سلسلة إحياء تراث الرياضيات في النصف الثاني من القرن العشرين.(1)

كلماتٌ حول الفضاءات المتريّة

خلاصة مقتبسة من محاضرات

أ.د. موفق دعبول

1) الفضاء المتري:هو ثنائية $(\mathbb{X}, d)$مسقطها الأول مجموعة غير خالية (سندعو عناصرها نقاطاً) ومسقطها الثاني "تابع مسافة" وهو تابع منطلقه$\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ ومستقره في $\mathbb{R}_+$ يحقق ما سيأتي من شروط :

$$(*)\forall \quad x_1, \mathrm{x}_2, x_3 \ \in \mathbb{X}:$$

1. $d(x_1, \mathrm{x}_2) = 0 \iff \quad x_1 = \mathrm{x}_2$
2. $d(x_1, \mathrm{x}_2) = d(x_2, \mathrm{x}_1) \geq 0$
3. $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ (متراجحة المثلث)

☜ نسمي كرة مفتوحة في $\mathbb{X}$ مركزها $x_1 \in \mathbb{X}$ ونصف قطرها عدد حقيقي موجب تماماً r مجموعة النقاط $x \in \mathbb{X}$ المحققة للمتراجحة $d(x, x_1) < r$ ويرمز لها بـ $B(x_1, r)$ (أوبـ $N_{\mathrm{r}}(x_1)$ أو بـ$S(x_1, r)$)

وعادةً تُسمى الكرة المفتوحة قرصاً مفتوحاً في حالة $(\mathrm{K} = \mathbb{C})$ أو مجالاً مفتوحاً في حالة$(\mathrm{K} = \mathbb{R})$.

وإذا كانت $G \subseteq \mathbb{X}$ فنسمي كرة مفتوحة في G مركزها النقطة $x_1 \in G$

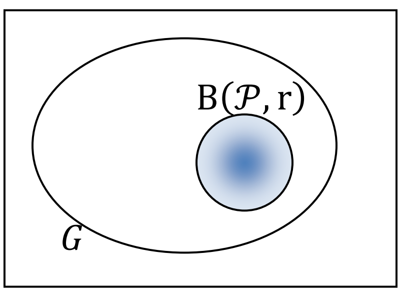
ونصف قطرها $r > 0$ مجموعة النقاط $x \in G$ المحققة لـ $d(x, x_1) < r$ ويرمز لها بـ $B_G(x_1, r)$ أو بـ $B(x_1, r)$ إن أُمن اللبس وفُهِم ذلك من السياق .

- نقول عن مجموعة A ، $A \subseteq G \subseteq \mathbb{X}$، إنها مفتوحة في G إذا كانت اتحاداً لكرات مفتوحة في G .
- نقول عن مجموعة B ، $B \subseteq G \subseteq \mathbb{X}$ ، إنها مغلقة في G إذا كانت مكملتها في G: $A = G - B$ مفتوحة في G .

وهكذا تكون A مفتوحة في $\mathbb{X}$ إذا كانت A اتحاداً لكرات مفتوحة في $\mathbb{X}$.

و تكون B مغلقة في $\mathbb{X}$ إذا كانت $\mathbb{X} - B = B^C$ مفتوحة في $\mathbb{X}$.

2) تعاريف لابد منها (مفهوم الجوار وما يشتق عنه من مفاهيم أخرى):



$(\mathbb{X}, d)$

لتكن G مجموعة جزئية من $\mathbb{X}$ و $\mathcal{P}$ نقطة من $\mathbb{X}$:

- نقول إن G جوار لـ $\mathcal{P}$ أو مجاورة لـ $\mathcal{P}$ إذا حوت G كرة مفتوحة في $\mathbb{X}$ مركزها $\mathcal{P}$

أي إذا وجد $r > 0$ بحيث $B(\mathcal{P}, r) = \{q \in \mathbb{X} : d(\mathcal{P}, q) < r\} \subseteq G$

- نقول إن $\mathcal{P}$ نقطة داخلية في G إذا كانت G جواراً لـ $\mathcal{P}$ أي إذا حوت G كرة مفتوحة في $\mathbb{X}$ مركزها $\mathcal{P}$. نسمي مجموعة النقط الداخلية في G بداخل G ونرمزها G° أو $\text{int}G$.
- نقول إن $\mathcal{P}$ نقطة لاصقة بالمجموعة G (أوملاصقة لها) إذا كان كل جوار لـ $\mathcal{P}$ لابد وأن يحوي نقطة q من G (قد تكون مساوية لـ $\mathcal{P}$).

نسمي مجموعة النقط الملاصقة لـ G بـ لصاقة G (أوالمجموعة الملاصقة لـ G)ونرمزها بـ $\overline{G}$.

