على الفترة $]-\infty, \frac{1}{3}[$.

تمرين محلول (٢) : عين فترات تزايد أو تناقص الدالة $y=e^x+5x$.

الحل : نلاحظ أن $y'=e^x+5$. ولما كان $e^x>0$ من أجل جميع قيم x فإن $y'>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$. ومنه فالدالة المعطاة تكون متزايدة على $\mathbb{R}$.

٧ ـ ٢ ـ القيم القصوى للدالـــة :

تعاريف : لتكن لدينا الدالة $f(x)$ ، المعطاة على فترة معينة I .

نقول إن لهذه الدالة قيمة عظمى (نسبية) في نقطة داخلية x_0 من هذه الفترة I ، إذا وجد جوار $]x_0-\delta , x_0+\delta[$ للنقطة x_0 بحيث يكون $f(x)<f(x_0)$ من أجل جميع قيم x من هذا الجوار [ماعدا x_0] . ونقول إن لهذه الدالة قيمة صغرى (نسبية) في x_0 إذا وجد جوار $]x_0-\delta , x_0+\delta[$

للنقطة x_0 بحيث يكون $f(x) > f(x_0)$ من أجل جميع قيم x من هذا الجوار [ماعدا x_0] .

واذا أخذنا القيمة x_0 بعين الاعتبار فإن المتباينة الاولى تأخذ الشكل $f(x) \leqslant f(x_0)$ من أجل جميع قيم x من الجوار $]x_0-\delta, x_0+\delta[$

أما المتباينة الثانية فتأخذ الشكل $f(x) \geqslant f(x_0)$ من أجل جميع قيم x من الجوار $]x_0-\delta, x_0+\delta[$. ومنه يمكننا أن نقول بأن القيمة $f(x_0)$ في الحالة الأولى هي القيمة الأعظمية للدالة $f(x)$ على الجوار $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ وبأن القيمة $f(x_0)$ في الحالة الثانية هي القيمة الأصغرية للدالة $f(x)$ على الجوار $]x_0-\delta, x_0+\delta[$. وتدعى القيم العظمى (النسبية) والقيم الصغرى (النسبية) للدالة بالقيم القصوى لهذه الدالة . لتكن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $[a, b]$. ولنفرض أن لهذه الدالة قيمة قصوى [عظمى أو صغرى (نسبية)] في النقطة x_0 من هذه الفترة . عندئذ يوجد جوار $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ بحيث تكون عليه القيمة $f(x_0)$ هي الأعظمية (العظمى) أو الأصغرية (الصغرى).

ومنه، بحسب مبرهنة فيرما ، يجب أن يكون $f'(x_0) = 0$ اذا كان يوجد مشتق (محدود) في النقطة x_0 . ومنه نحصل على النص التالي :

إن الشرط اللازم لوجود قيم قصوى في نقاط يكون فيها المشتق موجوداً ومحدوداً هو انعدام المشتق في هذه النقاط.

(وتغير الإشارة) إلى أن هذا الشرط ليس كافياً من أجل وجود قيمة قصوى . فمثلاً للدالة $f(x) = x^3$ يوجد مشتق محدود $f'(x) = 3x^2$.

وينعدم هذا المشتق من أجل $x = 0$. إلّا أنه لا توجد قيمة قصوى في هذه النقطة (تأكد من ذلك) .

وللبحث عن القيم القصوى للدالة $f(x)$ نشتق هذه الدالة ونوجد جذور المعادلة $f'(x) = 0$ ثم نعمل ما يلي :

لنرمز بـ M لمجموعة جميع الجذور الحقيقية لهذه المعادلة وجميع النقاط التي يكون فيها المشتق غير محدود وجميع النقاط التي لا يوجد فيها المشتق . ولتكن $x_0 \in M$. ولنفرض أنه يوجد مشتق محدود في جوار معين $]x_0 - \delta , x_0 + \delta[$ لهذه النقطة ، ماعدا (ربما) في النقطة x_0 نفسها . ولنفرض أن لهذا المشتق اشارتين ثابتتين على $]x_0 - \delta , x_0[$ و $]x_0 , x_0 + \delta[$. عندئذ نميّز بين عدة احتمالات :

أ) $f'(x) > 0$ عندما $x < x_0$ و $f'(x) < 0$ عندما $x > x_0$:

ضمن هذه الشروط نستنتج ، بحسب المبرهنة (١) في ٧ – ١ ، أن الدالة $f(x)$ تكون متزايدة على يسار x_0 ، ومتناقصة على يمين x_0 . وعندئذ تكون $f(x_0)$ القيمة الأعظمية للدالة

على الجوار المدروس ، وهذا يعني أن للدالة $f(x)$ قيمة قصوى (عظمى) في النقطة x_0 .

٢) $f'(x)<0$ عندما $x<x_0$ و $f'(x)>0$ عندما $x>x_0$:

ضمن هذه الشروط نستنتج أن الدالة $f(x)$ تكون متناقصة على يسار x_0 ، ومتزايدة على يمين x_0 ، وعندئذ تكون $f(x_0)$ القيمة الأصغرية للدالة على الجوار المدروس ، وهذا يعني أن للدالة $f(x)$ قيمة قصوى (صغرى) في النقطة x_0 .

٣) $f'(x)>0$ عندما $x<x_0$ و $f'(x)>0$ عندما $x>x_0$ ؛

أو : $f'(x)<0$ عندما $x<x_0$ و $f'(x)<0$ عندما $x>x_0$:

ضمن هذه الشروط نستنتج أن الدالة $f(x)$ إما أن تكون متزايدة على الجوار أو متناقصة عليه . ومنه ، توجد ، في أيّ جوار للنقطة x_0 ، قيم للدالة أكبر من $f(x_0)$ وقيم أصغر من $f(x_0)$ ، وهذا يعني أنه لا توجد في النقطة x_0 لهذه الدالة أية قيمة عظمى نسبية ولا توجد أيّة قيمة صغرى نسبية ؛ أيْ لا توجد قيمة قصوى في النقطة x_0 لهذه الدالة .

اذن فالشرط الكافي لوجود قيمة قصوى للدالة في النقطة x_0 هو أن يغير مشتق هذه الدالة اشارته حين المرور عبر النقطة x_0 . فإذا تغيرت الاشارة من سالبة إلى موجبة حصلنا على قيمة صغرى ، وإذا

تغيرت الاشارة من موجبة الى سالبة حصلنا على قيمة عظمى •

مثال (١) : ابحث عن القيمة القصوى للدالة :

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \ .$$

الحل : نلاحظ أن : $y' = x^2 - 5x + 6$ وأن :

$y' = 0$ عندما وفقط عندما $x = 2$ أو $x = 3$.

