قراءة رافدة في نظرية القياس (أ)

الفصل الأول: مفاهيم أساسية في نظرية القياس

✍ **أولاً:** فيما يلي $\mathbb{X}$ أو Ω مجموعة غير خالية، $\mathcal{P}(\Omega)$ مجموعة أجزائها و $\tau, \mathcal{A}, m \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

① **الحلقة:** τ حلقة $\Leftrightarrow$ $\phi \in \tau$ واتحاد أي عنصرين من τ وكذا فرقهما وتقاطعهما ينتمي إلى τ.

② **الجبر:** $\mathcal{A}$ جبر $\Leftrightarrow$ $\phi \in \mathcal{A}$ واتحاد أي عنصرين من $\mathcal{A}$ وكذا فرقهما وتقاطعهما ينتمي إلى $\mathcal{A}$ والمجموعة الشاملة أيضاً.

③ **الحلقة** $- \boldsymbol{\sigma}$ (**الحلقة التامة**) $\Leftrightarrow$ حلقة تحقق الشرط $-\sigma$: اتحاد أي متتالية من عناصرها ينتمي إليها.

④ **الجبر** $- \boldsymbol{\sigma}$ (**الجبر التام**) $\Leftrightarrow$ جبر يحقق الشرط $-\sigma$ آنف الذكر.

⑤ **الصف المُطَّرِد:** m صف مطَّرد $\Leftrightarrow$ اتحاد أية متتالية متزايدة من عناصره ينتمي إليه، وكذا تقاطع أية متتالية متناقصة من عناصره ينتمي إليه.

✍ **ثانياً: تدريبات**

❶ هل صف المجموعات المنتهية في $\mathbb{R} \equiv \Omega$ حلقة؟ هل هو جبر؟ (هو حلقة وليس جبراً)

❷ هل صف المجموعات المحدودة في $\mathbb{R} \equiv \Omega$ حلقة؟ هل هو جبر؟ (هو حلقة وليس جبراً)

❸ هل صف المجموعات المغلقة في $\mathbb{R} \equiv \Omega$ حلقة؟ هل هو جبر؟ (ليس حلقةً فمن بابٍ أولى لن يكون جبراً)

❹ هل $\{\phi, \Omega\}$ جبر من أجزاء Ω ؟ (نعم)

❺ هل $\mathcal{P}(\Omega)$ جبر من أجزاء Ω ؟ هل هو جبر$-\sigma$ ؟ (نعم)

❻ هل تقاطع أسرة من الجبور$-\sigma$ هو جبر$-\sigma$ ؟ (نعم)

❼ هل صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R} \equiv \Omega$ صف مطَّرد ؟ هل هو جبر ؟ هل هو جبر$-\sigma$ ؟ (لا، لا ، لا)

♦ انظر أمثلة صفحة 14 فهي هامة.

☜ تدريب 1 صفحة 15 (هام وحله صفحة 183)

إذا كان $\mathcal{A}$ جبراً تاماً في $\mathbb{R}$ يحوي صف المجالات نصف المفتوحة $[a,b[$ فإن $\mathcal{A}$ سيحوي أي صف من صفوف المجالات في $\mathbb{R}$.

☜ (**تعريف:** نسمي أصغر جبر تام يحوي صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ جبر بوريل في $\mathbb{R}$).

✍ **ثالثاً:** تعريف ومبرهنة (انظر صفحة 19)

✸ إن أصغر جبر تام يحوي صفاً معطى$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ يسمَّى الجبر التام المولَّد بـ $\mathcal{C}$ أو الجبر التام الذي يولِّده $\mathcal{C}$

✸ إن صف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ يولد جبر بوريل فيها.

✸ إن صف المجالات $]a,\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$ يولد جبر بوريل فيها.

✸ إن صف المجالات $]a,b]$ حيثُ $a \leq b$ يولد جبر بوريل فيها.

✸ إن صف المجالات $[a,b[$ حيثُ $a \leq b$ يولد جبر بوريل فيها.

الفصل الثاني: القياس الموجب

① القياس الموجب على جبر تام $\mathcal{A}$ من أجزاء مجموعة $\mathbb{X}$.

② القياس الخارجي على الجبر التام $\mathcal{P}(\mathbb{X})$.

③ مبرهنة كاراتيودوري (كل قياس خارجي يولد جبراً تاماً m^* ويكونُ مقصوره عليه قياساً تاماً).