- نقول إن $\mathcal{P}$ نقطة تجمع (أو تراكم أو نقطة حدية) لـ G إذا كان كل جوار لـ $\mathcal{P}$ لابد وأن يحوي نقطة q من G مغايرة لـ $\mathcal{P}$.

نرمز لمجموعة نقاط التجمع لـ G بـ G' ونسميها المجموعة المشتقة من G .

☜ نقول إن $\mathcal{P}$ نقطة محيطية بالنسبة إلى المجموعة G إذا كان كل جوار ل $\mathcal{P}$ لابد وأن يحوي نقطة من G و نقطة من مكملتها G^c .

نرمز لمجموعة النقاط المحيطية لـ G بـ $Fr(G)$ ونسميها محيط G أو جبهة G .

☜ نقول إن $\mathcal{P}$ نقطة خارجية بالنسبة إلى المجموعة G إذا حوت مكملتها جواراً لـ $\mathcal{P}$.

نسمي مجموعة النقاط الخارجية بالنسبة إلى المجموعة G بخارج Gونرمزها بـExtG.

☜ نقول إن $\mathcal{P}$ نقطة منعزلة في G إذا وجد جوار ل $\mathcal{P}$ لايشترك مع G إلا في النقطة $\mathcal{P}$.

☜ نقول إن G مفتوحة في $\mathbb{X}$ إذا كانت اتحاداً لكرات مفتوحة .

✍ ويلزم ويكفي لكي تكون Gمفتوحة أن تكون كل نقطة فيها نقطة داخلية (أيG= G').

✍ ويلزم ويكفي لكي تكون Gمفتوحة أن تكون جواراً لكل نقطة من نقاطها .

☜ نقول إن G مغلقة في $\mathbb{X}$ إذا حوت جميع نقاطها المحيطية (أي $\mathrm{Fr(G)} \subseteq G$)

✍ ويلزم ويكفي لكي تكون Gمغلقة أن تحوي جميع نقاط تجمعها (أي$\mathrm{G}^{\circ} \subseteq G$)

✍ ويلزم ويكفي لكي تكون Gمغلقة أن تحوي جميع نقاطها الملاصقة (أي $\overline{\mathrm{G}} = G$)

........**........**........

3) تمارين وتتمات :

بين أن القضايا الآتية صحيحة في أي فضاء متري $(\mathbb{X}, \mathrm{d})$ حيث $\mathcal{P} \in \mathbb{X} \& \mathrm{G} \subseteq \mathbb{X}$:

- G مغلقة إذا كان $\mathrm{G}' \subseteq \mathrm{G}$.
- G مغلقة إذا كان $\mathrm{Fr(G)} \subseteq \mathrm{G}$.
- كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة .
- كل جوار لنقطة تجمع $\mathcal{P}$ لمجموعة G يحوي عدداً غير من نقاط G .
- أي اتحاد لمفتوحات مفتوحة وأي تقاطع لمغلقات مغلقة .
- أي تقاطع منته لمفتوحات مفتوحة و أي اتحاد منته لمغلقات مغلقة .
- $\mathbb{X}$, $\emptyset$ مفتوحتان ومغلقتان معاً.

. $\overline{G} = G \cup G'$

. $\overline{G} = G \cup Fr(G)$

$\overline{G}$ هي أصغر مغلقة تحوي G .

. $Fr(G) = \overline{G} - G^{\circ}$

. $Fr(G) = \overline{G} \cap \overline{G^{c}}$

$Fr(A \cup B) \neq Fr(A) \cup Fr(B)$ حيث $B, A \subseteq \mathbb{X}$.

$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ حيث $B, A \subseteq \mathbb{X}$.

$(A \cup B)^{\circ} \neq A^{\circ} \cup B^{\circ}$ حيث $B, A \subseteq \mathbb{X}$.**برر ذلك**.........

........**........**........

4) مفهوم النهايات والاستمرار: في فضاء متري $(\mathbb{X}, d)$

تعريف النهاية: لدينا $(\mathbb{X}, d)$ و $(\mathbb{Y}, \rho)$ فضاءان متريان و $G \subseteq \mathbb{X}$

و $\begin{pmatrix} f: G \longrightarrow \mathbb{Y} \\ x \longmapsto f(x) \end{pmatrix}$ و $a \in \overline{G}$ (نقطة ملاصقة لـ G) و $b \in \mathbb{Y}$

نقول إنَّ $f(x)$ينتهي إلى b عندما تسعى x إلى a إذا تحقق الآتي :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in G , d(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

ونرمز لذلك كمايلي : $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in G}} f(x) = b$.

تعريف الاستمرار: f مستمر عند $a \in G \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \in G}} f(x) = f(a)$

يقال إنَّ f مستمر في G إذا كان مستمراً عند كل نقطة a من G وهذا يكافيء:

الصورة العكسية لأي مفتوحة في المستقر تكون مفتوحة في المنطلق .