ومنه نحصل على الجدول التالـــــي :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه ينتج أن للدالة المفروضة قيمة أعظمية في النقطة $x = 2$ وقيمة أصغرية في النقطة $x = 3$.

مثال (٢) : ابحث عن القيم القصوى للدالة $y = (x-2)^2 (x+1)^3$.

الحل : نلاحظ أن : $y' = 5(x-2)(x+1)^2 \left(x - \frac{4}{5}\right)$

ونلاحظ أن : $\left[y' = 0 \right.$ عندما وفقط عندما $x = 2$ أ و $x = -1$ أو $\left. x = \frac{4}{5} \right]$. ومنه نحصل على الجدول التا لي :

.../...

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{5}$		2		$+\infty$
$(x-2)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\frac{4}{5}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه ينتج أنه لا توجد قيم قصوى للدالة y في النقطة $x=-1$ ، وينتج أنه توجد قيمة أعظمية في النقطة $x=\frac{4}{5}$ وأصغرية في النقطة $x=2$.

مثال (٣) : ابحث عن القيم القصوى للدالة $y=x^{\frac{2}{3}}$.

الحل : نلاحظ أن المشتق $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ لا ينعدم من أجل أية قيمة لـ x من $\mathbb{R}$. كما ونلاحظ أن هذا المشتق غير موجود في النقطة $x=0$. ولكن $y'<0$ عندما $x<0$ ، وكذلك $y'>0$ عندما $x>0$. ومنه فللدالة قيمة أصغرية $y=0$ في النقطة $x=0$

<u>طريقة ثانية للبحث عن القيم القصوى للدالة $f(x)$:</u>

لتكن $x_0 \in M$ ، حيث M هي مجموعة جميع الجذور الحقيقية للمعادلة $f'(x)=0$. ولنفرض وجود المشتق الثاني $f''(x_0)$ في هذه النقطة بحيث $f''(x_0)\neq 0$. عندئذ يمكننا أن نكتب :

.../...

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} .$$

وبالاستفادة من المبرهنة (١) في ٢ ــ ٥ يمكننا أن نقول بأن اشارة الكمية $\frac{f'(x)}{x-x_0}$ هي اشارة $f''(x_0)$ نفسها ، وذلك من أجل قيم x القريبة بقدر كاف من x_0. وهنا نميز بين حالتين :

الحالة الأولى : $f''(x_0) > 0$: ضمن هذا الشرط نستنتج أن :

$\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0$ من أجل قيم x القريبة بقدر كاف من x_0. ومنه ، فللكميتين $f'(x)$ و $x-x_0$ الاشارة نفسها . فإذا كان $x < x_0$ فإن $f'(x) < 0$ ، وإذا كان $x > x_0$ فإن $f'(x) > 0$. وهذا يعني أن المشتق يغير اشارته حين المرور عبر النقطة x_0 من سالب الى موجب ، وبالتالي توجد قيمة قصوى للدالة ، وهذه القيمة هي قيمة صغرى .

الحالة الثانية : $f''(x_0) < 0$: ضمن هذا الشرط نستنتج أن :

$\frac{f'(x)}{x-x_0} < 0$ من أجل قيم x القريبة بقدر كاف من x_0 .

ومنه فللكميتين $f'(x)$ و $x - x_0$ اشارتان مختلفتان . فاذا كان $x<x_0$ فإنّ $f'(x) > 0$ ، واذا كان $x>x_0$ فإنّ $f'(x)<0$. وهذا يعني أن المشتق يغير اشارته حين المرور عبر النقطة x_0 من موجب الى سالب ، وبالتالي توجد قيمة قصوى للدالة ، وهذه القيمة هي قيمة عظمى .

مثال (٤) : ابحث عن القيم القصوى للدالة المذكورة في المثال (١)، وذلك باستخدام الطريقة الثانية للبحث عن القيم القصوى •

الحل : لدينا $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$. ومنه :

$y' = x^2 - 5x + 6$، وبالتالي : [$y' = 0$ عندما وفقط عندما $x = 2$ أو $x = 3$] •

ونلاحظ أيضاً أنّ : $f''(x) = y'' = 2x - 5$ • وبما أن :

$f''(2) = 2 \cdot 2 - 5 < 0$ فإنّ للدالة y قيمة أعظمية في النقطة $x = 2$ • ولما كان $f''(3) = 2 \cdot 3 - 5 > 0$ فإنّ للدالة y قيمة أصغرية في النقطة $x = 3$ •

مثال (٥) : أوجد قيم p و q التي تجعل للحدودية : $f(x) = x^2 + px + q$ قيمة أصغرية مساوية لـ 5 في النقطة $x = 3$.

الحل : نلاحظ أن $f'(x) = 2x + p$ وأن المساواة $f'(3) = 0$ تعطينا $6 + p = 0$ وبالتالي $p = -6$ •

وبما أن $f(3) = 5$ فإننا نجد $3^2 - 6 \cdot 3 + q = 5$ وبالتالي $q = 14$ •

قاعدة : للحصول على القيم العظمى والصغرى للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ يجب :

١) إيجاد المجموعة M (المذكورة في القسم النظرى الخاص بالبحث

عن القيم القصوى) ، التي تتألف من جميع القيم الحقيقية لـ x التي تعدم المشتق ، ومن جميع النقاط التي لا تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق .

٢ً) ايجاد قيم الدالة في جميع نقاط المجموعة M ، وايجاد القيمتين $f(a)$ و $f(b)$ من أجل طرفي الفترة المدروسة،

٣ً) اختيار القيم الأعظمية والأصغرية من بين القيم التي حصلنا عليها .

مثال : أوجد القيم الأعظمية والأصغرية للدالة $y = x^4 - 2x + 5$ ، المعطاة على الفترة $[-2, 2]$.

الحل : نلاحظ أن $y' = 4x^3 - 4x$. ومنه : $\left[y' = 0\right]$ عندما وفقط عندما $x = 0$ أو $x = 1$ أو $\left[x = -1\right]$. ومنه $M = \{0, 1, -1\}$. ولكن : $f(0) = 5$ و $f(1) = 4$ و $f(-1) = 4$ و $f(-2) = 13$ و $f(2) = 13$. ومنه فالقيمة $y = 13$ تكون أعظمية على الفترة المدروسة والقيمة $y = 4$ تكون أصغرية على الفترة المدروسة .

