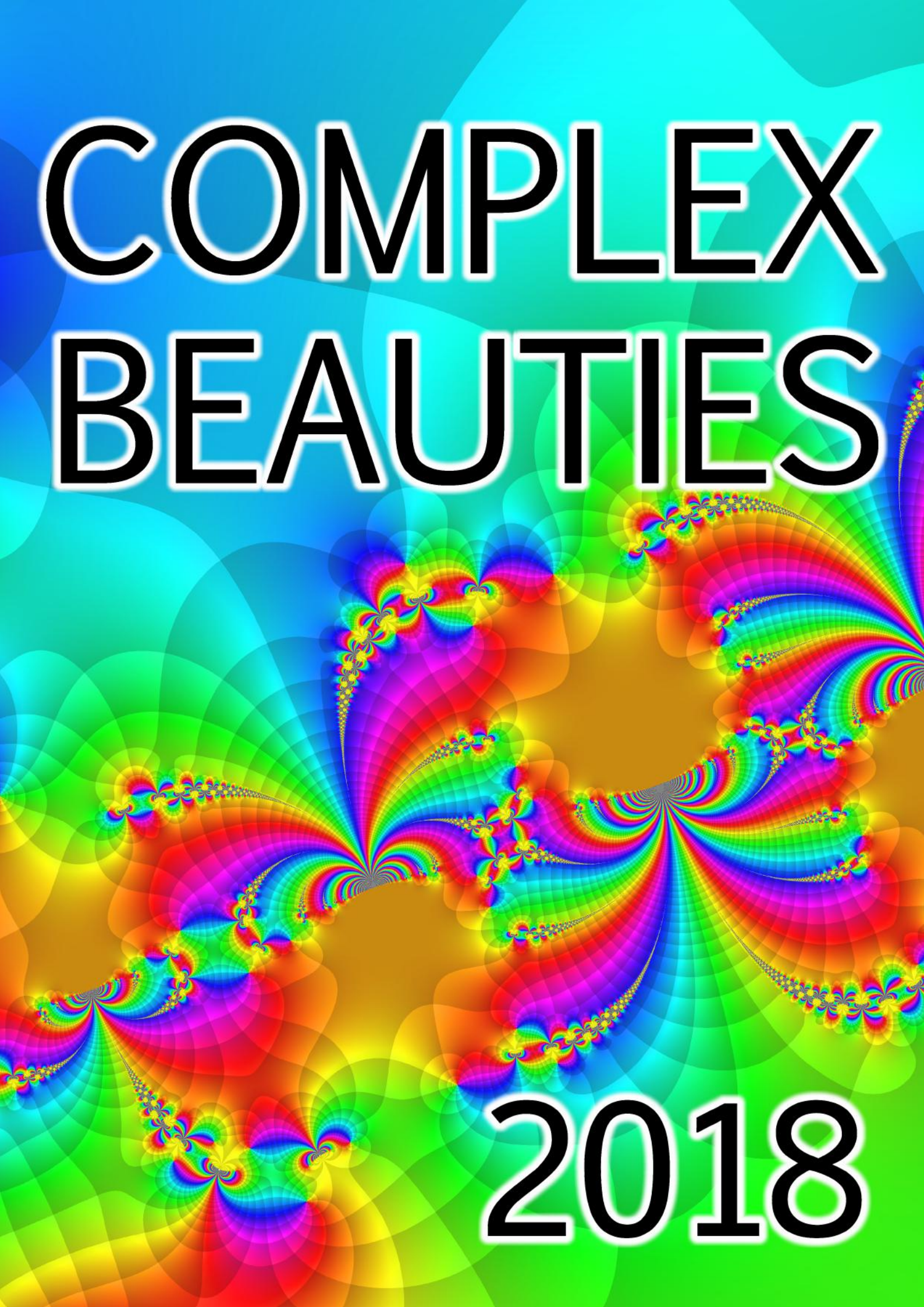
COMPLEX BEAUTIES



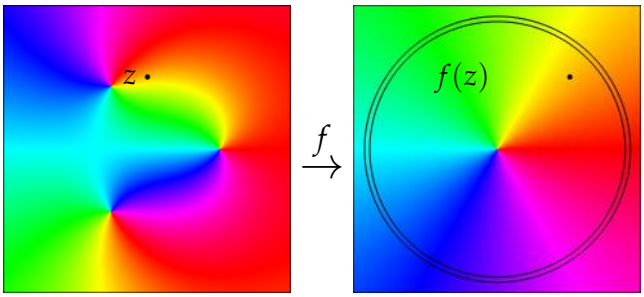
2018

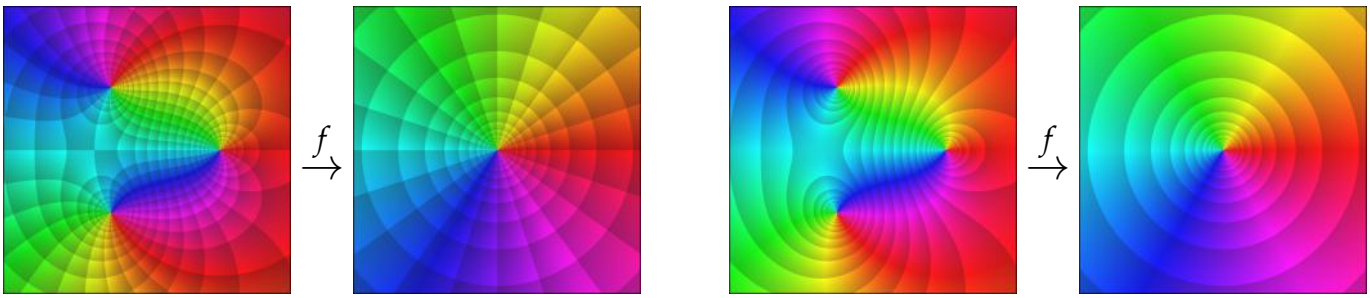
الأعداد العُقَديّة والألوان (Complex Numbers and Colors)

هذا هو الإصدار الثامن للتقويم الرياضيّاتي، والذي يصدر بعنوان "Complex Beauties"، وفيه يُعرَضُ العديد من الصور الجميلة والجذابة المرتبطة ببعض الدوال العُقَديّة. فلا يزال هناك الكثير من الصور الجديدة للدوال العُقَديّة يتم اكتشافها حتى الآن. وكما جرت العادة فإنه في كل شهر يتم عرض نبذة مختصرة عن مفهوم رياضيّاتي مُعَيّن. وفي بعض الأحيان تكون المفاهيم المعروضة عميقة نوعاً ما، على الرغم من المحاولة لجعلها سهلة المنال والفهم لدى جمهور عريض من القرّاء، وهذا يشكل تحدّياً كبيراً في بعض الحالات. لذلك فإن هذه المفاهيم تتطلب معرفة سابقة من قِبَل القارئ. لكنه يمكن للقارئ، وعلى الرغم من عدم امتلاكه لهذه المعرفة السابقة، أن يستشعر الإعجاب بالصور المعروضة، وأن يتكوّن لديه الانطباع عن سحر ومفاتن عالم المفاهيم والبُنى الرياضياتية. و كالعادة أيضاً يتم عرض نُبذة مختصرة عن حياة أحد العلماء الذين كانت لهم أعمال ومساهمات ذات صلة بالمفهوم الذي تم عرضه في الشهر ذاته.

نود أن نشكر بشكل خاص، ضيف هذا العام Albrecht Böttcher، لمساهمته في الكتابة عن موضوع نواة بيرغمان، فهو موضوع بحثه واهتمامه في الوقت الحالي. (أنظر في شهر تشرين الأول).

إن بناء صور الحالة (phase portraits) يرتكز على التفسير الهندسي للعدد العُقَدي كنقطة في مستوي غاوص. إذ إن الإحداثي الأفقي للنقطة التي تُمثّل z يُسمّى الجزء الحقيقي للعدد z ($\operatorname{Re} z$)، والإحداثي الشاقولي لهذه النقطة أيضاً يُسمّى الجزء التخيلي للعدد z ($\operatorname{Im} z$)، و نكتب $z = x + \mathrm{i}y$. ويمكن بدلاً من ذلك، أن تُعطى النقطة، التي تمثل العدد z، بدلالة بعدها عن المبدأ، والذي نرمز له بالرمز $|z|$ ويُسمّى مَقاسُ العدد z، وبدلالة زاوية نرمز لها بالرمز $\arg z$ وتُسمّى سِعة العدد z (أو زاويته). إن صورة الحالة (phase portrait) للدالة العُقَديّة f (والتي تظهر في الصورة أدناه ومن اليسار) تتشكل عندما تُلوّن جميع النقاط z من مجموعة تعريف f، وفقاً لسِعَة، أو صفحة (phase)، القيم $w = f(z)$. بشكل أدق، في الخطوة الأولى يتم استخدام دولاب الألوان لتعيين ألوان نقاط المستوي-w: فالمستقيمات المُنبَعِثة من المبدأ، تأخذ النقاط الواقعة على كل منها اللون ذاته (كما هو في الصورة ومن اليمين). لذلك فإن النقاط التي لها السعة ذاتها، يتم تلوينها بلون واحد. في الخطوة الثانية، كل نقطة z في منطقة تعريف f تأخذ نفس لون القيمة $f(z)$ في المستوي-w. يمكننا اعتبار صورة الحالة لأي دالة هي البَصمَة (fingerprint) لهذه الدالة. على الرغم من أن جزءاً واحداً فقط من البيانات يتم تفسيره (وهو السعة)، والجزء الآخر (وهو المقاس) يتم تجاهله، فإنه يمكن، وبشكل وحيد تحت إجراء تَعيير ما (normalization)، إعادة بناء صف من الدوال: كَصَف الدوال التحليليّة أو بشكل عام الدوال الميرومورفيّة. إن إجراء بعض التعديلات في اللون يمكننا، وبسهولة كبيرة، من رؤية بعض خواص الدوال المدروسة.





قمنا في هذا التقويم باستخدام ثلاثة مخططات تلوين مختلفة: أحدها هو صورة الحالة (phase portrait)، والذي تم توضيحه أعلاه. والمخططين الباقيين تم عرضهما في الصف الثاني من الصور. ففيهما، في الصورة من جهة اليمين تم إضافة المقاس إلى التمثيل، وفي الصورة من جهة اليسار يظهر مبدأ الحفاظ على الزوايا عند تطبيق الدالة.

يمكن للقارئ أن يجد مقدمة لنظرية الدوال والمَصحُوبَة بمفهوم صورة الحالة، في الكتاب:

E. Wegert, *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits,* Springer Basel 2012.

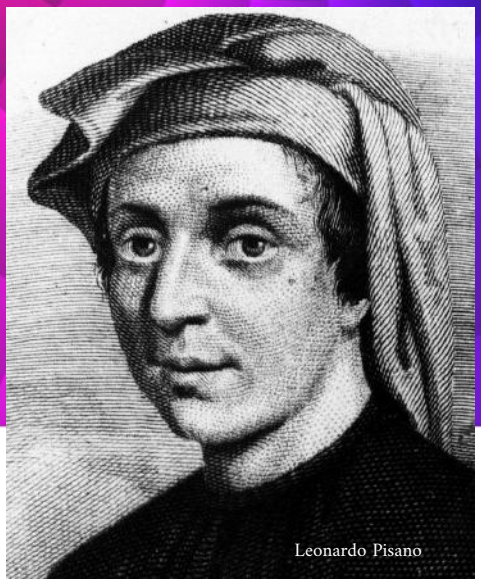
والمزيد من المعلومات حول هذا التقويم (وتقاويم سنوات سابقة)، وحول الكتاب آنف الذكر، متوفر في الموقعين:

www.mathcalendar.net, www.visual.wegert.com.

كما ونشكر جميع قُرّائنا الكرام، و *Verein der Freunde und Förderer der TU Bergakademie Freiberg e. V.* لدعمهم القيّم لهذا المشروع.

Pamela Gorkin and Ulrich Daepp (Bucknell University, Lewisburg) Elias Wegert and Gunter Semmler (TU Bergakademie Freiberg),©

تمت الترجمة والإخراج لهذا التقويم إلى العربية من قِبل **محمد سعود الكوسى** (معهد موسكو للفيزياء والتكنولوجيا MIPT). مع الشكر الجزيل لكل من ساعد على إخراج هذا العمل.