5) التراص في فضاء متري:

تعريف :لتكن $\mathbb{X} \supseteq K$ مجموعة غير خالية ، نقول إن K متراصة في $\mathbb{X}$ إذا كانت لكل متتالية $\{x_n\}_{n\geq 1}$من عناصر K ،
متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ متقاربة نحو عنصر من K .

مبرهنة(1):(أ) إذا كانت K متراصة فإن K مغلقة ومحدودة .

(ب) كل مغلقة محتواة في متراصة تكون متراصة .

(ج) كل مجموعة محدودة محتواة في متراصة تكون لصاقتها متراصة

مبرهنة (2):(أ) إذا كانت $\{K_j\}_{j\in L}$ جماعة من المتراصات متمتعة بخاصة التقاطع المنتهي (أي تقاطع كل جماعة جزئية منتهية منها غير خالٍ) فعندئذٍ يكون تقاطعها غير خال.

(ب) إذا كانت $\{K_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة من المتراصات غير الخالية فإن تقاطعها غير خال .

مبرهنة (3):(أ) إذا كانت $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ فكل مجال في $\mathbb{X}$ مغلق ومحدود هو مجموعة متراصة .

(ب) مبرهنة هايني—بوريل:

$\mathbb{X} \supseteq K$ متراصة $\Leftrightarrow$ K مغلقة ومحدودة .

(حيث $\mathbb{X}$ فضاء إقليدي منتهي البعد: $\mathbb{X} = \mathbb{R}^m$ أو $\mathbb{X} = \mathbb{C}^m$)

مبرهنة (4):(مبرهنة فايرشتراس) :

كل مجموعة غير منتهية ومحدودة في $\mathbb{R}^k$ لها نقطة تجمع واحدة على الأقل .

تمرين مشهور (1):لايمكن لأية مجموعة متراصة K جزئية من مفتوحة G أن تقترب من محيط G بالقدر الذي نريد :

$$\exists r > 0 : d(\mathcal{P}, q) \geq r \ , \forall \mathcal{P} \in K \ , \forall q \in \partial G$$

الإثبات :

انظر (3-2-14) ، صفحة 53 ، من التحليل (6)أو(3-4-18) ، صفحة 69 ، (ثمة برهانان جميلان)

حاول إيجاد برهان بلغة المتتاليات .

6) الاستمرار والتراص :

مبرهنة 1: إذا كان $f:\mathbb{X}\to Y$ مستمراً وكانت $K\subseteq\mathbb{X}$ متراصة ، فإنَّ : $f(K)$ متراصة.

مبرهنة 2: إنَّ كل تابع مستمر على متراصة يكون مستمراً بانتظام.

مبرهنة 3: ليكن $(\mathbb{X},d)$ فضاء متري، ولتكن K متراصة في $\mathbb{X}$.

☝ إذا كان

$$\begin{aligned} f: K\subseteq\mathbb{X} &\to \mathbb{C}. \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

مستمراً

فإن :

$$\begin{aligned} |f|: K\subseteq\mathbb{X} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

مستمراً ويبلغ حديه الأعلى والأدنى على K .

أي :

$$\exists x_0\in K\,,\exists y_0\in K:$$

$$|f(x_0)|=\sup\{|f(x)|: x\in K\}$$

$$|f(y_0)|=\sup\{|f(y)|: y\in K\}$$

✌ ليكن : $f:\mathbb{X}\to\mathbb{R}.$

$$y\mapsto d(x,y).$$

إن f مستمر. بين أن ثمة $y_0\in K$ بحيث :

$$d(x,y_0)=\inf\{d(x,y): y\in K\}=d(x,K).$$

مبرهنة 4:

إذا كانت A,B مجموعتين منفصلتين وغير خاليتين ، و كانت A متراصة و B مغلقة فإن : $d(A,B)>0$.

7) نحو الترابط في فضاء متري

أولاً : الترابط في فضاء متري $(\mathbb{X},\boldsymbol{d})$:

تعريف : نقول عن مجموعةٍ $H\subseteq\mathbb{X}$ إنّها **غير مترابطة** إذاا تحقّق ما يلي:

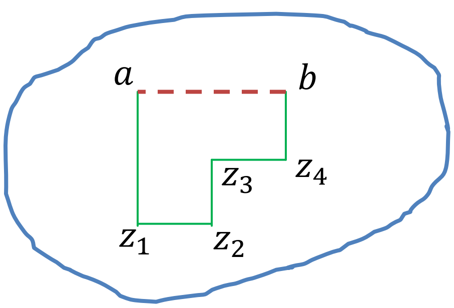
$$(\exists\ \mathrm{A,B}\subseteq\mathbb{X}: A\neq\emptyset\,,B\neq\emptyset\,,\bar{A}\cap B=A\cap\bar{B}=\emptyset\,,A\cup B=H\,)\qquad(*).$$

سنعبر عن ذلك بقولنا يمكن شطر H تبولوجياً إلى مجموعتين منفصلتين .