✍ **أولاً:** (تعريف القياس) نسمي التطبيق:

$$\begin{aligned} \mu :\ \mathcal{A} &\longrightarrow [0,+\infty] \\ A &\longmapsto \mu(A) \end{aligned}$$

قياساً موجباً على $\mathcal{A}$ إذا تحقق ما يلي:

$$\boxed{1}\ \mu(\phi)=0$$

$$\boxed{2}\ \mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$$

$$\boxed{3}\ if\ \ \underbrace{E_1,E_2,\dots,E_n,\dots}_{\text{متتالية من عناصر } \mathcal{A} \text{ منفصلة}} \quad then\ \ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(E_n)$$

ويعبر عن الخاصة الأخيرة بالقول: إن μ جمعي عداً على $\mathcal{A}$.

✍ **ثانياً:** أمثلة صفحة 26 (**هامة**)

❶ **قياس لوبيغ – بوريل** على $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (جبر بوريل) ويعرف كما يلي:

$$\begin{aligned} \lambda :\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}} &\longrightarrow [0,\infty] \\ E &\longmapsto \lambda(E)=inf\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}(b_k-a_k)\ \ : E\subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty}(\,[a_k,b_k[\,)\right\} \end{aligned}$$

وينتج عن ذلك أنه إذا كان $E=[a,b[$ فإن $\lambda(E)=b-a$. **أي يقيسُ كل مجال بطوله.**

❷ **قياس ديراك** على $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ المتمركز عند النقطة $a\in\mathbb{X}$ المعطاة سلفاً

$$\delta_a=\begin{cases}1 & if\quad a\in E\\ 0 & if\quad a\notin E\end{cases}$$

❸ **قياس العد** على $\mathcal{P}(\mathbb{X})$

$$\mu(E)=\begin{cases}|E|=E \text{ عدد عناصر} & if \quad E \text{ منتهية} \\ \\ \infty & if \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

✸ **تسميات**

☜ $(\mathbb{X},\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيس $\Leftrightarrow$ $\mathbb{X}\neq\phi$ ، $\mathcal{A}$ جبر تام من أجزاء $\mathbb{X}$ و μ قياس على $\mathcal{A}$.

☜ $(\mathbb{X},\mathcal{A})$ فضاء قيوس $\Leftrightarrow$ $\mathbb{X}\neq\phi$ ، $\mathcal{A}$ جبر تام من أجزاء $\mathbb{X}$.

❹ **القياس التام** (**أو الكامل**) وهو قياس على جبر تام m يحقق ما يلي:

إذا كانت A أية مجموعة من m قياسها صفر، فإن كل مجموعة جزئية من A تكون من m وقياسها صفر. أي:

$$\forall A\in m\,,\forall B\subseteq A:\ \ \mu(A)=0\Longrightarrow B\in m\ \ ,\ \ \mu(B)=0$$

✍ ثالثاً: القياس الخارجي

(أ). **(تعريف)** القياس الخارجي على $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ (أو على $\mathbb{X}$ اختصاراً) ، هو تطبيق:

$$\begin{aligned} \mu^* :\ & \mathcal{P}(\mathbb{X}) \longrightarrow [0,+\infty] \\ & A \ \longmapsto \mu^*(A) \end{aligned}$$

يحقق ما يلي:

$$\boxed{1}\ \mu^*(\phi) = 0$$
$$\boxed{2}\ A \subseteq B \ \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$
$$\boxed{3}\ A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \ \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

☜ ملاحظة: كل قياس على $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ هو قياس خارجي.

✸ مثال (1): إذا كان $\mu^*(A) = \sqrt{|A|}$ أياً كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ فعندئذٍ يكون μ^* قياساً خارجياً على $\mathbb{R}$ وليس قياساً.

✸ مثال (2): إذا كان

$$\lambda^*(A) = inf\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) \ \ : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\,]a_n, b_n]\,) \right\}$$

فعندئذٍ يكون λ^* قياساً خارجياً على $\mathbb{R}$. (نسميه القياس الخارجي لكاراتيودوري على $\mathbb{R}$).

(ب). **(تعريف)**: الجبر التام المولد من قياس خارجي على $\mathbb{X}$ ، مثل μ^* ، هو صف المجموعات $\mathcal{m}^*$ حيث:

$$A \in \mathcal{m}^* \ \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \mu^*(\mathbb{X}) \\ \mu^*(A \cap K) + \mu^*(A^c \cap K) = \mu^*(\mathbb{X} \cap K) = \mu^*(K) \ \ : \forall K \end{cases}$$

وهكذا نجد أن

$$A \in \mathcal{m}^* \Leftrightarrow \forall K \subseteq \mathbb{X} \ : \mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$$

(نسمي الشرط الأخير شرط كاراتيودوري)

(ج). **(مبرهنة وتعريف)**

يبرهن أن $\mathcal{m}^*$ جبر تام من أجزاء $\mathbb{X}$ وتسمى كل مجموعة تنتمي إليه مجموعة μ^*–قيوسة. كما يُبرهن أن مقصور μ^* عليه هو قياس موجب ونسميه القياس المولد من μ^*.