كانون الثاني

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31										

الدّالة المُوَلّدة لمتتالية فيبوناتشي

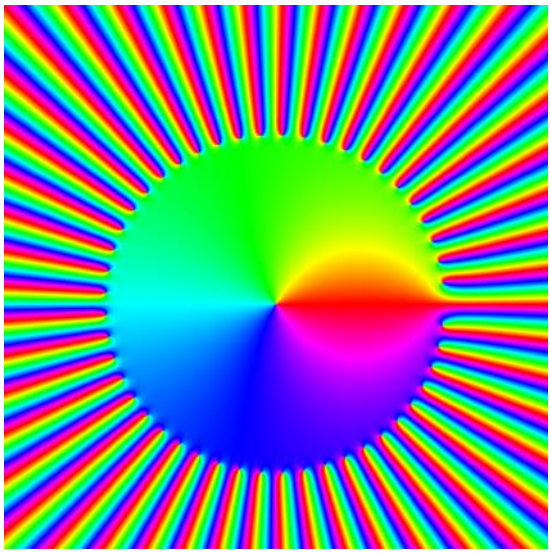
تعتبر متتالية فيبوناتشي واحدة من أكثر المتتاليات العددية شهرة ومعرفة في الرياضيات. فقد قدم فيبوناتشي لأوروبا، في كتابه المُسمّى "كتاب الحساب (Liber abbaci)" الأرقام العربية والحساب الحديث. و احتوى كتابه على العديد من المسائل المحلولة، ومن ضمنها مسألة، تُسمّى مسألة الأرانب، والتي تنص على أنه:

> "يوجد لدى شخص زوج من الأرانب (ذكروأنثى)، يعيشان معاً في مكان مغلق، ويريد هذا الشخص معرفة عدد الأزواج التي ستكون لديه من هذا الزوج، بعد مرور سنة واحدة. وذلك بفرض أن هذا الزوج ينجب كل شهر زوجاً آخر، وفي الشهر التالي جميع هذه الأزواج تنجب أزواجاً أخرى، وهكذا..."

لنرمز بالرمز F_n إلى عدد أزواج الأرانب التي يمتلكها الشخص في بداية الشهر n، وبطبيعة الحال لا نريد التوقف بعد سنة واحدة، ولنفترض أن الأرانب تعيش إلى الأبد، والبداية تكون مع الأخذ بعين الاعتبار أنه لا يوجد أية أزواج قبل الشهر 0. هذا الأمر يقودنا إلى متتالية تُسمّى متتالية فيبوناتشي، وتُعَرّف تدريجياً بالشكل الآتي:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ \text{ and }\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ for } n \geq 2$$

في وقت لاحق، حاول أويلر إيجاد طريقة لوصف متتالية فيبوناتشي باستخدام الدوال العددية. وكان لابلاس أول من وضع مصطلح الدّالة المُوَلّدة لمتتالية، والتي نعني بها متسلسلة قوى، أمثالها العددية هي حدود هذه المتتالية. وبالتالي من أجل متتالية فيبوناتشي، فإننا نبحث عن متسلسلة قوى f بحيث يكون $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$. ومن المسموح لنا استخدام أي متسلسة قوى، دون التأكيد على أنها متسلسلة متقاربة (ومنه من الممكن أن لا تكون f دالة في $\mathbb{C}$).



الدالة المُوَلّدة لمتتالية فيبوناتشي هي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

ومن المعلوم أن:

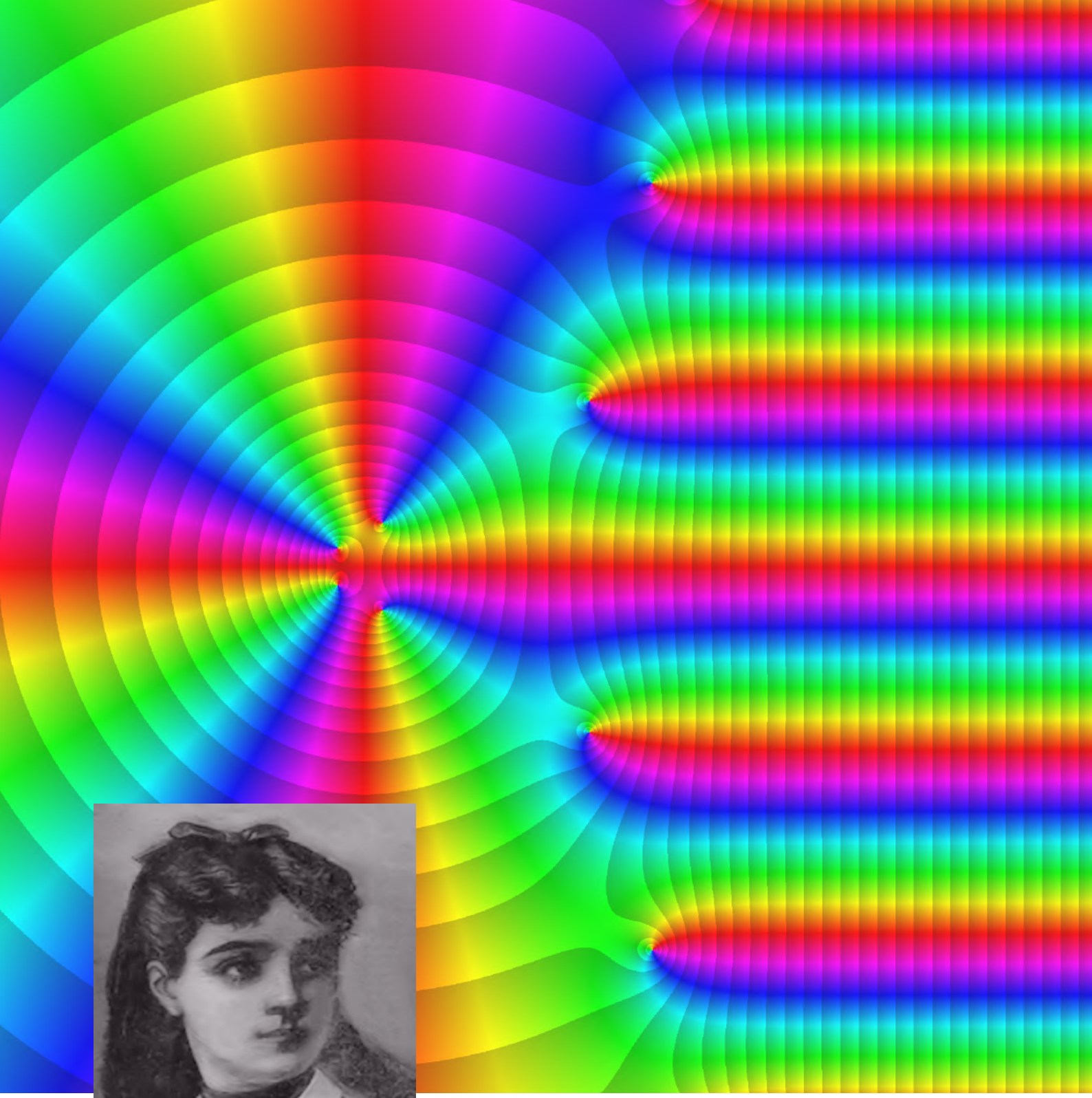
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = c, \text{ where } c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

والعدد c يدعى النسبة الذهبية. ومنه نستنتج أن متسلسلة القوى أعلاه متقاربة داخل القرص $|z| < 1/c \sim 0.61803$. وهذا يظهر بوضوح في الشكل الوارد جانباً، حيث تم استخدام المجموع الجزئي من أجل 50 حداً. مع العلم أن الدالة المُوَلّدة ذاتها مُعرّفة على كامل المستوي العقدي، ولها صفر واحد عند 0، وقطبان أحدهما $1/c$ والآخر $-(1+1/c)$. إن صورة الغلاف لهذا الشهر من هذا العام تصف لنا ما يُسمّى صورة الحالة (phase portrait) لهذه الدالة. لاحظ أن هذه الصورة تتطابق مع صورة الحالة لمتسلسة القوى في المنطقة التي تكون فيها متقاربة. في شهر أيلول ،من عام 2012، تُلاحظ مثالاً آخر للدّالة المُوَلّدة.

ليوناردو بيزانو (Leonardo Pisano) (حوالي 1170-حوالي 1250)

كان ابن تاجر من مدينة بيزا في إيطاليا. قضى في سن المراهقة مع والده وقتاً في شمال إفريقيا حيث تعلّم الكتابة والحساب باستخدام الأرقام العربية، التي كانت تستخدم من قِبَل التجار المسلمين. لدى عودته إلى بيزا كتب كتابه "كتاب الحساب"، آنف الذكر. في هذا الكتاب قدم ليوناردو نفسه بأنه "filius Bonacci" (أي بأنه ابن عائلة بوناتشي). وفي وقت لاحق، تم اختصار هذا التقديم لنفسه إلى لقب فيبوناتشي. كما أنه ألّف كتاب المربّعات، والذي كان عبارة عن دراسة في نظرية الأعداد، وموضوعين آخرين. باستثناء كتابات ليوناردو بيزا فإنه لايُعرف سوى القليل عنه. ويوجد هناك أدلة على أنه، في سنواته الأخيرة، حصل على راتب سنوي من بيزا مقابل أعماله الجديرة بالتقدير والمكافئة. لكن حتى الصورة التي تظهر على الجانب الآخر من هذه الصفحة هي على الأرجح جزء من الخيال، إذ إنها حديثة بعض الشيء ومجهولة الأصل. وهي الصورة الوحيدة لفيبوناتشي، ويوجد له تمثال من القرن التاسع عشر، والذي يبدو أنه تم بناؤه اعتماداً على هذه الصورة. ولا نعلم فيما إذا كان لفيبوناتشي عائلة أم لا، ولا عدد السنوات التي عاشها.

L. Sigler, Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo of Pisa's Book of Calculation. Springer, New York, 2002; p. 404.
K. Devlin, The Man of Numbers, in search of Leonardo Fibonacci, 2010. https://www.maa.org/external_archive/devlin/Fibonacci.pdf



شباط

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28										

مطابقة صوفي جيرمان (Sophie Germain's Identity)

إن تحويل المجاميع إلى جداءات يكون ذا فائدة، في أغلب الأحيان، ومساعداً لاختبار قابليّة القسمة وحل المعادلات. وتعتبر معادلات ثنائي الحد، المعروفة لدى القارئ بشكل جيد، واحدة من ضمن أبسط التمثيلات لهذه الجداءات

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

في بداية القرن التاسع عشر، أنجزت صوفي جيرمان عملاً رائداً في مُخمّنة فيرما. إذ إنها طورت طريقة للتحليل أقل وضوحاً من التحليل باستخدام ثنائي الحد، ولكن مع ذلك، من السهل التحقق من أن

$$a^4+4\,b^4=(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2)=\big((a-b)^2+b^2\big)\big((a+b)^2+b^2\big) \tag{1}$$

وعلى سبيل المثال أدركت جيرمان أنه من بين الأعداد a^4+1، حيث a عدد صحيح موجب، يوجد عدد أولي واحد فقط. تنتج هذه الحقيقة مباشرة من (1)، باعتبار أن $b=1$. ومن بين التطبيقات، الأقل وضوحاً، لمطابقة جيرمان (أي المطابقة (1))، هو إثبات أنه للمعادلة

$$3^a+4^b=5^c$$

من أجل a و b و c أعداد صحيحة موجبة، حل واحد فقط هو $a=b=c=2$. تستخدم مطابقة جيرمان، في أغلب الأحيان، لحل العديد من المسائل في المسابقات المتقدمة للرياضيات. فعلى سبيل المثال تُستَخدم في حل المسألة التي يُطلَب فيها إثبات أن التعابير التي لها الشكل a^4+4^a هي أعداد مُركّبة (غير أوّليّة) إذا كان a عدداً صحيحاً و $a\geq 2$. بِدَافع وتَحفيز نابِعَين من هذه المسألة، أوجدنا الصورة على غلاف هذا الشهر، والتي تصف لنا صورة الحالة للدالة