و سنقول إن H مترابطة إذا وفقط إذا لم يتحقق الشرط السابق، ونقول إنَّ الفضاء مترابط إذا كانت المجموعة الشّاملة مترابطة.

مبرهنة:

- الشرط اللازم والكافي لكي تكون مجموعة مفتوحة G في $\mathbb{C}$ مترابطة هو أنه يمكن وصل أي نقطتين منها بخط مضلعي يقع بأكمله في G .



ثانياً: تعريف المركبات المترابطة في فضاء متري :

إذا كانت $D\subseteq\mathbb{X}$ مترابطة وأي مجموعة مترابطة أخرى تحويها لابد وأن تساويها فنسمي D مركبة مترابطة لـ $\mathbb{X}$ (أو في $\mathbb{X}$).

تمارين عن الترابط :

تمرين 1: برهن أن :

- إذا كانت $\bar{A} \subseteq B \subseteq A$ فإن : [A مترابطة $\Longleftarrow$ B مترابطة].
- كل مركبة مترابطة لابد وأن تكون مغلقة.

تمرين 2 :برهن أن الاستمرار يحافظ على الترابط.

تمرين 3 :ما هي المجموعات المترابطة في $\mathbb{R}$ ؟

ملحق (1)

النهاية العليا والنهاية السفلى لمتتالية من الأعداد $\{a_m\} \subseteq \mathbb{R}$:

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim\inf a_n = \lim_{n\to\infty}[\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots \dots\}].$$

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim\sup a_n = \lim_{n\to\infty}[sup\,\{a_n, a_{n+1}, \dots \dots\}].$$

مثال :

ليكن : $a_n = (-1)^n\,; n \geq 2\,, a_0 = 10\,;\ a_1 = -10.$

$$b_n = \sin\frac{\pi n}{2}\quad ;\ n \geq 2\,, b_0 = 7\,, b_1 = -20.$$

حدد النهاية العليا و النهايه السفلى لكل منهما.

الحل :

$$(a_n): 10\,, -10, 1, -1, 1, -1, \dots \dots \dots.$$

$$(b_n): 7, -20, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1\,, \dots \dots \dots.$$

$$\overline{\lim}\, a_n = 1\,,\ \overline{\lim}\, b_n = 1.$$

$$\underline{\lim}\, a_n = -1,\ \underline{\lim}\, b_n = 1.$$

لكن :

$$\sup_{n\geq 1} a_n = 10,\ \inf_{n\geq 1} a_n = -10.$$

$$\sup_{n\geq 1} b_n = 7,\ \inf_{n\geq 1} b_n = -2.$$

ملحق (2)

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاء متري، $p \in \mathbb{X}$ ، $A \subseteq \mathbb{X}$ ، p نقطة تراكم لـ A . عندئذ أي من العبارات الآتية صحيحة وأيها خاطئة مع التعليل:

- pنقطة حدية لـ A (أو نقطة نهاية لـ A) .
- pنقطة ملاصقة لـ A .
- pنقطة داخلية لـ A .
- pنقطة من جبهة لـ A .
- كل جوار لـ p يلاقي A .
- كل جوار لـ p يلاقي $A - \{p\}$.
- pنقطة ملاصقة لـ A^c.
- $p \in A$ أو $p \in A^c$.
- $p \notin A$
- $p \in A - A^0$
- $p \in A \cup Fr(A)$
- إذا كان $(\mathbb{X}, d)$ متراصاً فإنه فضاء متري تام.
- إذا كان $(\mathbb{X}, d)$ فضاء متري تام فهو متراص.
- إذا كان $(\mathbb{X}, d)$ هاوسدورفي و A مغلقة ومحدودة فإن A متراصة.
- إذا كان $(\mathbb{X}, d)$ هاوسدورفي وكانت A متراصة فإنها تكون مغلقة ومحدودة.
- $(\mathbb{X}, d)$ يتمتع بقابلية العد الأولى.
- إذا كان $(\mathbb{X}, d)$ يتمتع بقابلية العد الثانية فإن $(\mathbb{X}, d)$ فصول.
- $(\mathbb{X}, d)$فضاء $T_{3\frac{1}{2}}$.
- $\delta(A) = \delta(A \cup Fr(A))$.
- إذا كان $(\mathbb{X}, d)$ متراص محلياً فإن $(\mathbb{X}, d)$ متراص.
- $(\mathbb{X}, d)$ غير مترابط إذا وفقط إذا كان $(\mathbb{X}, \frac{d}{1+d})$ غير مترابط.
- إذا كان $A = [0,1[$ وكان $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ و d المسافة المألوفة فإن A فضاء جزئي.