☜ ملاحظة 1 : إن λ قياس لوبيغ – بوريل على $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ هو القياس المولد من القياس الخارجي λ^* وهو يقيس كل مجال بطوله كما ذكر سابقاً.

☜ ملاحظة 2 : إذا كانت F دالة حقيقية متزايدة ومستمرة (أو مستمرة من اليمين) ووضعنا:

$$\lambda_F^*(A) = inf\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \big(F(b_n) - F(a_n)\big) \ \ : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\,]a_n, b_n]\,) \right\}$$

فإن λ_F^* قياس خارجي على $\mathbb{R}$ يقيس كل مجال $]a,b]$ بالفرق $F(b) - F(a)$ ومقصوره على $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ هو قياس موجب سنسميه قياس لوبيغ – استيلجس – بوريل على $\mathbb{R}$.

تمارين مختارة من الصفحة 61 :

رقم 1 وحله صفحة 188

رقم 2 وحله صفحة 189

رقم 3 وحله صفحة 190

(إذا كانت $\rho(A,B) = \mu(A\Delta B)$ حيث μ قياس (خارجي) فإن ρ نصف مسافة على $\mathcal{P}(\mathbb{X})$).

الفصل الثالث الدوال الحقيقية القيوسة

فيما يلي:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

(مبرهنة وتعريف)

سنقول إنَّ f دالة قيوسة بالنسبة إلى جبر تام $m \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ إذاا تحقق أحد الشروط المتكافئة الآتية:

$$\boxed{1}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ : f^{-1}(]\alpha, \infty[) \in m$$
$$\boxed{2}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ : f^{-1}([\alpha, \infty[) \in m$$
$$\boxed{3}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ : f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \in m$$
$$\boxed{4}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ : f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \in m$$

(مبرهنة أساسية)

العمليات على الدوال القيوسة بالنسبة إلى جبر تام $m \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$:

1. مجموع دالتين قيوستين هو دالة قيوسة.
2. نظير دالة قيوسة هو دالة قيوسة.
3. جداء دالتين قيوستين هو دالة قيوسة.
4. الحد الأعلى لمتتالية من الدوال القيوسة هو دالة قيوسة $\left(\sup\limits_{n\geq 1} f_n\right)$
5. الحد الأدنى لمتتالية من الدوال القيوسة هو دالة قيوسة $\left(\inf\limits_{n\geq 1} f_n\right)$
6. النهاية العليا لمتتالية من الدوال القيوسة هو دالة قيوسة $\left(\overline{lim}\ f_n\right)$
7. النهاية الدنيا لمتتالية من الدوال القيوسة هو دالة قيوسة $\left(\underline{lim}\ f_n\right)$

(مبرهنة خطيرة)

إذا كانت $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قيوسة موجبة وكان $n \geq 1$ ووضعنا $\varphi_n(x) = \frac{[2^n f(x)]}{2^n}$ عندما $f(x) \leq n$ وَ $\varphi_n(x) = n$ خلاف ذلك. عندئذٍ φ_n دالة قيوسة ، كما أن $\varphi_n \nearrow f$

سؤال: هل $\varphi_n(\mathbb{X})$ مجموعة منتهية؟ نعم برر ذلك.

تسمى كل دالة قيوسة صورتها مجموعة منتهية دالة بسيطة أو دالة درجية.

☜ ملاحظة: سأعيد صياغة المبرهنة السابقة مستخدماً ما سبق:

f دالة قيوسة موجبة $\quad \Leftrightarrow \quad$ f هي نهاية لمتتالية متزايدة من الدوال الدرجية.

☜ تمارين الفصل الثالث، صفحة 79، كلها هامة.

تمارين وتتمات

(1) عرف الصف المُطَّرد وأثبت أن صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ ليس صفاً مُطَّرداً.

(2) عرف الدالة القيوسة وأثبت أن كل دالة قيوسة موجبة هي نهاية لمتتالية متزايدة من الدوال الدرجية.

(3) اذكر نص مبرهنة كاراتيودوري وأثبت الخطوة الأولى منها. (إثبات أنَّ m^* جبر ...).

(4) **مفهوم التقارب وفق قياس مُعطى μ**

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \overset{\text{تعريفاً}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ : \lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

أثبت أنَّ مجموع متتاليتين متقاربتين وفق قياسٍ معطى μ هو متتالية متقاربة وفق μ.

المراجع العلمية:

- نظرية القياس لـ أ.د محمد بشير قابيل ، أ.د عهد كفى ، د. محمود باكير.
- *Real and Complex Analysis - Walter Rudin*