$$f(z)=z^4+4^z$$

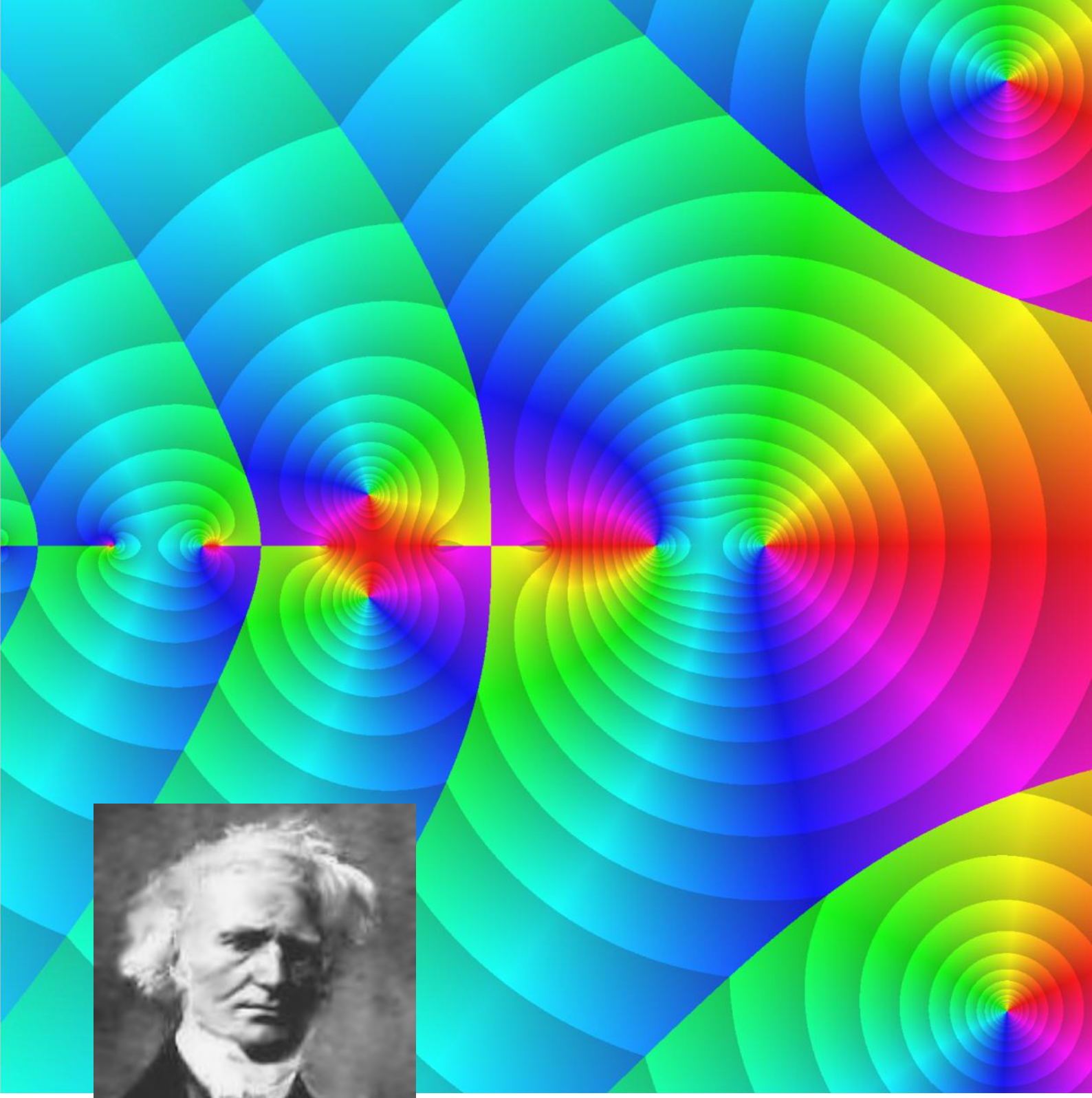
في المنطقة $-9<\operatorname{Re}z<17$ و $-13<\operatorname{Im}z<13$. في النصف الأيسر من المستوي، تكون الطويلة للدالة الأسيّة صغيرة ومنه فإن الحد z^4 يُهَيمن على الدالة f. وفي جوار المبدأ نجد أربعة أصفار، تنتج من الجمع بين الحدين z^4 و a^4. وفي المنطقة المُخَطّطَة، والتي تظهر فيها الشرائط، تكون الدالة الأسية هي المهيمنة.

صوفي جيرمان. Sophie Germain (1776-1831)

نشأت في عائلة تاجر ثري في باريس. قرأت في صباها كتب الرياضيات الموجودة في مكتبة أبيها، معارضة بذلك إرادة والديها، لأنه في وقتها كانت تُمنَع النساء من الالتحاق بالجامعات. حصلت جيرمان على محاضرات في الرياضيات من طالب يُدعى لوبلانك. وعندما مات هذا الطالب في الثورة الفرنسية اعتمدت اسمه كإسم مستعار. وعندما استدعى البروفيسور جوزيف لويس لاغرانج طالبه لوبلانك للحديث معه، كشفت صوفي جيرمان هويتها و انبَهر بها لاغرانج، لكنه كان سعيداً بها، و قام بعد ذلك بدعمها بشكل علني. في عام 1804 بدأت جيرمان (بالاسم المستعار أوغست أنطون لوبلانك) الاتصال بكارل فريدريك غاوص. وكان معجباً بها أيضاً عندما عَلِم، في عام 1807، هويتها الحقيقية. وفي عام 1831 أوصى لها بالحصول على الدكتوراه الفخرية من جامعة غوتنغن. لكنه للأسف ماتت جيرمان بالسرطان قبل وقت قصير من حصولها على هذه الدرجة. تَكرّس الجزء الرئيسي لعمل جيرمان في إثبات مُخمّنة فيرما. ففي عام 1637 ادّعى بيير دي فيرما أن لديه إثباتاً مدهشاً يُبيّن فيه أن المعادلة $a^n+b^n=c^n$، حيث a و b و c أعداد طبيعية، و $n\geq 3$، ليس لها حل. وفي حوالي العام 1805 أثبتت جيرمان صحة مُخمّنة فيرما في الحالة التي تكون فيها n من نمط معين من الأعداد الأولية (سُمِيَت في وقت لاحق أعداد صوفي جيرمان الأولية) . وجعلت هذه النتيجة من صوفي جيرمان الخبير الأول في هذا المجال. ولم يكن هنك إثبات كامل لمخمنة فيرما حتى عام 1995، عندما قدّم أندرو وايلز (بالاشتراك مع ريتشارد تايلور) إثباته الكامل لهذه المخمنة.

في عام 1809، ضمن فعاليات جائزة إحدى المسابقات، بدأت صوفي جيرمان بدراسة اهتزازات الأغشية (أشكال كلاندي) وعلى الرغم من احتواء حلها على بعض الأخطاء، فإنه تم منحها جائزة الأكاديمية الباريسية في عام 1815. لكنه خاب أملها باستلام الجائزة بسبب عدم الاعتراف بعملها من قبل بعض علماء الرياضيات، ورفضت التقديم للجائزة.

أظهرت جيرمان اهتماماً كبيراً في الفلسفة وعلم النفس وعلم الاجتماع. وفي سابقة لعصرها حاولت تقديم منظومة من القوانين والحقائق ضمن منهجية للبحث في هذه العلوم الاجتماعية.



آذار

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31							

دالة غاما اللّوغاريتميّة (The Logarithmic Gamma Function)

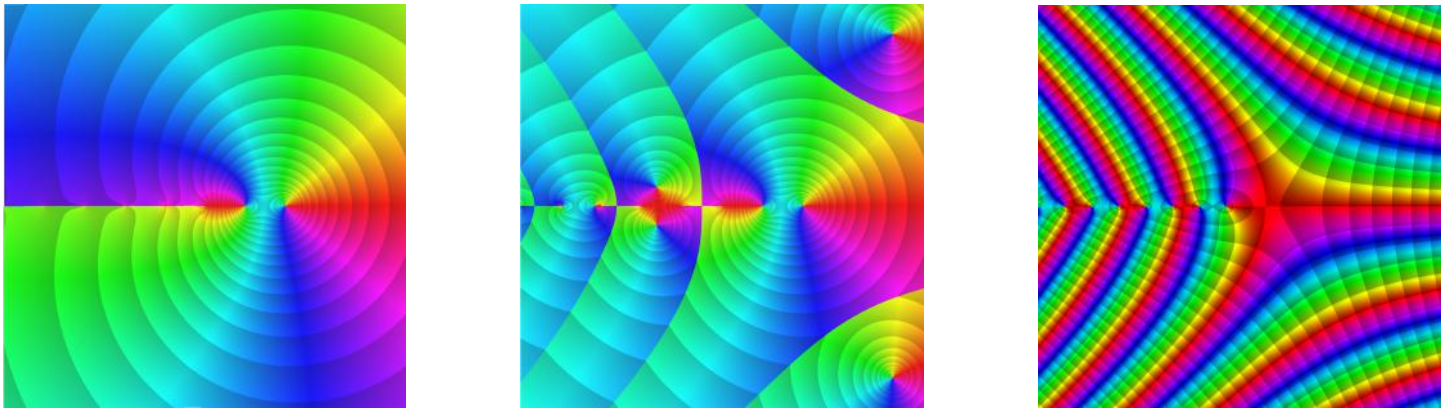
من المعلوم أن الدالة غاما تعطي تعميماً لدالة العَامِلي (factorial function)، أنظر في شهر آب من عام 2012. والصورة المُدرَجة في الأدنى من جهة اليمين، تُوَضّح صورة الحالة للدالة غاما. إن للدالة غاما أقطاب بسيطة عند الأعداد الصحيحة السالبة، ويَتضحُ ذلك من تمثيل ڤايرشتراوس للدالة غاما بالجداء غير المنتهي الآتي

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} \tag{1}$$

حيث $\gamma = 0.57721\ldots$ هو ثابت أويلر-ماسكيروني (*Euler-Mascheroni*). إن التعامل مع دالة غاما اللّوغاريتميّة يتطلّب الحيطَة والحذر، لأن الدالة اللّوغاريتميّة العُقديّة هي دالة مُتَعدّدةُ القيم (أنظر في شهر أيار، 2011). فالمعادلة $\mathrm{e}^{\zeta} = w$ من أجل $w = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ ، حيث $r > 0$ ، لها عدد غير منته من الحلول، وهي $\zeta_n = \log r + i(\varphi + 2n\pi)$ من أجل كل الأعداد الصحيحة n. ومن الشائع أن نأخذ من ضمن هذه الحلول القيمة الرئيسيّة للوغاريتم، وهي ζ_0 من أجل $-\pi < \varphi \leq \pi$. فإذا أخذنا القيمة الرئيسيّة للوغاريتم الدالة $w = \Gamma(z)$ ، فإننا نحصل على صورة الحالة المعروضة على غلاف هذا الشهر، وفي الصورة الوسطى أدناه. إن دالة غاما اللّوغاريتميّة غير مستمرة عند النقاط التي تأخذ عندها الدالة Γ قيماً حقيقية سالبة، وهذا يحصل عند المستقيمات ذات اللون الأزرق الفاتح في صورة الحالة للدالة غاما. ومع ذلك فإنه من الممكن إيجاد دالة غاما اللّوغاريتميّة بحيث تكون تحليلية في المستوي المُقتَطَع منه الجزء السالب من المحور الحقيقي. هذه الدالة، بناء على (1) تُعطى بالشكل

$$\log\Gamma(z) = -\ln z - \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n} - \log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right)$$

وتُدعى دالة غاما اللّوغاريتميّة. وصورة الحالة لهذه الدالة موضحة في الصورة المُدرَجة أدناه، من اليسار.



اكتشف جاك بينيه (Jacques Binet) تمثيلين آخرين لدالة غاما اللّوغاريتميّة، من أجل $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z) &= \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\frac{\mathrm{e}^{-tz}}{t}\,dt\\ &= \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + 2\int_0^{\infty}\frac{\arctan\left(\frac{t}{z}\right)}{e^{2\pi t}-1}\,dt.\end{aligned}$$

جاك فيليب ماري بينيه. Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856)

وُلِد في مدينة رين (Rennes) في فرنسا، وكان أبوه مهندساً معمارياً. درس بينيه مع اثنين من إخوته في مدرسة البوليتكنيك في باريس وأصبح الثلاثة علماء في الرياضيات. ودرس في وقت لاحق في مدرسة البوليتكنيك وفي الكُليّة الفرنسية. كان بينيه، مع صديقه كوشي متعاطفاً مع المَلَكيّة، وكلّفه هذا التعاطف فُقدان درجته في الأستاذية في مدرسة البوليتكنيك بعد ثورة تموز من عام 1830. قدم بينيه إسهامات هامة في الرياضيات، والميكانيك والفلك. اكتشف هو وكوشي، في وقت واحد، نظرية حول المُحَدّدَات والتي تُسمّى الآن باسميهما، صيغة كوشي-بينيه. واكتشف بينيه أيضاً صيغة لأعداد فيبوناتشي (أنظر في شهر كانون الثاني، من هذا العام)، وهذه الصيغة تم اكتشافها أيضاً من قِبَل دي مواڤر (de Moivre) وآخرين. شَهِدَ بينيه تجربة نواس فوكو (Foucault's pendulum)، وكان أول من قدم تفسير رياضيّاتي لطول دورة واحدة لهذا النواس. انتُخب بينيه في أكاديمية العلوم، وبعد فترة قصيرة أصبح رئيساً للأكاديمية، وعانى من موت مفاجئ وغير متوقع.