تمارين

١ ـ ابحث عن القيم القصوى للدوال الآتية على الفترات المبينة :

١ً) $y = x^2 - 6x + 8$ على $\mathbb{R}$.

الجواب : $x = 3$ [قيمة (نهاية) صغرى] .

٢) $y = x^3 - 12x + 1$ على $\mathbb{R}$.

الجواب : $x = -2$ {قيمة أو نهاية عظمى} و $x = 2$ {قيمة أو نهاية صغرى}

٣) $y = e^{x} + e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

الجواب : $x = 0$ {قيمة أو نهاية صغرى}

٤) $y = |x|$ على الفترة $[-1, 1]$.

الجواب : $y = 1$ (قيمة أعظمية)
$y = 0$ (قيمة أصغرية)

٥) $y = x + 2\sqrt{x}$ على الفترة $[0, 4]$.

الجواب : $y = 8$ (قيمة أعظمية)
$y = 0$ (قيمة أصغرية)

٦) $y = \arcsin x$ على الفترة $]-1, 1[$.

الجواب : لا توجد لهذه الدالة قيم أعظمية أو أصغرية .

٧) $y = \frac{1}{8}(x^4 - 8x^2)$ على $\mathbb{R}$.

الجواب : $x = 2$ (نهاية صغرى)
$x = 0$ (نهاية عظمى)
$x = -2$ (نهاية صغرى)

٨) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5$ على $\mathbb{R}$.

الجواب : $x = -2$ (نهاية صغرى)

٢ — يراد صنع صندوق قاعدته مستطيلة الشكل ومفتوح من الأعلى ،

وذلك بقطع مربعات متساوية من زوايا مستطيل من الكرتون طوله ٨ أقدام وعرضه ٥ أقدام ثم ثني قطعة الكرتون لتكوين جوانب الصندوق • احسب أبعاد وحجم الصندوق في الحالة التي نحصل بها على قيمة عظمى للحجم •

الجواب : حجم الصندوق ١٨ قدماً مكعباً وأبعاده هي ١ قدم ، ٣ أقدام ، ٦ أقدام .

٣ — نقول عن نقطة $(c, f(c))$ إنها نقطة انعطاف لمنحني الدالة $f(x)$ فيما اذا وجدت فترة $]a, b[$ ، حيث $c \in]a, b[$ ، يكون من أجلها منحني الدالة $f(x)$ مقعراً نحو الأعلى على $]a, c[$ ومقعراً نحو الأدنى على $]c, b[$ أو العكس بالعكس ،حيث نقصد بقولنا إن منحني الدالة $f(x)$ مقعر نحو الأعلى على الفترة I المحتواة في مجموعة تعريف الدالة ، اذا كان $f'(x)$ دالة متزايدة على I ،ونقصد بقولنا إن المنحني مقعر نحو الأدنى على الفترة I ، اذا كان $f'(x)$ دالة متناقصة على I . والمطلوب :

أً) يرهن على أنه إذا كانت النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحني الدالة $f(x)$ ، وكان $f''(c)$ موجوداً فإنّ $f''(c) = 0$ •

٢) برهن صحة مايلي : إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة S ، واذا كانت c نقطة داخلية في S بحيث يكـون $f''(c)=0$ أو $f''(c)$ غير موجود ،

و : (1) إذا وجدت فترة $]a,b[$ بحيث $c \in]a,b[\subseteq S$ و $f''(x)>0$ عندما $x \in]a,c[$ و $f''(x)<0$ عندما $x \in]c,b[$ فإنّ $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحني $f(x)$.

(2) اذا وجدت فترة $]a,b[$ بحيث $c \in]a,b[\subseteq S$ و $f''(x)<0$ عندما $x \in]a,c[$ و $f''(x)>0$ عندما $x \in]c,b[$ فإنّ $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحني $f(x)$.

(3) اذا وجدت فترة $]a,b[$ بحيث $c \in]a,b[\subseteq S$ و $f''(x)<0$ عندما $x \in]a,c[$ و $f''(x)<0$ عندمـا $x \in]c,b[$ أو $f''(x)>0$ عندما $x \in]a,c[$ و $f''(x)>0$ عندما $x \in]c,b[$ فإنّ النقطة $(c,f(c))$ لا تمثل نقطة انعطاف لمنحني $f(x)$.

(4) أوجد نقط انعطاف منحني الدالة التاليـــة :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5$$

الجواب : هناك نقطتا انعطاف هما $\left(-1, \frac{7}{4}\right)$ و

$\cdot\left(1 , \frac{23}{4}\right)$

(5) أوجد نقط انعطاف منحني الدالة التالية : $f(x) = x^4$.

الجواب : لا توجـــــد .

٧ — ٣ — رسم المنحنيات :

أ - رسم المنحنيات المستوية المعينة بالمعادلة $y = f(x)$:

لرسم هذه المنحنيات نتبع الخطوط التالية :

١) نبحث عن قيم x التي تجعل y معرفة (معينة).

٢) نبحث عن الفروع اللانهائية والخطوط المقاربة :

يكون للمنحني فرع لانهائي اذا أمكن أن تسعى x نحو — اللانهاية أو y أو كل من x و y معاً .

فإذا كان $y \longrightarrow b$ عندما $x \longrightarrow \infty$ يكون $y = b$ مستقيماً مقارباً للمنحني المفـــروض. واذا كان $y \longrightarrow \infty$ عندما $x \longrightarrow a$ يكون $x = a$ مستقيماً مقارباً للمنحني المفروض .

أما إذا كان $y \longrightarrow \infty$ عندما $x \longrightarrow \infty$ فعندئذ نبحث عـن النهاية التي ينتهي اليها $\frac{y}{x}$ ، فإذا كانت هذه النهاية تساوي ٥ قلنا إن للمنحني فرعاً مكافئاً يوازي ox ، أما اذا كانت تساوي ∞ قلنا إن للمنحني فرعاً مكافئاً يوازي oy ، أما إذا كانت تساوي عدداً محدوداً $m \neq 0$ قلنا إن للمنحني منحى مقارباً ميله m.
نشكل بعد ذلك $y - mx$ فإذا سعى هذا المقدار الى نهايـــة

محدودة h عندما $x \to \infty$ قلنا إن المنحني خطاً مقارباً

مائلاً : $y = mx + h$

أما إذا لم يسع المقدار $y - mx$ نحو نهاية محدودة فعندئذ لا يكون للمنحني خط مقارب .

٣) نحسب y' (مشتق y بالنسبة لـ x) وندرس اشارته ونقط انعدامه إن أمكن .