نیسان

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30												

كثيرات حدود ليتلود (Littlewood Polynomials)

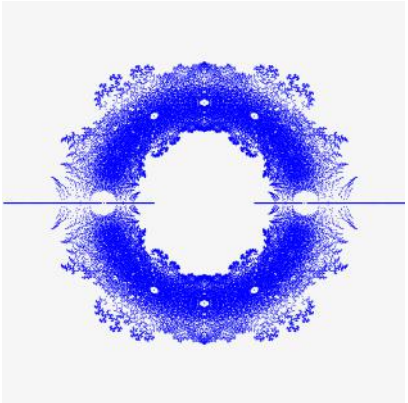
ندعو كثيرة حدود ليتلود كل كثيرة حدود $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$، جميع أمثالها a_k تساوي $+1$ أو -1. فمثلاً كثيرة حدود ليتلود، والتي جميع أمثالها تساوي 1 هي من الشكل:

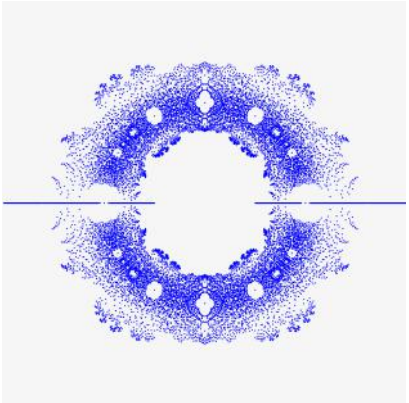
$$P(z) = z^n + \ldots + z + 1 = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

وأصفارها هي الجذور من المرتبة $(n+1)$ للوِحدَة، باستثناء العدد 1. وهذه الأصفار جميعها تقع على دائرة الوِحدَة (أنظر الشكل، المُدرَج في اليمين، أدناه). سنقدم الآن دليلاً على أن أصفار أي كثيرة حدود P من كثيرات حدود ليتلود ستكون قريبة من دائرة الوِحدَة، وهي في الحقيقة تقع في الحلقة $1/2 < |z| < 2$. لنفرض أن z صفر لكثيرة الحدود P، يقع داخل دائرة الوحدة. بما أن $P(z) = 0$ فإننا نجد أن

$$1 = |a_0| = |a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n| \leq |z| + |z|^2 + \ldots + |z|^n = |z| \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|} < \frac{|z|}{1 - |z|}$$

ومنه $1 - |z| < |z|$، وهذا يكافئ أن $|z| > 1/2$. والأسلوب ذاته يُستخدم عندما تكون z واقعة خارج دائرة الوِحدَة. إن صورة الغلاف لهذا الشهر، من هذا العام، تُظهر كثيرة حدود ليتلود من الدرجة 50، وبمعاملات تم اختيارها بشكل عشوائي. بدأ ليتلود البحث في كثيرات الحدود هذه في ستّينيّات القرن الماضي، ولا نعلم حتى الآن سوى القليل عنها. فعلى سبيل المثال بيّن P. Borwein و J. Erdélyi أنه في داخل أي مُضلّع، رؤوسه تقع على دائرة الوِحدَة، يوجد على الأكثر $c\sqrt{n}$ صفراً لكثيرة حدود ليتلود من الدرجة n، حيث c ثابت يعتمد فقط على المضلع. إن مجموعة جميع الأصفار لكثيرات حدود ليتلود هي أيضاً مجموعة مثيرة للاهتمام، ولا يوجد حتى الآن دراسة شاملة ووافية عنها. الشكل الأوسط يُبيّن مجموعة جميع الأصفار لجميع كثيرات حدود ليتلود من الدرجة 11. والشكل المُدرج في اليسار يُبيّن مجموعة جميع الأصفار لجميع كثيرات حدود ليتلود التي درجتها على الأكثر تساوي 12.





جون إيدنسور ليتلود. (1885 - 1977) John Edensor Littlewood

وُلِد في روتشيستر (Rochester) في جنوب شرق انكلترا. أمضى جزءاً من طفولته بين العامين 1892 و 1900 في جنوب إفريقيا، حيث كان والده يعمل مُدرّساً للرياضيات. بعد عودته إلى انكلترا كان قادراً على تحسين دراسته للرياضيات في مدرسة سانت بول في لندن. بعد ذلك دخل كلية ترينيتي (Trinity College) في جامعة كامبريدج، وحصل على أعلى معدل في الامتحان النهائي للحصول على درجة البكالوريوس. بدأ ليتلود بإجراء أبحاثه في الرياضيات بتوجيه من قِبَل E.W. Barnes ، (أنظر في شهر تموز، 2017)، والذي قدم له مُخمّنة ريمان للعمل عليها (أنظر في شهر تشرين الثاني لهذا العام). واكتشف ليتلود ارتباط مُخمّنة ريمان بنظرية الأعداد الأوليّة، والذي كان معروفاً منذ فترة طويلة في أوروبا القاريّة، وهذا ما يدل على عُزلَة علماء الرياضيات البريطانيين في وقتها. وقال ليتلود، في وقت لاحق، إنه من الممكن تعلّم الكثير من أي مسألة، هي بحد ذاتها بعيدة المنال. في حوالي العام 1910 بدأ تعاون ليتلود الطويل والمثمر مع هاردي G. H. Hardy (أنظر في شهر تموز، 2017). وهَيمَن كِلاهُما، في النصف الأول من القرن العشرين، على الرياضيات في بريطانيا. وكان يعتقد بعض علماء الرياضيات بأن ليتلود كان اسماً مُستَعاراً لهاردي. يوجد لليتلود العديد من المساهمات الأخرى والهامة في الرياضيات، والتي كانت مع M. Cartwright (أنظر في شهر نيسان، 2016)، ومع رامانوجان S. Ramanujan (أنظر في شهر كانون الأول، 2016. وفي شهر تموز، 2013)، ومع R. Paley. وكان ليتلود في شيخوخته أيضاً حيوياً ونشيطاً في مجال الرياضيات. كان طوال حياته يكافح الاكتئاب، وكان فقط بدءاً من عام 1957 قادراً على السيطرة عليه بمساعدة الدواء. حصل على العديد من الجوائز والميداليات من بينها ميدالية سيلفستر، وميدالية دي مورغان، وانتُخب عضواً في كثير من الأكاديميّات.

P. Borwein and T. Erdélyi, On the zeros of polynomials with restricted coefficients, Illinois J. Math. **41** (1997), no. 4, 667-675.
R. Reyna and St. Damelin, On the structure of the Littlewood polynomials and their zero sets. arXiv:1504.08058 [math.CV]

أيّار

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31									

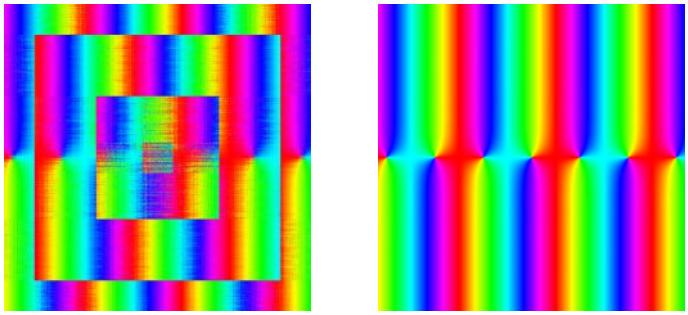
طريقة الفروق المنتهية (Finite Difference Method)

العديد من المسائل في الرياضيات التطبيقية يمكن نَمذَجتُها باستخدام المعادلات التفاضلية. من بينها، على سبيل المثال، مسألة تحديد توزع درجة الحرارة في جسم ما، ومسألة حساب سرعة سائل متحرك. تحتوي هذه المعادلات التفاضلية على مشتقات (عادية أو جزئية) للدالة المجهولة، وغالباً ما تكون مُعَقّدة بشكل لا يمكن حلها إلا تقريبياً باستخدام الطرائق العددية. أبدع كورانت نظرية الفروق المنتهية، في عام 1925 في مقالته الرائدة "حول نظرية المعادلات الفَرقِيّة الجزئية الخطية (On the theory of the linear partial difference equations)" والفكرة الأساسية فيها تتمثّل بإيجاد دوال الحل المجهولة على شبكة من النقاط واستبدال المشتقات التي يتم الحصول عليها في المعادلة التفاضلية ذات الصلة بحاصل قسمة فروق. مثلاً يمكن تقريب المشتق $f'(x)$ بحاصل قسمة الفروق الأماميّة أو التراجعيّة أو المركزيّة الآتية

$$f_h^+(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f_h^-(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \quad f_h^0(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

و h هنا تشير إلى وسيط التّقطيع (discretization parameter) والذي يحدد مدى نُعومَة الشبكة. وبهذه الطريقة يكون قد تم تقريب المعادلة التفاضلية بمعادلة فروق منتهية، والتي ستتحول في نهاية المطاف إلى جملة معادلات، عدد مجاهيلها محدود، لكنه كبير جداً. ومن جهة أخرى، فإن التقطيعات المختلفة للمشتق تكون مُتمَايِزَة حسب دقة التقريب. فإذا كان خطأ التقريب، من أجل h صغيرة، متناسباً مع القوة h^k، عندئذ فإن هذا التقريب يُدعى تقريب من المرتبة k. فمثلاً قسمة الفروق الأمامية f_h^+ و التراجعية f_h^- هي فروق من المرتبة الأولى، بينما قسمة الفروق المركزية f_h^0 من المرتبة الثانية.

صورة الغلاف لهذا الشهر تُظهِر صورة الحالة (pahse portrait) للخطأ $f_h^0 - f'$، وذلك عندما يتم تقريب المشتق الأول (العُقَدي) للدالة $f(z) = \cos z$، بالفروق المركزية وبأخذ $h = 10^{-7}$.



الخطأ $f_h^0(z) - f'(z) \approx \frac{1}{6} h^2 \sin z$ صغير جداً، حيث أنه يقع ضمن نطاق خطأ التدوير وهذا هو السبب في التلوين غير المنتظم في صفحة الغلاف لهذا الشهر. لكن في المقابل، إن صورة الحالة للخطأ ذاته من أجل $h = 10^{-3}$، والمُوَضّحَة في الشكل المُدرَج جانباً من جهة اليمين، تظهر بالشكل المُتوَقّع. والشكل المُدرَج جانباً من جهة اليسار، يُبين هذا الخطأ عند تقريب f' بأخذ $h = 10^{-3}$، وباستخدام قسمة الفروق (العُقَديّة) من المرتبة الرابعة

$$f_h^*(z) = \frac{1}{4h}\left(f(z+h) + \mathrm{i}\, f(z+\mathrm{i}h) - f(z-h) - \mathrm{i}\, f(z-\mathrm{i}h)\right)$$

ريتشارد كورانت. (1888 - 1972) Richard Courant

ولد في مدينة ليوبلنيتز، سيليزيا (Lublinitz, Silesia). بدأ في عام 1906 دراسة الفيزياء في جامعة بريسلاو (Breslau)، لكنه سرعان ما تحول إلى دراسة الرياضيات، ثم ذهب إلى زيوريخ. بعد ذلك، ذهب إلى غوتنغن، حيث أصبح هناك مساعداً لديفيد هيلبرت. في عام 1910 كتب كورانت أطروحته حول التطبيقات الحافظة للزوايا، تحت إشراف هيلبرت. وحصل في عام 1912 على درجة الأستاذية.

خلال الحرب العالمية الأولى، عمل كورانت مع Peter Debye و Paul Scherrer على تطوير نظام التلغراف الجديد. ثم أمضى عامين في مونستر قبل أن يعود مرة أخرى إلى غوتنغن حيث تم استدعاؤه لِيَخلُفَ فيليكس كلاين (Felix Klein). وبعدها تقدم بمنصبه ليصبح مديراً لمعهد الرياضيات.

بعد وصول الحزب النازي إلى السلطة، كان على كورانت مغادرة ألمانيا في صيف عام 1933. وبعد سنة واحدة أمضاها في كامبريدج، ذهب إلى جامعة نيويورك حيث تم تعيينه كأستاذ فيها. أسس ريتشارد كورانت مع Kurt Friedrichs، و Peter Lax معهداً لأبحاث الرياضيات في جامعة نيويورك. والذي حمل اسمه فيما بعد في عام 1946.

نُشِرَ كتاب كورانت "طرائق الفيزياء الرياضيّاتيّة (Methods of mathematical physics)" مع ديفيد هيلبرت في عام 1924، وفي عام 1941 نُشِرَ كتبه "ماهي الرياضيات؟ (What is mathematics?)" مع Herbert Robbins في عام 1941. وأصبح هذين الكتابين فيما بعد من الكتب الكلاسيكية.

حزيران

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30							

توبليتز والمصفوفات الدوّارة (Toeplitz and Circulant Matrices)

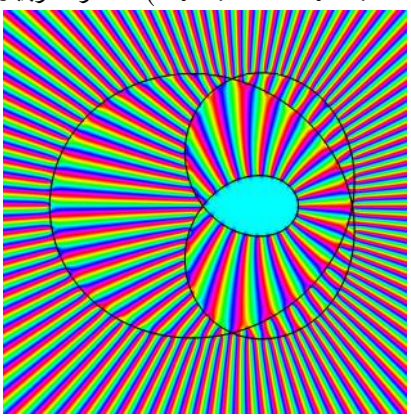
مصفوفات توبليتز هي مصفوفات تكون فيها عناصر كل قطر، من الأعلى ومن جهة اليسار حتى الأدنى ومن جهة اليمين أعداد متساوية. ومن الأمثلة الخاصة على مصفوفات توبليتز المصفوفات الدوّارة، والتي يتم تشكيلها من مُتّجه ذو n مركبة، وذلك بتبديل أماكن مُركّباته. المصفوفة T أدناه هي مصفوفة توبليتز، والمصفوفة C هي مصفوفة دوّارة.

$$T = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{1-n} & c_{2-n} & c_{3-n} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتيّة للمصفوفة M هي قيم λ التي من أجلها يمكننا إيجاد شعاع غير صفري $\mathbf{x}$ بحيث يكون $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. من أجل المصفوفة الدوّارة C، فكر توبليتز ملياً بكثيرة الحدود f المرتبطة بها، والمُعَرّفة بالشكل:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1}$$

ولاحظ أن القيم الذاتية للمصفوفة C هي القيم $f(w)$، حيث أن w هي الجذور من المرتبة n للوحدة. ولرؤية القيم الذاتية، يمكننا أن نأخذ كثيرة الحدود المميّزة ونوجد أصفارها (حيث أن جميع الألوان تكون مُجتَمِعة مع بعضها)، أو أن نرسم صورة f عند جذور الوِحدَة. إحدى الطرائق المفيدة في حل مسألة ما حول مصفوفات توبليتز هو أن نوجد متتالية من المصفوفات الدوّارة تكون مكافئة بشكل تَقَارُبي (asymptotically equivalent) لمصفوفة توبليتز.

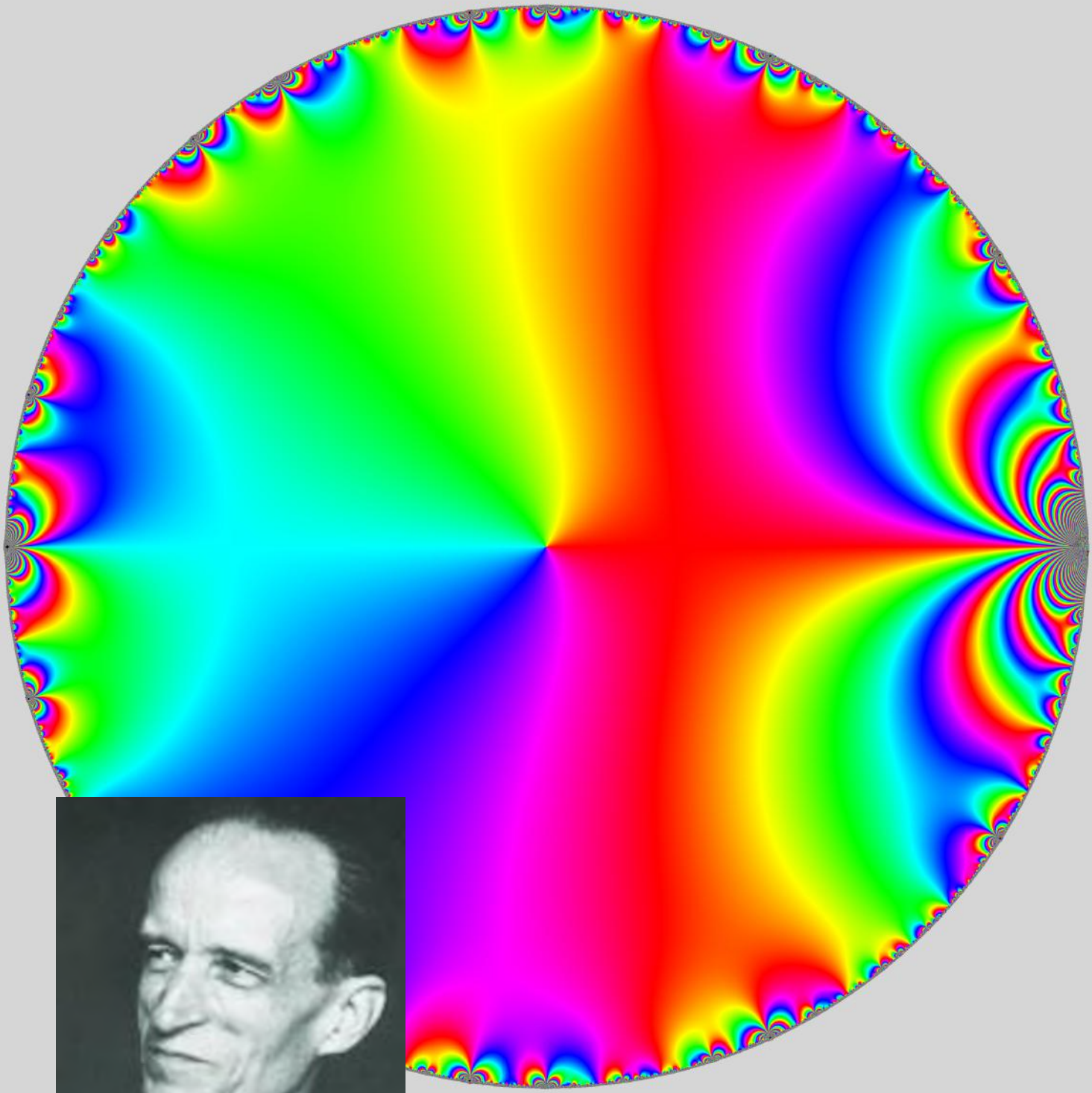


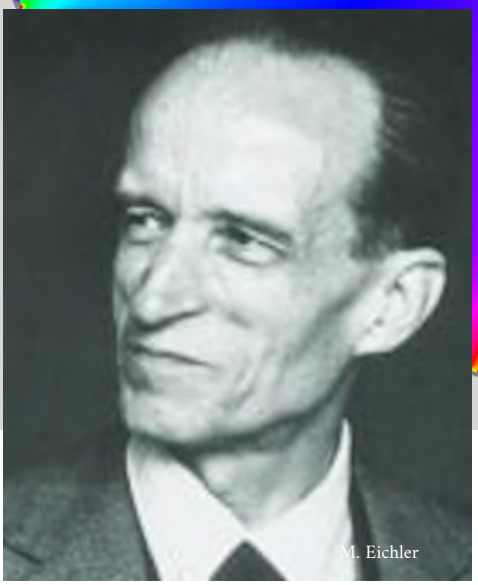
ومهما تكن n، فإننا نحصل على مصفوفة توبليتز، بحيث يكون فيها عناصر القطر ذو الرقم k مساوية لأمثال f ذات الدليل k. من أجل الصورة المُدرَجة لدينا جانباً، نأخذ مصفوفة دوّارة بحيث $c_2 = 2$ و $c_3 = 3$ و $c_{99} = 1$، وجميع العناصر المتبقية $c_j = 0$. ووِفقَاً لنتيجة توبليتز، نأخذ كثيرة الحدود $f(z) = 2z^2 + 3z^3 + z^{99}$ وتُظهر الصورة كثيرة الحدود المُميّزة للمصفوفة الدوّارة من المرتبة 100×100، وصورة دائرة الوحدة وفق الدالة المولّدة $g(z) = z^{-1} + 2z^2 + 3z^3$. بما أن $\omega^{100} = 1$ فإننا نجد أن $f(\omega) = g(\omega)$، والمنحني ذو اللون الأسود الموضح في الشكل يمثل صورة دائرة الوحدة وفق g والذي يتوافق مع أماكن جميع أصفار كثيرة الحدود المُميّزة.

أوتو تويبلتز. Otto Toeplitz (1881 - 1940)

وُلد لعائلة يهودية في مدينة بريسلاو (Breslau) في ألمانيا (حالياً مدينة ڤروتسواڤ (Wroclaw) في بولندا). أكمل تعليمه في بريسلاو، وحصل على درجة الدكتوراه من جامعتها. في عام 1906 ذهب توبليتز إلى غوتنغن و فيها حصل على درجة الأستاذية. وضمت الكلية في غوتنغن، في وقتها، العديد من الكوادر والطلبة. من بينهم ديڤيد هيلبرت، فيليكس كلاين، هيرمان مينكوڤسكي (Hermann Minkowski)، ماكس بورن (Max Born)، ريتشارد كورانت وإرنست هلينجر (Ernst Hellinger). و هناك، كتب توبليتز أبحاثاً عن النظرية الطيفيّة للمؤثرات، وهي النقطة التي كان يعمل هيلبرت على تطويرها. خلال هذه الفترة اكتشف توبليتز ما يُسمّى الآن مؤثرات توبليتز (Toeplitz operators). انتقل توبليتز بعد ذلك إلى جامعة كيل وبقي هناك حتى عام 1928، و انتقل بعدها إلى جامعة بون. في عام 1933، تم فصل المُحاضرين اليهود من الجامعات، و استُثني منهم من تعيّن قبل عام 1914. لهذا السبب، تمكن توبليتز من البقاء في منصبه حتى عام 1935. ومع ذلك، استناداً إلى قوانين نورمبرغ (Nuremberg Laws) تم فصل توبليتز من منصبه في عام 1935. وفي عام 1939، هاجر إلى فلسطين (إسرائيل الآن) حيث شغل منصب المستشار العلمي لإدارة الجامعة العبريّة في القدس. وبعد أقل من عام، توفي مُتأثراً بمرض السل. عمل توبليتز في الفضاءات ذات الأبعاد الغير منتهية، وفي نظرية المؤثرات. تناولت العديد من أبحاثه المصفوفات اللانهائية والأشكال التربيعية المقابلة. وكان مهتماً أيضاً بتاريخ الرياضيات وطرائق تدريسها. نُشِرَ له كتابين بعد وفاته: أحدهما بعنوان "متعة الرياضيات (The Enjoyment of Mathematics)" مع Hans Rademacher، والآخر كتاب "التفاضل والتكامل" .

Toeplitz, Otto, Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Veranderlichen. Math. Ann. 70 (1911), no. 3, 351–376.
Bergmann, Birgit. Transcending Tradition: Jewish Mathematicians in German Speaking Academic Culture. Springer Science and Business Media, 2012.





تموز

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31											

دالة آيشلر المُوَلِّدة (The Eichler Generating Function)

سنقوم هنا بإجراء الحسابات باستخدام الأعداد الطبيعية فقط. إن عمليّتي الجمع والضرب بسيطتان، لكن عند إجراء عملية القسمة فَثَمّة عدة مشكلات، فحتى تكون النسبة b/a عدداً طبيعياً، فإنه يجب أن يكون a قابلاً للقسمة على b.

$a \backslash b$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

من المُثير للدّهشة أنه يمكن تَجَنّب هذه المشكلة في الحساب المِقيَاسي (modular arithmetic)، والذي فيه يمكن أن نأخذ، بعد القسمة على عدد أولي p، بواقي القسمة فقط. و سنوضح ذلك من أجل $p = 5$. الجدول المُوَضّح جانباً يُبيّن الجداءات $a \cdot b$ من أجل كل البواقي a و b بالمقاس 5. كل سطر في هذا الجدول، باستثناء سطر واحد فقط، والذي يكون فيه $a \equiv 0 \pmod 5$، يحوي جميع البواقي ولمرة واحدة فقط دون أي تكرار لأي منها. ونتيجة لذلك فإن المعادلة $a \cdot x = b$ بالمجهول x، ومن أجل $b \neq 0$، لها حل وحيد، نرمز له بالرمز b/a. مثلاً $2/3 \equiv 4 \pmod 5$، إذ إنه من الجدول نلاحظ أن $3 \cdot 4 \equiv 2 \pmod 5$.