٤) نضع جدولاً نبين فيه تغيرات الدالة ، وقيمها القصوى إن أمكن .

٥) نبحث أحياناً عن نقط انعطاف الدالة وهي تلك التي توافق قيم x التي من أجلها ينعدم المشتق الثاني y'' دون أن ينعدم من أجل هذه القيم المشتق الثالث y''' . أما اذا انعدم كل من y'' و y''' من أجل هذه القيم فعندئذ نبحث عن $y^{(4)}$ فإذا انعدم $y^{(4)}$ من أجل هذه القيم دون أن ينعدم $y^{(5)}$ ؛ فعندئذ يكون هنالك نقطة انعطاف وإلاّ فلا ... وهكذا .

٦) نرسم الخط البياني للدالة استناداً الى المعلومات التي حصلنا عليها ،

مثال : ارسم المنحني : $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

الحل : ١) مجموعة التعريف : إن هذه الدالة معرفة من أجل جميع قيم x التي تجعل من كل من المقدارين المجذورين غير سالب ، أي :

$$x^2+1 \geq 0 \quad و \quad x^2-1 \geq 0$$

والمتباينة الأولى محققة مهما كانت قيم x ، وأما المتباينة الثانية فلا تكون محققة إلا إذا كانت x خارج الفترة]١+ ،١-[. ولذلك فإن الدالة معرفة من أجل جميع قيم x باستثناء قيم x المحققة للمتباينة $-1 < x < 1$.

٢) الفروع اللانهائية والخطوط المقاربة : لنجعل $x \to \infty$ فنرى أن y تصبح من الشكل $\infty - \infty$ ، ولإزالة عدم التعيين نضرب البسط والمقام بالمزواج فنجد :

$$y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

ومنه نلاحظ أنه عندما $x \to \infty$ فإن $y \to 0$ ولذلك فإن محور السينات $y = 0$ عبارة عن المستقيم المقارب الوحيد .

٣) المشتق :
$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \frac{x\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^4-1}}$$

ومنه نرى أن المشتق ينعدم من أجل $x = 0$ وهي خارج مجموعة التعريف. وكذلك ينعدم من أجل قيم x التي تحقق المعادلة

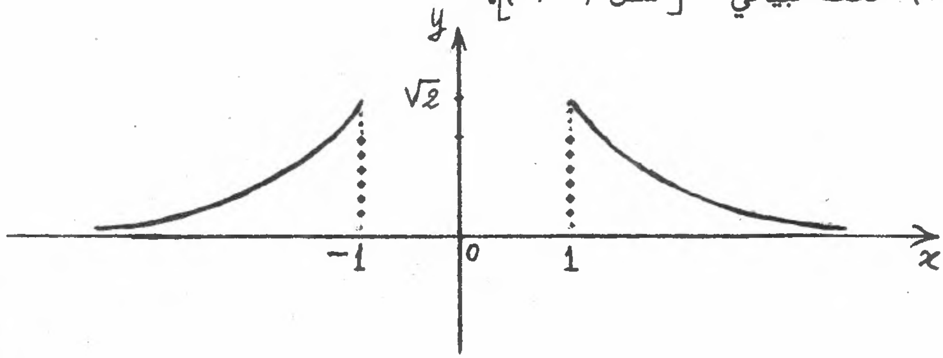
$\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1} = 0$ أي : $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2+1}$ أي :

$x^2 - 1 = x^2 + 1$ وهذه مستحيلة. أي أنه ليس لهذه المعادلة جذور ، ولذلك فإن المشتق لا ينعدم على مجموعة التعريف . إلا أنه يكون $y' > 0$ عندما $x < -1$ و $y' < 0$ عندما $x > 1$.

٤) الجدول :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$		//////		$-$	
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	//////	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

٥) الخط البياني [شكل (١٠)]:



شكل (١٠)

ب ـ رسم المنحنيات المعطاة بالتمثيل الوسيطي ($y = y(t)$ و

$x = x(t)$: نتبع ، في رسم المنحنيات المعطاة بالتمثيل الوسيطي الخطوات التالية :

١) تعين قيم الوسيط t التي من أجلها يكون كل من x و y معرفاً (معينـــــاً) .

٢) ندرس الفروع اللانهائية والخطوط المقاربة وذلك بتعيين القيـــم التي إذا سعى الوسيط إليها سعى x أو y أو كلاهمـــا

نحو اللانهايــــــة :

فإذا كان $x \to a$ و $y \to \infty$ عندما يسعى الوسيط إلى قيمة معينــة، قلنا إن للمنحني مستقيماً مقارباً يوازي محور العينات معادلته : $x = a$.

أما إذا كان $y \to b$ و $x \to \infty$ قلنا إن للمنحني مستقيماً مقارباً يوازي محور السينات معادلته : $y = b$.

أما إذا كان $x \to \infty$ و $y \to \infty$ عندما يسعى الوسيط t إلــى قيمة معينة t_0 نبحث عن نهاية $\frac{y}{x}$ عندما $t \to t_0$ ؛ فإذا كانت هذه النهاية تساوي الصفر قلنا إن للمنحني فرعاً مكافئاً يوازي محور الســينات ، أما إذا كانت هذه النهاية تساوي ∞ قلنا إن للمنحني فرعاً مكافئاً يوازي محور العينات ، أما إذا كانت هذه النهاية تساوي $m \neq 0$ قلنا إن للمنحني منحى مقارباً ، وعندها نبحث عن نهاية المقدار $y - mx$ فإذا كانت هذه النهاية تساوي عدداً محدوداً h قلنا إن للمنحني مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y = mx + h$.

أما إذا لم تكن هنالك نهاية محدودة فعندئذ لا يوجد للمنحني خط مقارب عندمـــا $t \to t_0$.

٣) نحسب مشتق كل من x و y بالنسبة للوسيط t ونعين قيــم الوسيط الموافقة لانعدام كل منهمـــا .

فإذا انعدم x' دون y' من أجل قيمة للوسيط مثل t_1 فعندئذ نجد

للمنحني مماساً موازياً لمحور العينات عند النقطة الموافقة ل t_1 .

أما إذا انعدم y' دون x' من أجل قيمة للوسيط مثل t_2 . فعندئذ نجد للمنحني مماساً موازياً لمحور السينات عند النقطة الموافقة ل t_2 وفي الحالة التي ينعدم فيها x' و y' بآن واحد من أجل قيمة ماللوسيط فعندئذ تكون هذه النقطة شاذة فهي إما نقطة تراجع من النوع الاول  أو من النوع الثاني  وذلك حسبما تكون S فردية أو زوجية في أول جداء خارجي $M^{(S)} \wedge M''$ غير معدوم [$M(x, y)$ و $M'(x', y')$ و $M''(x'', y'')$ و ....]