بما أنه لدينا، بالمقاس p، عدد منته من البواقي، يساوي p، فإنه أصبح بالإمكان حل المعادلات والمُعقّدة جداً، إذ أنه يمكن تجريب جميع الحلول الممكنة. فعلى سبيل المثال، المعادلة التكعيبيّة

$$y^2 + y = x^3 - x^2 \tag{1}$$

لها بالمقاس 5 أربعة حلول فقط وهي $(x,y) = (0,0)$ و $(0,4)$ و $(1,0)$ و $(1,4)$. وبالمقاس 2019 يوجد 2636 حل، وبالمقاس 20183 يوجد 20334 حل.

يبدو، للوَهلَة الأولى، أنه لا يمكن تصور وجود صيغة لعدد حلول المعادلة (1) بالمقاس p، ولنرمز لهذا العدد بالرمز a_p. على الرغم من ذلك، اكتشف مارتن آيشلر، في عام 1954، طريقة مُدهِشة لحساب هذا العدد. وتُعتبر الدالة، التي تدعى دالة آيشلر المُوَلّدة مفتاح هذا الاكتشاف. إن صورة الغلاف لهذا الشهر توضح صورة الحالة لهذه الدالة، والتي لها التمثيل الآتي

$$f(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2 = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} - 2q^{12} + \dots$$

برهن آيشلر أنه أياً كان العدد الأولي p فإنه يكون $a_p = p - b_p$، حيث b_p تشير إلى أمثال q^n في متسلسلة القوى $f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$. في الحقيقة، لدينا $a_5 = 5 - 1 = 4$، ونجد أيضاً وفقاً لما ورد أعلاه أن $a_7 = 7 - (-2) = 9$ و $a_{11} = 11 - 1 = 10$.

خَمّن يوتاكا تانياما (Yutaka Taniyama) و غورو شيمورا (Goro Shimura) أنه من الممكن تمديد نتيجة آيشلر إلى جميع المعادلات التكعيبية بمتغيرين اثنين. وفي ثمانينيّات القرن الماضي بيّن Gerhard Frey و Jean-Pierre Serre و Kenneth Ribet أن مُخمّنة تانياما-شيمورا تؤدي إلى مُخمّنة فيرما وفي نهاية المَطَاف، تم في عام 1995 استخدام هذا الترابط من قِبَل أندرو وايلز وريتشارد تايلور في إثباتهما المُذهل لمُخمّنة فيرما (أنظر في شهر شباط، من هذا العام).

مارتن آيشلر. Martin Eichler (1912 - 1992)

وُلد في مدينة بينو (Pinnow)، قرب أنكلام في ألمانيا، ابناً لرجل دين. ونظراً لعدم وجود مدارس مناسبة قريبة من منزله، فقد درس في مدرسة داخلية في غوترسلوه (Gütersloh). في عام 1930 بدأ في كونيغسبرغ دراسة الفيزياء والرياضيات، وخلال سنة واحدة من مدة إقامته في زيوريخ، والتي تأثر فيها بأندريس سبيسر (Andreas Speiser)، تحولت اهتماماته إلى الرياضيات. وبعد عودته إلى ألمانيا، درس آيشلر في هالي (Halle) (سايل (Saale))، وحصل في عام 1935 على درجة الدكتوراه تحت إشراف Heinrich Brandt. وبسبب خلافات مع الحكومة المحلية النازية، فقد آيشلر منصبه في الجامعة. و ساعده Helmut Hasse ليكون عضواً مُحَرّراً في موسوعة العلوم الرياضيّاتيّة، وبعد ذلك ليكون عضواً مساعداً في غوتنغن، حيث حصل فيها على درجة الأستاذية في عام 1938. خلال الحرب العالمية الثانية، كان آيشلر يعمل على تطوير الصواريخ V-2 في مركز أبحاث تابع للجيش في Peenemünde. وعندما تم نقله إلى جزيرة يوزدوم (Usedom)، التقى بزوجته المستقبلية. بعد الحرب العالمية الثانية، عاد آيشلر إلى غوتنغن، بعدها قضى سنتين من عام 1947 وحتى 1949 في مؤسسة الطيران الملكية في فارنبرة (Farnborough) بإنكلترا. في عام 1949 رُقّي إلى مرتبة أستاذ استثنائي في مونستر، ثم أستاذاً في ماربورغ في عام 1956. وفي عام 1959 شغل منصب الأستاذية الذي عُرِضَ عليه في بازل (Basel).

تركزت أعمال آيشلر في نظرية الأعداد للرُّباعيّات (quaternion)، والأشكال التربيعية، والأشكال المقيَاسِيّة (quadratic forms)، وفي نظرية ريمان- روش (Riemann-Roch). كان آيشلر واثقاً بنفسه لدرجة جعلته يحظى باحترام جميع زملائه وطلابه.

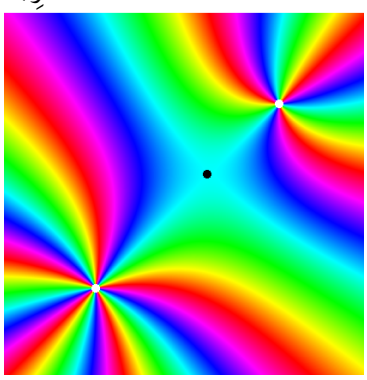
R. Taylor: *Modular arithmetic: driven by inherent beauty and human curiosity*, The Letter of the Institute for Advanced Study, 2012.
E. Frenkel: *Liebe und Mathematik: Im Herzen einer verborgenen Wirklichkeit*, Springer 2014.

آب

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31								

النقاط الحَرِجَة لكثيرات الحدود (Critical Points of Polynomials)

النقاط الحَرِجَة لدالة تحليليّة f هي عبارة عن أصفار المشتق f'. في الشكل المُدرَج جانباً والذي يمثل صورة الحالة لدالة ما، نلاحظ أن النقاط الحَرِجَة



z_0 هي عبارة عن النقاط التي عندها يتلاقى أو يتقاطع اثنين أو أكثر من الخطوط المُلَوّنة كل واحد منها بلون واحد. ففي الحالة الأولى، أي حالة التلاقي، يكون لدينا صفر مضاعف للدالة f (النقاط البيضاء)، وفي الحالة الثانية، حالة التقاطع، يكون $f(z_0) \neq 0$، وندعو z_0 نقطة تسرّج (النقطة السوداء). ولتوضيح ذلك، نأخذ دالة كثيرة الحدود

$$f(z) = (z-a)^n(z-b)^m$$

والتي لها صِفرَين، هما a من المرتبة n، و b من المرتبة m. الشكل المُدرَج جانباً يُظهِر هذه الدالة من أجل

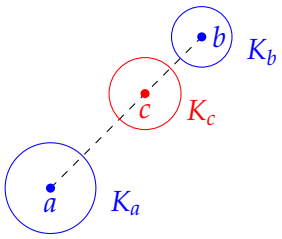
$a = 0$، $b = 1 + i$، $n = 5$، و $m = 3$. باستخدام قاعدة المشتق لجداء نجد المشتق

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1}(z-b)^m + (z-a)^n m(z-b)^{m-1} = (z-a)^{n-1}(z-b)^{m-1}(n(z-b) + m(z-a))$$

وبذلك يكون لدينا النقاط الحَرِجَة الآتية:

- $z = a$ من المرتبة $n - 1$ (ومنه عدد الخطوط المُلَوّنة، كل منها بلون واحد، والتي تتلاقى عند النقطة a يساوي n)
- $z = b$ من المرتبة $m - 1$ (ومنه عدد الخطوط المُلَوّنة، كل منها بلون واحد، والتي تتلاقى عند النقطة b يساوي m)
- $z = \dfrac{ma + nb}{m + n}$ نقطة حَرِجَة بسيطة (من المرتبة الأولى)، تقع على القطعة المستقيمة الواصلة بين a و b (ومنه يوجد خطين من لون واحد متقاطعين في هذه النقطة).

يمكن اعتبار مبرهنة دَائِرَتَي والش (Walsh's two-circle theorem)، أو اختصاراً مبرهنة والش، كنتيجة للحالة المذكورة أعلاه. لنفرض أن كثيرة الحدود f من الدرجة $m + n$، ولها n صفر في القرص المغلق K_a الذي مركزه a ونصف قطره r_a،



و m صفر في القرص المغلق K_b الذي مركزه b ونصف قطره r_b. وليكن K_c القرص الذي مركزه c ونصف قطره r_c، حيث

$$c = \frac{ma + nb}{m + n}, \qquad r_c = \frac{mr_a + nr_b}{m + n}.$$

(أنظر الشكل المُوَضّح جانباً). ولنفرض، من أجل التبسيط، أن الأقراص المغلقة الثلاثة منفصلة مثنى مثنى، من مبرهنة والش نجد أنه يوجد $n - 1$ نقطة حَرِجَة للدالة f تقع في K_a، و $m - 1$ نقطة حَرِجَة في K_b، ونقطة حَرِجَة واحدة في K_c. صورة الغلاف لهذا الشهر تُوَضّح مبرهنة والش من أجل كثيرة حدود من الدرجة 100، بحيث $n = 60$ و $m = 40$.

جوزيف ليونارد والش. Joseph Leonard Walsh (1895 - 1973)

وُلد في العاصمة الأمريكية واشنطن. ودرس في جامعة كولومبيا، وهارفارد، وشيكاغو، و ويسكونسن ماديسون. بدأ في جامعة هارفارد بحثه في الدكتوراه تحت إشراف Maxime Bôcher. ولكن عند نشوب الحرب العالمية الأولى تم تجنيده في الجيش. و لدى عودته إلى هارفارد بعد الحرب، كان مشرفه قد توفي، فأنهى والش أطروحته تحت إشراف George Birkhoff في عام 1920. وخلال إقامته لمدة سنة واحدة في باريس (1920/1921) عمل مع باول مونتيل (Paul Montel) وفي ميونخ (1925/1926) عمل مع كاراثيودوري (Carathéodory). وباستثناء هذه السنوات، كان أستاذاً في جامعة هارفارد، وتُوّجت مسيرته هناك كرئيس لقسم الرياضيات في الفترة من 1937 إلى 1942. خلال الفترة من عام 1942 وحتى 1946 خدم مرة أخرى كقائد في قوات المارينز قبل أن يعود إلى هارفارد. في الفترة (1949-1950) كان رئيساً للجمعية الأمريكية للرياضيات. وبعد تقاعده من جامعة هارفارد في عام 1966، تقلّد منصباً في جامعة ميريلاند وعمل فيها لفترة وجيزة قبل وفاته.

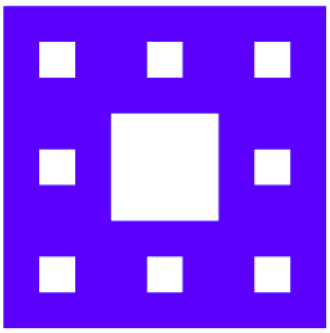
تركّزت أعمال والش في البحث عن مواقع النقاط الحَرِجَة لكثيرات الحدود والدوال الكسرية، وفي التطبيقات الحافظة للزوايا، وفي نظرية التقريبات. وتُستخدم اليوم دوال والش (Walsh functions) في معالجة الإشارة. تجسّد شَغَفُ والش في الرياضيات من خلال أبحاثه التي بلغ عددها مِئتين وتسعة وسبعين بحثاً، وسبعة كتب، وواحد وثلاثين طالب دكتوراه.

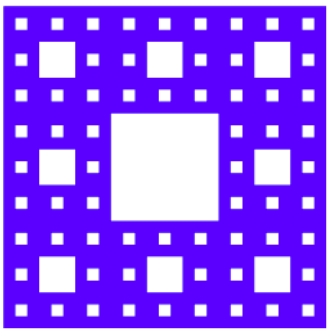
أيلول

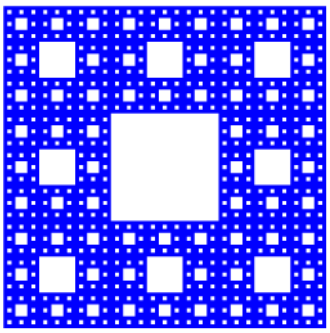
Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30						

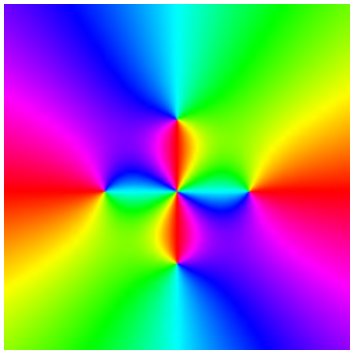
منحنيات سيربينسكي ومجموعات جوليا (Sierpiński Curves and Julia Sets)

لنبدأ بما يُسمّى سجّادة سيربينسكي (Sierpiński carpet)، والتي يتم تشكيلها بالشكل الآتي: نأخذ المربع (المحيط مع داخله) $[0,1] \times [0,1]$، ونقسمه إلى تسعة مربعات جزئية طبوقة (أنظر الأشكال المُدرَجة أدناه) ونحذف منه المربع الأوسط، $[1/3,2/3] \times [1/3,2/3]$. نكرر هذه العملية، فنحصل على الشكل الأول المُدرَج أدناه من جهة اليمين. عند الاستمرار بإجراء العملية السابقة نحصل على سجّادة سيربينسكي، نرمز لها بالرمز $\mathcal{C}$. منحني سيربينسكي هو مجموعة مستوية متماثلة استمرارياً (homeomorphic) مع $\mathcal{C}$.