٤ً) نضع جدولاً نبين فيه نتائج الدراسة السابقة .

٥ً) نرسم الخط البياني الممثل للدالة استناداً إلى المعلومات التي حصلنا عليها .

٦ً) قد يكون من الضروري أحياناً تعيين نقط الانعطاف وذلك بالبحث عن قيم الوسيط مثل t_0 التي من أجلها ينعدم $M' \wedge M''$ دون أن ينعدم $M' \wedge M'''$. أما إذا انعدم $M' \wedge M'''$ فإننا نبحث عن أول جداء خارجي $M' \wedge M^{(S)}$ غير معدوم فإذا كانت S فردية كان هنالك نقطة انعطاف وإلّا فلا .

٧ً) قد يكون من الضروري كذلك تعيين النقط المضاعفة ويتم ذلك

بتعيين t_1 و t_2 اللتين تحققان المعادلتين :

$$x(t_1) = x(t_2) \quad و \quad y(t_1) = y(t_2)$$

مثال : ارسم المنحني : $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ و $x = \frac{3t^3}{1+t^3}$

الحل : ١ً) مجموعة التعريف : إن كلاً من x و y معرف من أجل جميع قيم الوسيط باستثناء $t = -1$.

٢ً) الفروع اللانهائية والخطوط المقاربة : يلاحظ أن $x \to \infty$ عندما $t \to -1$ و إن $y \to \infty$ كذلك عندما $t \to -1$ ، ولا توجد أية قيمة أخرى للوسيط t يسعى فيها x أو y نحو اللانهاية . لنبحث عن نهاية $\frac{y}{x}$ عندما $t \to -1$:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{t} \longrightarrow -1$$

نميل المنحني يساوي -1 ، لذلك نبحث عن نهاية $y + x$ حيث نجد:

$$y + x = \frac{3t^2}{1+t^3} + \frac{3t^3}{1+t^3} = \frac{3t^2}{1-t+t^2} \longrightarrow 1$$

فمعادلة المستقيم المقارب الوحيد هي : $y = -x + 1$

٣ً) المشتقات : $y' = \frac{6t - 3t^4}{(1+t^3)^2}$ و $x' = \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}$

فالمشتق x' ينعدم من أجل $t = 0$ والمشتق y' ينعدم من أجل $t = 0$ ومن أجل $t = \sqrt[3]{2}$.

فمن أجل القيمة $t = \sqrt[3]{2}$ للوسيط ينعدم y' دون أن ينعدم x' ولذلك فهنالك مماس للمنحني يوازي محور السينات عند النقطة

$(2, \sqrt[3]{4})$. أما من أجل القيمة $t=0$ فإنه ينعدم

كل من x' و y' ولذلك فإننا نبحث عن x'' و y'' حيث نجد :

$$x'' = \frac{18t - 36t^4}{(1+t^3)^3} \quad \text{و} \quad y'' = \frac{6 - 42t^3 + 6t^6}{(1+t^3)^3}$$

فمن أجل $t = 0$ نجد $x'' = 0$ و $y'' = 6$ ولذلك فالنقطة الموافقة لـ

$t = 0$ وهي نقطة الأصل عبارة عن نقطة تراجع . لندرس $x''y''' - y''x'''$

وحيث أن $x'' = 0$ من أجل $t = 0$ فلا حاجة لحساب

y''' ونكتفي بحساب x''' :

$$x''' = \frac{18 - 288t^3 + 180t^6}{(1+t^3)^4}$$

فمن أجل $t = 0$ يكون $x''' = 18$ ويكون بالتالي $x''y''' - y''x''' = -108$

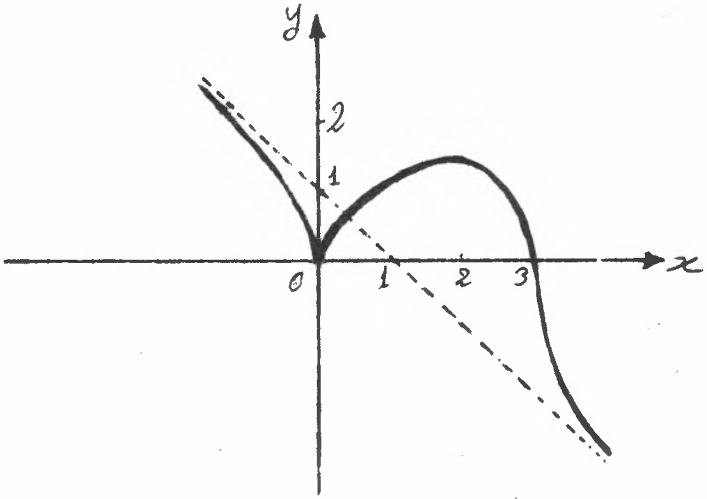
ولذلك فنقطة الأصل تكون نقطة تراجع من النوع الأول . [لاحظ أن

$s = 3$ هو عدد فردي] .

٤) الجدول :

t	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'		$+$	‖	$+$	0	$+$		$+$	
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
x	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	2	↗	3
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\sqrt[4]{3}$	↘	0

٥) الخط البياني [شكل (١١)] :



شكل (١١)

ملاحظة :

يلاحظ أن المنحني يخترق خطة المقارب • ولايجاد نقطة التقاطع نبدل في معادلة الخط المقارب x و y بدلالة t فنجد :

$$\frac{3t^3}{1+t^3}+\frac{3t^2}{1+t^3}=1$$

ومنه نجد : $2t^2+t-1=0$ وحلول هذه المعادلة هي: -1 و $\frac{1}{2}$ ؛
إلا أن الحل الأول مرفوض لأن الدالة غير معرفة
من أجل $t=-1$ ، والحل الثاني هو الذي يعطينا نقطة التقاطع ($\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$) . ويلاحظ أيضاً أن المماس في نقطة التراجع هو محور العينات وذلك لأن المماس يتعين في النقطة الشاذة بمركبات المشتق الثاني M'' ، ولما كان $x''=0$ فإن المماس يكون محور العينات • ويلاحظ أيضاً أن المماس في النقطة (٠ ، 3) حيث يخترق المنحني محور السينات يوازي محور العينات لأن هذه النقطة توافق $t\to\infty$ و $\frac{y'}{x'}\to\infty$ عندما $t\to\infty$ •

وأخيراً ، يبرهن بسهولة أنه لا توجد نقط مضاعفة للمنحني المفروض

[تحقق من ذلــــــك] .

حـ ـ رسم المنحنيات المستوية المعينة بالمعادلة القطبية $r = f(\theta)$:

يمكننا أن نمثل هذا المنحني وسيطياً حيث نجد :

$$x = f(\theta)\cos\theta \quad \text{و} \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

وبذلك نستطيع دراسته كما ندرس المنحنيات الممثلة وسيطياً .

غير أنه من المفيد دراسة المنحني بشكله القطبي مباشرة دون الانتقال إلى الشكل الوسيطي . وتتم هذه الدراسة كالمعتاد بتعيين مجموعة تغير الزاوية القطبية θ التي تجعل r معرفة ، وحساب دور هذه الدالة إذا كانت دورية ثم بدراسة اشارة مشتق r بالنسبة لـ θ ثم بوضع جدول يبيّن تغيرات الدالة r .

ولا بد من دراسة المستقيمات المقاربة ، ويتم ذلك كما يلـــي :

نبحث عن قيم θ التي تجعل r يسعى إلى ∞ . فإذا كانت α إحدى هذه القيم فإننا نبحث عن نهاية المقدار : $r\sin(\theta-\alpha)$ عندما $\theta \to \alpha$. فإنْ سعى هذا المقدار إلى نهاية معينة محدودة d ، فعندئذ تكون معادلة المستقيم المقارب : $r\sin(\theta-\alpha) = d$.

أما إذا سعى المقدار المذكور إلى اللانهاية فإنه لا يوجد مستقيم مقارب لمنحني هذه الدالة . ولدراسة وضع المنحني بالنسبة لمستقيمه

المقارب ندرس اشارة المقدار $d - r\sin(\theta-\alpha)$ بالقرب من $\theta = \alpha$ فإن كان موجباً و $d > 0$ فإن الفرع اللانهائي من المنحني بالنسبة للمستقيم المقارب يقع بجهة مخالفة لوضع القطب بالنسبة لهـــذا المستقيم ، وإن كان المقدار سالباً فالفرع اللانهائي من المنحني والقطـــب يقعان في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم المقارب • أما إذا كان $d < 0$ فيحصل العكـــــــــس •

ملاحظـــة : إذا رمزنا بـ V للزاوية التي يصنعها متجه (شعاع) ، المماس مع نصف القطر المتجهي OM فعندئذ يكـــون :

$$tg\,V = \frac{r}{r'}$$

مثال : ارسم المنحني $r = a\sin 3\theta$

الحل : نلاحظ أن دور المنحني T يحقق الصيغة $3T = 2\pi$ أي: $T = \frac{2\pi}{3}$ ولذلك يكفي أن نرسم المنحني من أجل فترة طولها $\frac{2\pi}{3}$ ثم ندور المنحني حول القطب O زاوية قدرها $\frac{2\pi}{3}$ ثم زاويـــــة قدرها $\frac{2\pi}{3}$ فنحصل على المنحني الكلي • وبما أن المنحني متناظر بالنسبة لمحور العينات حيث $r(-\theta) = -r(\theta)$ فيكفي أن نرسمه من أجل الفترة $[0, \frac{\pi}{3}]$ ثم نأخذ نظيره بالنسبة لمحـــور العينات

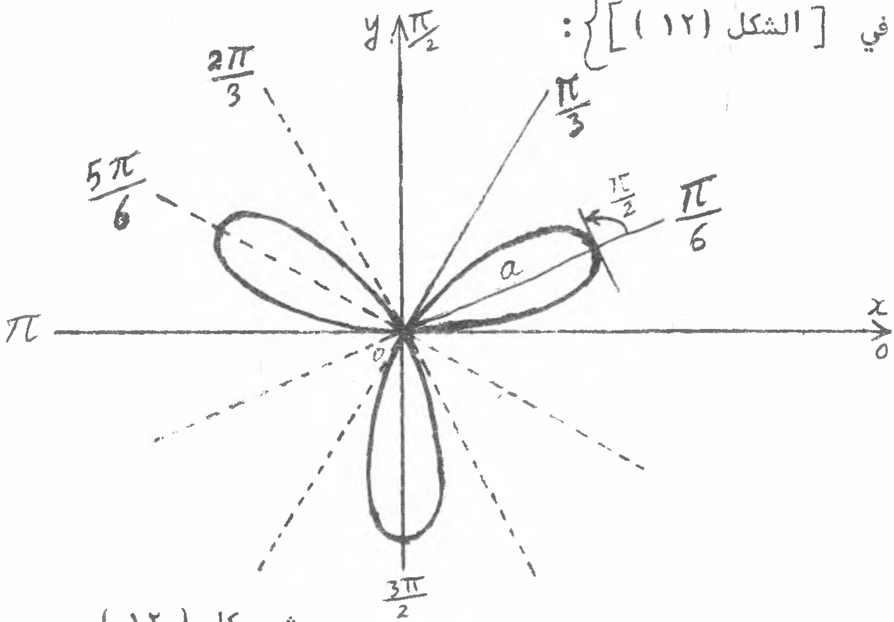
ليس للمنحني مستقيمات مقاربة لأن r يبقى محدوداً •

المشتق : $r' = 3a\cos 3\theta$

الجـــــدول :

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r'	$3a$	$+$	0	$-$	$-3a$
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0

المنحني البيانـــي في [الشكل (١٢)] :



شـــكل (١٢)

المماسات : $tg\,V = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{1}{3}\,tg\,3\theta$

من أجل $\theta = 0$ يكون $V = 0$ ، ومن أجل $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

يكون $V = \dfrac{\pi}{2}$ ، ومن أجل $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ يكون $V = 0$

ملاحظة : إن $r\left(\dfrac{\pi}{6} - \theta\right) = r\left(\dfrac{\pi}{6} + \theta\right)$ ومنـــه

فالمنحني متناظر بالنسبة للمحور $\theta = \frac{\pi}{6}$

تماريـــن

١ ـ ارسم المنحني المعين بالمعادلة المذكورة فيما يلي :

١) $y = \frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 - 8x + 16}$

٢) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

٣) $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$

٤) $y = \frac{\ln x}{x}$

٥) $x = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}$ و $y = \frac{2t^3}{3}$

٦) $y = \frac{t^2}{t-1}$ و $x = \frac{t}{t^2-1}$

٧) $y = 2t - \frac{1}{t^2}$ و $x = 2t + t^2$

٨) $y = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}$ و $x = t + \frac{1}{2t^2}$