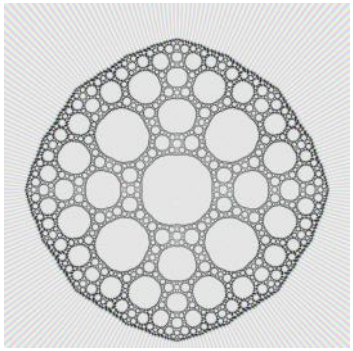








من المثير للدهشة، هو أنه يمكن الحصول على منحنيات سيربينسكي في الديناميكا العُقَديّة (complex dynamics): لتكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دالة عُقَديّة معطاة، ولننظر في التكرار من المرتبة n للدالة f، أي في $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$، ولنأخذ هذا التركيب $n-1$ مرة. مدار النقطة z بالنسبة للدالة f هو المتتالية $(f^n(z))_{n=0}^{\infty}$. هذه التكرارت تقسم المستوي العقدي إلى مجموعتين، مجموعة فاتو (Fatou set)، ومجموعة جوليا (Julia set). مجموعة جوليا تحوي كل النقاط التي من أجلها أي تغيير صغير يطرأ في القيمة الابتدائية، قد يُغيّر المدار بشكل جذري. ومن أجل العديد من الدوال الكسرية f إن مجموعة جوليا هي ذاتها منحني سيربينسكي. (أنظر في شهر تموز، عام 2012). اخترنا الدالة $f(z) = z^2 - (1/16)(1/z^2)$ والشكل المُدرَج جانباً يوضح صورة الحالة لهذه الدالة. عندما تكون $|z|$ كبيرة، فإن هذه الدالة تسلك سلوك الدالة $\tilde{f}(z) = z^2$، والنقاط البعيدة عن المبدأ تتحرك بسرعة مبتعدة عن المبدأ.



المنطقة السوداء، في الشكل المُدرَج جانباً، تبيّن مجموعة جوليا للدالة f. وصورة الغلاف لهذا الشهر تُوَضّح صورة الحالة للتكرار الخامس f^5. وكلما كانت $|z|$ كبيرة فإن هذه الدالة تسلك سلوك z^{32}، وهذا ما نراه في الصورة، وكلما كانت $|z|$ صغيرة فإن صورة الحالة تكون أكثر تفصيلاً ويبدأ منحني سيربينسكي بالظهور.
بأخذ دوال كسرية أخرى مختلفة فإننا نحصل على العديد من منحنيات سيربينسكي المختلفة. وبشكل خاص، الدالة $g(z) = z^2 + \lambda/z$، حيث $\lambda \approx -0.593$، تؤدي إلى مثلث سيربينسكي.

ڤاتسلاڤ فرانسيسك سيربينسكي. Wacław Franciszek Sierpiński (1882 - 1969)

وُلد في وارسو. وعندما كان طالباً في مرحلة البكالوريوس بجامعة وارسو، فاز بالميدالية الذهبية لأفضل مقال، يكتبه الطلبة، حول مساهمة ڤورونوي (Voronoy) في نظرية الأعداد. وعلى الرغم من قَبول المقال للنشر، إلا أنه تراجع عن نشره لأنه لم يكن راغباً بطباعة أول عمل له باللغة الروسية. لكن بعد مُضي أربع سنوات نُشرت ورقته هذه بالبولندية. في عام 1906 حصل على درجة الدكتوراه من جامعة Jagiellonian في كراكوڤ (Kraków)، وتم تعيينه في جامعة Lwów منذ عام 1908 وحتى 1914. قضى سيربينسكي سنوات الحرب العالمية الأولى في موسكو، وعندما انتهت هذه الحرب، عاد إلى Lwów وبعدها انتقل إلى جامعة وارسو. خلال الحرب البولندية السوڤيتية، عمل سيربينسكي في مجال فك الشيفرات وحل رموزها في وكالة التشفير البولندية.
كان عمل سيربينسكي الأساسي مُرَكّزاً في نظرية المجموعات، والتبولوجيا ، وفي نظرية الأعداد. وكان نِتَاجُه العلمي غزيراً، فنشر خلال مسيرته العلميّة أكثر من سبعمئة بحث، وخمسين كتاباً. وفي عام 1920 أسّس سيربينسكي بالاشتراك مع Zygmunt Janiszewski و Stefan Mazurkiewicz مجلة "أساسيات الرياضيات (Fundamenta Mathematicae)". في عام 1944 أَحرَق النازيّون منزله، ما أدى إلى تدمير مكتبته وضياع رسائله الشخصية. حصل سيربينسكي على العديد من الأوسمة والتشريفات، منها عشر درجات دكتوراه فخرية، وانتخابه نائباً لرئيس الأكاديمية البولندية، ورئيس الجمعية البولندية للرياضيات، وانتخابه في العديد من المؤسسات المرموقة، من بينها الأكاديمية البولندية للعلوم، والأكاديمية الوطنية الأمريكية للعلوم، وأكاديمية باريس، والأكاديمية الألمانية للعلوم. وفي عام 1949 حصل على جائزة بولندا العلمية من الدرجة الأولى.

Robert L. Devaney, Cantor and Sierpiński, Julia and Fatou: Complex Topology Meets Complex Dynamics. Notices of the AMS, January 2004, pp. 9–15.

تشرين الأول

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31										

نواة بيرغمان (The Bergman Kernel). [كتبها Albrecht Böttcher]

فضاء بيرغمان $A^2(\mathbb{D})$ هو فضاء هيلبرت لجميع الدوال f التحليليّة في قرص الواحدة المفتوح $\mathbb{D}$، والتي من أجلها يكون $\|f\|^2 := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dA(z) < \infty$، حيث $dA(z) = dx\,dy/\pi$ هو قياس المساحة. إن معادلة توبليتز في $A^2(\mathbb{D})$ هي من الشكل

$$(T(a)f)(z) := \int_{\mathbb{D}} a(w)(1 - z\overline{w})^{-2} f(w)\, dA(w) = g(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

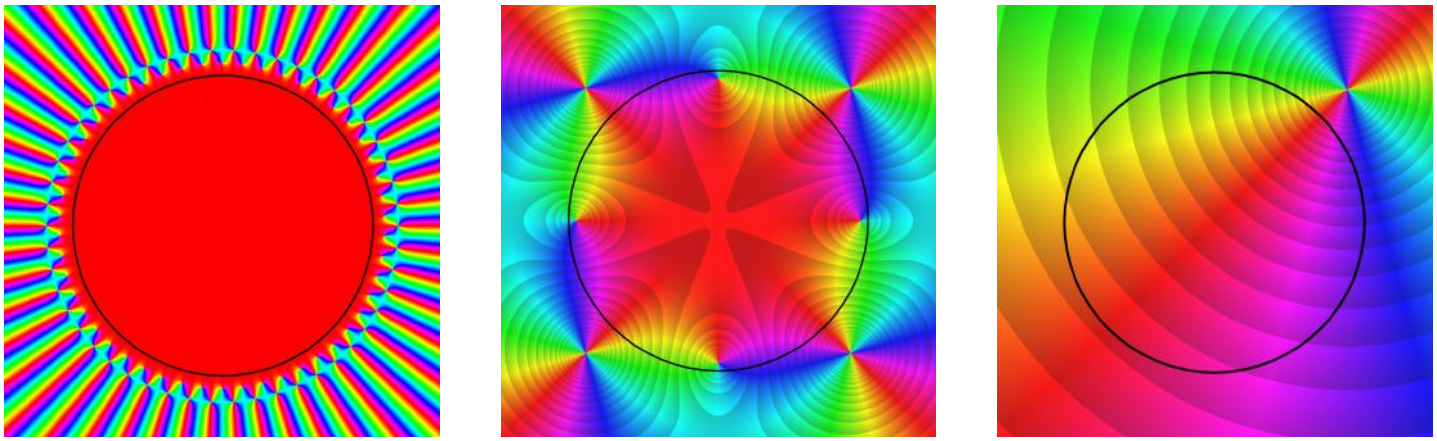
حيث أن $g \in A^2(\mathbb{D})$، و $a \in L^\infty(\mathbb{D})$ هي دوال معلومة، و $f \in A^2(\mathbb{D})$ هي دالة يُراد البحث عنها. الدوال:

$$K_w(z) = (1 - z\overline{w})^{-2}, \quad w \in \mathbb{D}$$

تُدعى نُوَى بيرغمان (Bergman kernels). وهذه الدوال تتمتع بالخاصة الآتية: أياً كان $f \in A^2(\mathbb{D})$ فإن الجداء السّلّمي للدالة f بالنواة K_w يساوي القيم $f(w)$. الصورة المُدرجة أدناه ومن جهة اليمين توضح مثل هذه النواة. ومعادلات مؤثرات توبليتز في فضاء هاردي يمكن أن تُحل باستخدام تحليل هوبف-ڤينر (Wiener-Hopf factorization). ولا يمكن استخدام ذلك في فضاء بيرغمان، والطرائق التقريبية هي الطريق الوحيد المعروف لحل المعادلة التكامُليّة في هذا الفضاء. إحدى هذه الطرق هي طريقة تجميع العناصر التحليليّة (analytic element collocation): نبحث عن الحل التقريبي f_n على شكل تركيب خطي $f_n = \sum_{j=1}^n x_j K_{z_j}$ للعناصر التحليليّة K_{z_j} ونحدد المُعامِلات x_j بشرط

$$(T(a)f_n)(z_j) = g(z_j), \quad j = 1, \ldots, n$$

وهذا عبارة عن جملة معادلات خطية، عددها n، وعدد مجاهيلها x_j يساوي n. في العمل المشترك الذي قام به Hartmut Wolf و Albrecht Böttcher، تم إظهار التقارب لهذه الطريقة وذلك عندما تكون a مستمرة في $\overline{\mathbb{D}}$، والمؤثر $T(a)$ قابِل لِلقَلب، وفي الخطوة n، تُؤخذ النقاط $z_1, \ldots, z_n$ بشكل تكون فيه عبارة عن أصفار $z^n - r^n$ من أجل $r \in (0,1)$ عدد مُثبّت.



في الصورتين، الوسطى والمُدرَجة في اليسار، نرى المجموع لأربع نُوَى، ولخمسين نواة من نُوَى بيرغمان على الترتيب.

ستيفان بيرغمان. Stefan Bergman (1895 - 1977)

ولد في مدينة تشيستوخوفا (Czestochowa)، في بولندا (والتي كانت سابقاً كانت جزءاً من الإمبراطورية الروسية). حصل على درجة الدكتوراه من جامعة برلين في عام 1921 تحت إشراف Richard von Mises. في عام 1922، قدم النواة التي حملت فيما بعد اسمه "Bergman kernel". في عام 1939، ولأنه كان يهودياً، فُصِلَ من منصبه في جامعة برلين. فانتقل إلى روسيا، وبعدها إلى باريس، وفي عام 1939، هاجر إلى الولايات المتحدة الأمريكية. ودرّس في جامعة ستانفورد بدءاً من عام 1952 وحتى تقاعده في عام 1972. توفي في مدينة Palo Alto بكاليفورنيا، عن عمر ناهز 82 عاماً.

يروي Stephen Krantz أنه: "كلما أثبت شخص ما نظرية جديدة حول نواة بيرغمان أو مترك بيرغمان (the Bergman metric)، يقوم بيرغمان بدعوته إلى منزله لتناول العشاء، فقد اشتَهر بيرغمان وزوجته بِكَرَم الضيافة، ما يجعل ضيوفهم يشعرون بحرارة ترحيبهم لهم. وبعد العشاء تُعطى الكلمة للضيف، إذ يتوجب عليه إعطاء محاضرة مُرتَجَلة حول أهمية نواة بيرغمان.

Steven G. Krantz, Mathematical anecdotes. *Math. Intelligencer* 12 (1990), no. 4, pp 32–38.

تشرين الثاني

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30								

الدالة إيتا لديرخليه (The Dirichlet η Function)

تُعرّف الدالة إيتا لديريخليه بدلالة متسلسلة ديريخليه بالشكل:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

هذه المتسلسلة متقاربة من أجل كل الأعداد العُقَديّة s ذات الجزء الحقيقي الموجب. هذا التعريف يقودنا إلى المقارنة مع دالة زيتا لريمان (Riemann zeta function) المُعَرّفة بالشكل: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^s)$، وهذه المتسلسلة متقاربة من أجل كل الأعداد العُقَديّة s التي جزؤها الحقيقي أكبر من 1. (أنظر في شهر تشرين الثاني، من عام 2011). دالة زيتا لريمان لها تمديد ميرومورفي إلى كامل $\mathbb{C}$، ولها أيضاً قطب بسيط عند $s = 1$. وفي الحقيقة، ترتبط الدالة إيتا بالدالة زيتا من خلال الصيغة الآتية:

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \tag{1}$$

من هذه الصيغة نلاحظ أن أصفار الدالة η تشمل أصفار الدالة ζ.
أثبت ريمان أنه لا يوجد أصفار للدالة زيتا في المجموعة $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(s) > 1\}$ وبيّن أن أصفارها، الواقعة في النصف الأيسر، هي فقط الأعداد الزوجيّة السالبة. بعد ذلك أثبت Hadamard و de la Vallée-Poussin في عام 1896، كل منهما بشكل مستقل عن الآخر، أنه لا يوجد أصفار للدالة ζ تقع على المستقيم $\mathrm{Re}\,(s) = 1$. ومن أجل، ما يُسمّى الشريط الحَرَج، $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\,(s) \leq 1\}$ بيّن ريمان أنه يجب أن تَتَوضّع الأصفار بشكل مُتَنَاظِر بالنسبة للمستقيم $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$. وبالتالي فإن جميع الأصفار، غير التافهة، للدالة زيتا يجب أن تكون واقعة داخل الشريط الحَرِج. فرضيّة ريمان هي عبارة عن مُخَمّنة تنص على أن أصفار الدالة زيتا هي عبارة عن الأعداد الزوجيّة السالبة والأعداد العُقَديّة z التي جزؤها الحقيقي يساوي $1/2$.
في صورة الغلاف لهذا الشهر نرى أصفار الدالة إيتا لديريخليه، الواقعة على طول الجزء السالب من المحور الحقيقي (وهذه هي الأصفار التافهة للدالة ζ)، ومستقيمين شاقوليين تقع عليهما الأعداد العُقَديّة ذات الجزء الحقيقي الذي يساوي $1/2$ و 1. بالإضافة إلى أصفار الدالة زيتا، فإن للدالة إيتا أصفاراً أخرى وذلك عندما ينعدم العامل $(1 - 2^{1-s}) = 0$، الموجود في (1)، وهذا يحدث عند النقاط $s_n = 1 + 2n\pi i/log(2)$، وذلك أياً كان العدد الصحيح n المغاير للصفر. وبما أن هذه الأصفار لا تقع داخل الشريط الحَرِج، فإن للدالة زيتا وإيتا نفس الأصفار في الشريط الحَرِج.

بيتر غوستاف ديريخليه. Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859)

وُلِدَ في مدينة دورين (Düren)، والتي كانت آنذاك جزءاً من الإمبراطورية الفرنسية الأولى. درس المرحلة الثانوية (التي كانت تُسَمّى بالألمانية الجَمنازيوم (gymnasium)) في مدينة بون (Bonn)، وبعدها في مدينة كولونيا (Cologne). ذهب بعدها في عام 1822 إلى باريس، حيث كان يعمل فورييه وبواسون. وقد أَقَرّ كل من فورييه وڤون هومبولت (von Humboldt) بأول بحث له في عام 1827، وبدعم من هومبولت، حصل على وظيفة في جامعة بريسلاو (Breslau). بعد حصوله على درجة الدكتوراه، من جامعة بون، في عام 1828، تمت ترقيته إلى مرتبة أستاذ مشارك (كبير المحاضرين)، وفي وقت لاحق من ذلك العام تولّى منصباً في المدرسة العسكرية العامة. وفي خلال تواجده بالمدرسة، كان يُدَرّس أيضاً في جامعة برلين حيث أصبح فيها الأستاذ الأعلى مقاماً في عام 1839. تزوج ديريخليه من Rebecka Mendelssohn، شقيقة Felix Mendelssohn-Bartholdy.
انتقل دييريخليه في عام 1855 إلى غوتنغن لِيَخلُف غاوص. وفي عام 1858، سافر إلى سويسرا لإلقاء خطاب تذكاري عن غاوص. و أصيب هناك بنوبة قلبية، وتوفي في العام التالي عن عمر يناهز 54 عاماً. كان من بين الطلاب الذين حضروا محاضرات ديريخليه: Eisenstein، كرونيكر، ريمان، وديديكيند. في عامي 1856 و 1857، ألقى محاضرات حول نظرية الكُمُون (potential theory)، تم نشرها في عام 1876، لكن رُبّما كان أكثر ما اشتُهِرَ عنه هو عمله في نظرية الأعداد. استخدم ديريخليه مبدأ برج الحَمَام في إثبات مبرهنة في نظرية تقريب ديوفانتس، كان لها إسهام هام في مبرهنة فيرما الأخيرة من أجل الحالتين $n = 5$ و $n = 14$. (قارن هذا مع العلماء آنفي الذكر، في شهر شباط، في تقويم هذا العام)، ودرس أيضاً مسألة القيم الحديّة الأولى. ويعود له الفضل في تطويره لتعريف مفهوم الدالة، والذي نستخدمه في الوقت الحاضر. لم ينشر ديريخليه الكثير من الأبحاث، ولقد صَرّح غاوص بأن " أعمال غوستاف ديريخليه كالجوهرات، ولا يمكن للمجوهرات أن تُوزَن بميزان البقّال".

P. Gorkin and J. Smith, Dirichlet: his life, his principle, and his problem. *Math. Mag.* 78-4, 2005, pp. 283–296.

كانون الأول

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31					

بَاقَةُ كانتور (Cantor Bouquet)

في أشهر سابقة في التقاويم الصادرة في سنوات سابقة، ومن ضمنها شهرأيلول في تقويم هذا العام، تم تناول مجموعات جوليا. سننظر الآن في مجموعة أخرى مختلفة من مجموعات جوليا، والتي تُسَمّى باقة كانتور، وهي مجموعة متماثلة استمرارياً مع فُرشَاة مستقيمة (straight brush). والفرشاة المستقيمة هي مجموعة جزئية B من $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ and } y \in \mathcal{T}\}$ حيث أن $\mathcal{T}$ هي مجموعة كثيفة جزئية من الأعداد الغير النسبية، والمجموعة B تحقق الخواص الثلاث الآتية:

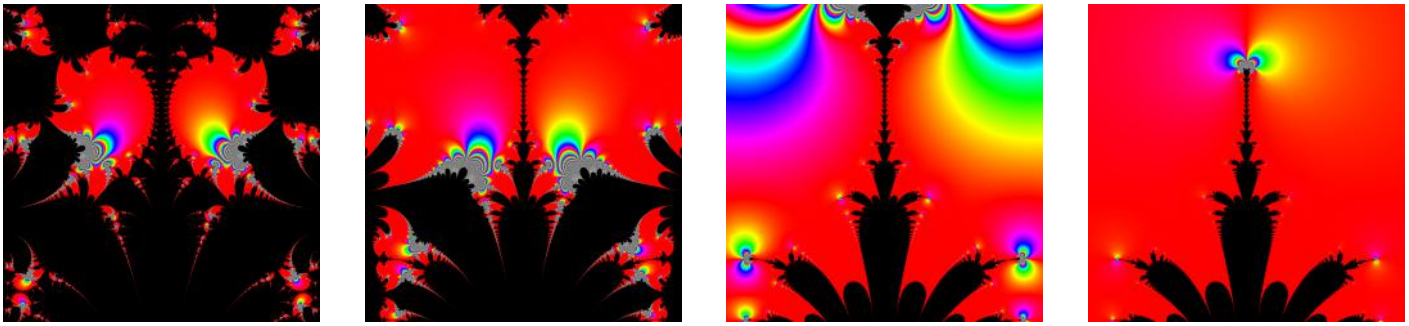
خاصة كثافة الشّعر (Hairiness): مهما تكن النقطة $(x,y) \in B$، يوجد $t_y \in [0,\infty)$ بحيث $\{t : (t,y) \in B\} = [t_y,\infty)$. النقطة (t_y,y) هي نقطة النهاية للشّعرَة المُعطَاة بالشكل $[t_y,\infty) \times \{y\}$.

خاصة كثافة نقطة النهاية (Endpoint density): مهما تكن النقطة $(x,y) \in B$، يوجد زوج من المتتاليات (b_n) و (c_n) في $\mathcal{T}$ بحيث $b_n \to y$ من الأسفل، و $c_n \to y$ من الأعلى، بحيث $t_{b_n}, t_{c_n} \to x$.

خاصة الإغلاق (Closedness): المجموعة B جزئية ومغلقة في $\mathbb{R}^2$.

هذا التعريف الجوهري والهام يؤدي إلى مجموعة تبولوجية ثريّة. ويمكن الحصول على باقة كانتور باعتبارها مجموعة جوليا للدالة الأسية $f_\lambda(z) = \lambda e^z$، حيث $0 < \lambda < 1/e$. من أجل صورة الغلاف لهذا الشهر تم اختيار صورة الحالة (phase poetrait) لاثنين وعشرين تكراراً للدالة الأسية f_λ من أجل $\lambda = 1/e + 1/50$. (وتم تدويرها بمقدار تسعين درجة لأسباب تتعلق بجماليّتها). وفي هذه الحالة فإن مدار العدد 0 يسعى إلى ∞، ومجموعة جوليا تكون عبارة عن كامل $\mathbb{C}$، لكن التكرارت الأولى لا تزال تُظهر الارتباط مع باقة كانتور.

في الصور المُدرَجة أدناه نلاحظ كيف أن صورة الحالة تتغير بشكل جذري مع ارتفاع عدد التكرارات. ففي الصورة المُدرَجة أدناه، من اليمين إلى اليسار، عدد التكرارات المُستَخدَمة هو: 17، 20، 23، و 42.



جورج فيرديناند كانتور. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918)

وُلد في مدينة سانت بطرسبرغ (St. Petersburg)، لأب تاجر وأم فنانة. وعندما كان في الحادي عشرة من عمره، انتقلت عائلته إلى فرانكفورت وانتقل إلى المدرسة الثانوية الألمانية. بدأ دراسته للرياضيات في كلية زيوريخ التطبيقية، ثم انتقل إلى جامعة برلين، حيث كتب فيها أطروحته في نظرية الأعداد تحت إشراف ڤايرشتراوس (Weierstrass) وكومير (Kummer). حصل على درجة الأستاذية في هالي (Halle)، وبقي فيها طول حياته.

يعتبر كانتور مؤسس نظرية المجموعات الحديثة. وحتى يومنا، لا تزال أعماله ذات تأثير كبير في الرياضيات. لكن خلال فترة عمله لم تلقى أعماله القبول من قِبَل بعض علماء الرياضيات البارزين والمؤثرين، لا سيما كرونيكر، فقد كان رافضاً لآرائه وأعماله. أجرى كانتور على فترات طويلة عدداً كبيراً من المراسلات الرياضيّاتيّة والمكثفة مع ديديكيند، شڤارتز (H. A. Schwarz)، وميتاغ ليفلر (Mittag-Leffler). كان لكانتور دور أساسي في إنشاء الجمعية الرياضيّاتيّة الألمانية، وتم انتخابه كأول رئيس لها. تزوج من ڤالي غوتمان (Vally Guttman) وأنجب منها ستة أطفال. وكان له بيت جميل في هالي. ومع ذلك، مع تقدم عمره، كان يعاني من نوبات اكتئاب عميقة، وكان من الصعب عليه أن يستمر في العمل، الأمر الذي أدى إلى إعفائه من مهام التعليم. خلال هذه الفترات كان يميل للتحول إلى الفلسفة والدين. ولكنه استمر في عمله في الرياضيات. توفي كانتور في المَصحّة، عن عمر يناهز 73 سنة، في ظروف يائسة خلال الحرب العالمية الأولى.

R. L. Devaney, Cantor and Sierpinski, Julia and Fatou: Complex Topology Meets Complex Dynamics, *Notices of the AMS*, 51-1, January 2004.
H. Meschkowski, Georg Cantor, Leben, Werk und Wirkung, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1983.