٩) $y = a\frac{\sin^2 t}{2 + \sin t}$ و $x = a\cos t$ $(a > 0)$

١٠) $r = a\,tg\frac{\theta}{2}$ $(a > 0)$

١١) $r = \cos\frac{\theta}{3}$

١٢) $r = 2\cos\theta - \cos 2\theta$

١٣) $r = \frac{\sin 3\theta}{\cos\theta}$

١٤) $r = a(1 + \cos\theta)$

١٥) $r = \sin\theta\cos 2\theta$

$$y = \frac{2x^2+x}{x+1} \quad (١٦$$

٢ — عين الخطوط المقاربة للمنحنيين التاليين :

$$x = \frac{t^3+1}{t(t+2)} \quad \text{و} \quad y = \frac{t^2}{t+2} \quad (١$$

$$x = \frac{e^t}{(t+1)^2} \quad \text{و} \quad y = \frac{e^t(t-2)}{t(t^2-1)} \quad (٢$$

٣ — عين نقط تراجع المنحنيين التاليين :

$$x = t^2 , \quad y = t^3 \quad (١$$

الجواب : نقطة الأصل هي نقطة تراجع من النوع الأول .

$$x = t^3 + t^2 \quad \text{و} \quad y = t^4 \quad (٢$$

الجواب : نقطة الأصل هي نقطة تراجع من النوع الثاني .

٤ — ابحث في النقط المضاعفة للمنحني :

$$x = t^2 \quad \text{و} \quad y = t(t^2-1)$$

[ملحــــــق]

الدالة الكثيرة المتغيرات — الدالة الضمنية

١ — المشتق الجزئي : لتكن $f(x,y,z)$ دالة لمتغيرات مستقلة ثلاثة x و y و z وهو معرف ضمن حقل يحوي الأعداد a و b و c . لنتصور الدالة $f(x,b,c)$ للمتغير الوحيد x . فإذا كان لهذه الدالة مشتق من أجل $x = a$ رمزنا لهذا المشتق بأحد الشكلين :

$$f'_x(a,b,c) \quad و \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial x}$$

وسميناه بالمشتق الجزئي للدالة $f(x,y,z)$ بالنسبة لـ x ومن أجل النقطة (a,b,c) • وبالطريقة نفسها يكون المشتقان الجزئيان الآخران هما $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ •

٢ ـ المشتقات الجزئية المتتالية : نعرف بالطريقة ذاتها المشتقات ـ الجزئية للـــــدوال :

$$f'_x(x,y,z) \quad و \quad f'_y(x,y,z) \quad و \quad f'_z(x,y,z)$$

ونرمز لها بالأشــــكال :

$$f''_{x^2}(x,y,z) \quad و \quad f''_{xy}(x,y,z) \quad و \quad f''_{xz}(x,y,z) \quad و \quad \cdots\cdots$$

أو
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad و \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad و \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad و \quad \cdots\cdots$$

ويبرهن أن ترتيب الاشتقاق ، ضمن شروط **معينة** ، لا يغير بقيمـــة المشـــتق ، أي : $f''_{xy} = f''_{yx}$

٣ ـ مشتق دالة مركبة : لتكن الدالة $y = f(u,v,w)$ • حيث u, v, w دوال في x . إن مشتق هذه الدالة بالنسبة لـ x يعطى بالصيغة: $y' = f'_u \cdot u' + f'_v \cdot v' + f'_w \cdot w'$

٤ ـ الدوال الضمنية : لتكن المعادلة $f(x,y) = 0$ التي تربط الدالة y بالمتغير x • نقول إن هذه المعادلة تعـــرف دالة ضمنيـــــة •

٥ _ مشتق الدالة الضمنية : يعطى مشتق الدالة الضمنية المعرفة

بالصيغة $f(x,y)=0$ بالشكل :

$$y' = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} \quad \text{و} \quad f'_x(x,y)+f'_y(x,y)y'=0$$

٦ _ التفاضل الكلي (التام) لدالة كثيرة المتغيرات $f(x,y,z)$:

يعطى التفاضل الكلي لهذه الدالة بالصيغة :

$$df = f'_x(x,y,z)\,dx + f'_y(x,y,z)\,dy + f'_z(x,y,z)\,dz$$

ب) الشرط اللازم والكافي ليكون التركيب التالي

ممثلاً لتفاضل كلي : $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

هو أن يكون :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

٧ _ أمثلة :

١) احسب المشتقين الجزئيين من المرتبة الأولى للدالة :

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$$

الحل : نعلم أن : $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$

ومنه $z = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$

وبالتالي : $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$ و $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$.

٢) احسب مشتق الدالة y المعرفة بالصيغة :

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

الحل : لنرمز للطرف الأيسر من هذه المساواة بـ f وللطرف الأيمن

ب y ولنشتق طرفي هذه المساواة بالنسبة للمتغير المستقل x

فنجد : $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} \cdot y'$

$$\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y y'}{x^2+y^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} + \frac{\frac{y'}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}$$

$$\frac{x + y y'}{x^2+y^2} = \frac{-y + x y'}{x^2+y^2}$$

$$x + y y' = -y + y' x$$

ومنــــه : $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

٣) إذا كان $z = e^{xy^2}$ ، $x = t\cos t$ و $y = t\sin t$.

فاحســـب $\dfrac{dz}{dt}$.

الحل : $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \dfrac{dy}{dt} =$

$$= (y^2 e^{xy^2})(-t\sin t + \cos t) +$$

$$+ (2xy e^{xy^2})(t\cos t + \sin t)$$

٤) إذا كان $z = x^3 - xy + y^3$ ، $x = r\cos\varphi$ و

$y = r\sin\varphi$ فاحسب $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ ، $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$.

الحل : $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial r} =$

$$= (3x^2 - y)\cos\varphi + (3y^2 - x)\sin\varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} =$$

$$= (3x^2 - y)(-r\sin\varphi) + (3y^2 - x)(r\cos\varphi)$$

٥) إذا كان $u = x^2 e^{y/x}$ فاحسب التفاضل الكلي du .

الحل : $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (2x - y)e^{y/x}dx + x e^{y/x}dy$

٦) برهن أن التركيب التالي يمثل تفاضلاً كلياً (تامـــاً) :

$$(3x^2y - 2y^2)\,dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)\,dy = d\phi$$

الحل : نلاحظ أن: $\frac{\partial(3x^2y-2y^2)}{\partial y} = 3x^2 - 4y = \frac{\partial(x^3-4xy+6y^2)}{\partial x}$

وبهذا يتم اثبات المطلوب .

تمارين :

تمرين (١): احسب المشتقات الجزئية من المرتبة الاولى والثانية للدالة ;

$$z = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$$

تمرين (٢) : برهن أن الدالة v في المتغيرات المستقلة الثلاثة x, y, z :

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} :$$

تحقق المعادلة : $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

تمرين (٣) احسب المشتقات الجزئية من المرتبة الاولى للدوال :

أ) $f(x, y) = \frac{x + y}{xy}$

ب) $z = \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

حـ) $z = (x - y)\sin(3x + 2y)$

المصطلحات العلمية

(عربي - انكليزي)

Coordinates	١- الاحداثيات
polar —	— القطبية
rectangular —	— المتعامدة
Test	٢- اختبار
d'Alambert's —	— دالامبير
Weirstrass's —	— فايرشتراس
Cauchy's —	— كوشي
Cauchy's integral —	— كوشي التكاملي
Continuity	٣- استمرار
— of functions	— الدوال
uniform — of functions	الـ — المنتظم
Passage to the limit	٤- الانتقال إلى النهاية
Inflection	٥- انعطاف
Discontinuities	٦- انقطاعات
— of functions	— الدوال
Function	٧- الدالة (التابع)
exponential —	— الأسية
algebraic —	— الجبرية
linear —	— الخطية
even —	— الزوجية
least value of —	أصغر قيمة لـ —
implicit —	— الضمنية
greatest value of —	أعظم قيمة لـ —
inverse —	— المعاكسة
hyperbolic —	— القطعية
logarithmic —	— اللوغاريتمية

increasing —	— المتزايدة
decreasing —	— المتناقصة
trigonometric —	— المثلثية
continuous —	— المستمرة
uniformly continuous —	— المستمرة بانتظام
single-valued —	— وحيدة القيمة
Total differential	٨ — التفاضل الكلي (التام)
Evalution of errors	٩ — تقدير الأخطاء
Equivalence	١٠ — تكافؤ
— of infinitesimals	— اللامتناهيات في الصغر
— of infinitely large magnitudes	— اللامتناهيات في الكبر
Bound	١١ — حد
strict lower —	الـ — الأدنى
strict upper —	الـ — الأعلى
Lagrange form of remainder of Taylor's series	الـ — الباقي في صيغة لاغرانج لمتسلسلة تايلور
Bounds of numerical sets	١٢ — حدود المجموعات العددية
Appoximate evaluation	١٣ — الحساب التقريبي
— by differentials	— بواسطة التفاضل
— by series	— بواسطة المتسلسلات
Asymptote	١٤ — خط مقارب
Error	١٥ — خطأ
absolute —	— مطلق
relative —	— نسبي

Domain	١٦- ساحة (منطقة أو نطاق)
- of definition of function	- تعريف الدالة
closed -	الـ - المغلقة
open -	الـ - المفتوحة
Number	١٧ - عدد
real -	- حقيقي
the - e	الـ - e
complex -	- عقدي
amplitude of - -	زاوية - -
explitude of - -	الشكل الأسي لـ - -
trigonometric form of - -	الشكل المثلثي لـ - -
modulus of - -	طول (طويلة) - -
conjugate - -	- - مرافق
n-dimensional space	١٨- الفضاء ذو n بعداً
Parabola	١٩- قطع مكافئ
Ellipse	٢٠- قطع ناقص
Rules for differentiation of function	٢١- قواعد إيجاد تفاضل دالة
Maxima and Minima	٢٢- القيم العظمى والصغرى
- of functions	- لدالة
- of functions of several variables	- - لعدة متغيرات
absolute -	- المطلقة
conditional -	- النسبية
Absolute value	٢٣- القيمة المطلقة

Infinitesimals	٢٤- اللامتناهيات في الصغر
Infinitely large magnitudes	٢٥- اللامتناهيات في الكبر
Infinity	٢٦- اللانهاية
Natural logarithm	٢٧- اللوغاريتم الطبيعي
Variable	٢٨- متغير
monotonic -	- مطرد
Interval	٢٩- مجال (فترة)
open -	- مفتوح (مفتوحة)
closed -	- مغلق (مغلقة)
Bounded	٣٠- محدود
- below	- من الأسفل (الأدنى)
- above	- من الأعلى
Series	٣١- متسلسلة
Order of infinitesimals	٣٢- مرتبة اللامتناهيات في الصغر
Independent	٣٣- مستقل
Derivative	٣٤- مشتق
- of function in parametric form	- الدالة بالشكل الوسيطي
- of implicit function	- الدالة الضمنية
partial -	الـ - الجزئي
partial - of higher order	الـ - الجزئي من مرتبة أعلى
- of higher order	الـ - من مرتبة أعلى

Equation	٣٥- معادلة
differential	– تفاضلية
algebraic –	– جبرية
– of surface	– سطح
– of curve	– منحنى
Comparison of infinitesimals	٣٦- مقارنة اللامتناهيات في الصغر
Tangent	٣٧- المماس
slope of –	ميل –
Curve	٣٨- منحنى
Slope of straight line	٣٩- ميل خط مستقيم
Point	٤٠- نقطة
– of inflection	– انعطاف
Singular – of curve	– شاذة لمنحنى
isolated –	– منعزلة
Limit	٤١- نهاية
– of a function	– دالة
– of a variable	– متغير

المراجع العلمية

1. Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В. : Курс Математического Анализа.

2. Демидович Б.П. : Сборник задач и упражнений по Математическому анализу.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. : Основы математического анализа.

4. Фихтенгольц Г.М. : Курс дифференциального и интегрального исчисления.

5. Grauert H., Lieb I., Fischer W. : Differential- und integralrechnung.

6. Марон И. А. : Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах функции одной переменной.

7. Натансон И.П. : Краткий Курс высшей математики.

8. Rudin. W. : Principles of mathematical analysis.

9. ٩- سميرنوف ف. ي. : دروس في الرياضيات العالية

10. STEFAN BANACH : RACHUNEK RÓŻNICZKOWY i CAŁKOWY.

11. Taylor H.E., Wade T.L. · University calculus and subsets of the plane.

الفهرس

الصفحة

الصفحة

الفصل الأول: تعاريف ومبرهنات ونصوص المبرهنات فقط

الملاحظة [illegible]

الفصل الثاني والثالث والرابع: المتتاليات والمتسلسلات [illegible] والتوابع [illegible]

هام والذي لم يبرهن النص فقط

جامعة دمشق

مديرية الكتب الجامعية

رقم ٨٥٤

صدر باشراف لجنة الانجاز

سعر المبيع للطالب (٤٥) ل.س