

الجمهورية العربية السورية

وزارة التعليم العالي

# الرياضيات العامة

## الجبر والتحليل

القسم الأول

مفاهيم عامة - الجبر  
الرياضيات  
مكتبة الفيزياء - كلية العلوم  
رقم السجل: ٢٤١

ترجمة

الدكتور عدنان الحموي

استاذ مساعد في قسم الرياضيات  
بجامعة دمشق

تأليف

ش. بيزو م. زمانسكي

## مقدمة المترجم

يُعتبر هذا المؤلف أحد المؤلفات القيّمة في الرياضيات العامة فهو يُغطي المواضيع الأساسية في الرياضيات المعاصرة بشكل دقيق وبأسلوب بسيط ، ولكن لا يخلو من الإسهاب أحياناً . ويُمثّل مرجعاً شاملاً في الرياضيات المعاصرة يفيد منه بشكل خاص طلبة الرياضيات والفيزياء النظرية ، ونقله إلى اللغة العربية سيغني دون شك المكتبة العربية العلمية بكتاب ثمين .

مؤلفا الكتاب ، البروفسور زمانسي والبروفسور بيزو ، الأستاذان بجامعة باريس ، هما من خيرة الباحثين المعاصرين في الرياضيات ولهما في تطويرها باعٌ طويل .

لقد حاولنا في ترجمة هذا المؤلف الالتزام الدقيق بما جاء فيه بعد تدارك لبعض الهفوات وتصحيح ما لاحظناه من أخطاء مطبعية ، كما حافظنا على رموزه بقدر ما تسمح به إمكانيات مطبعة جامعة دمشق . هذا وقد اتبعنا في كتابة الصيغ الرياضية الأسلوب المتعارف عليه ، وهو أن تقرأ تلك العبارات من اليسار إلى اليمين ، وكذلك الأمر لدى قراءة عدة صيغ أو رموز أجنبية تفصل بينها فاصلة أجنبية ( و ) أو نقطة وفاصلة أجنبية ( ؛ ) .

إننا إذ نقدّم هذا المؤلف لنأمل أن يسهم ، وهو بين يدي القارئ العربي ، في تحقيق الفائدة المرجوة منه .

عدنان الحموي

دكتور دولة في الرياضيات  
(جامعة باريس)

# المقدمة

لا يمكن لمؤلف تدريسي في الرياضيات العامة أن يكون مبتكراً . ففي مثل المؤلف يجد القارئ كثيراً من الابحاث التي سبق أن عولجت في كتب قيّمة .

ويرجع ذلك بلا شك الى طبيعة مثل هذا المؤلف : فهو موجه الى الشباب الذين أنهوا دراستهم الثانوية وهم على وشك الشروع في دراسات علمية حقيقية ؛ لذا عليه أن يوفر لهم الصلة الاولى بتلك الدراسات الجديدة التي تمكنهم ، بعد بضع سنوات ، من الحصول على المفاهيم النظرية والطرائق الحديثة التي تقودهم الى الابتكار العلمي .

ويتوجب على مثل هذا المؤلف أن يكون مرتبطاً بمناهج الرياضيات في مرحلة الدراسة الثانوية ، وأن يعرف بعمليات رياضية جديدة ، ويجب كذلك أن يهيء الطالب للدراسات اللاحقة .

ومن السهل تحقيق الشرط الأخير ، ذلك أن مناهج الرياضيات العامة التي وضعت مؤخراً ليست سوى المناهج التي اقترحها الرياضيون الفرنسيون في إطار تنظيم عام لتدريس الرياضيات في كليات العلوم .

ولقد كان الاهتمام الرئيسي منصباً على تجنب الانقطاع وعلى الاكتفاء بتعيين الخطوط العريضة لتدريس موزع على ثلاث سنوات مع احترام حرية أساتذة كليات العلوم ، هذه الحرية التي لا بد منها من أجل التطور العلمي العام . ولكن من المؤسف أن استيعاب مناهج الرياضيات العامة خلال سنة جامعية واحدة ومن قبل شباب أنهم لتوهم الدراسة الثانوية ، هو بالتأكيد أمر صعب نظراً

## ارشادات الى الطلاب

ان دراسة الرياضيات تستوجب معرفة طبيعتها والهدف منها .  
وعلى الرغم من ان التقسيمات التي سترد فيما يلي هي مصطنعة الى حد ما ،  
لكنها مع ذلك تعبر عن واقع حقيقي .

من المعروف ان الرياضيات تقدم وسائل تستخدم تقريبا في جميع الفعاليات  
الفكرية من اجل ابداعها الذاتي . ومن الطبيعي ان اكثرية الطلاب لن يدخلوا  
عالم الابداع في الرياضيات ، ولكنهم سيكونون بمن يستخدم الرياضيات ،  
غير انه من الواضح ان استخدام أداة ما يكون اكثر دقة وفائدة عندما تعرف  
طبيعة هذه الاداة معرفة جيدة ، أي عندما تعرف الحدود التي يمكن ضمنها  
استخدام هذه الاداة والاشياء او المواضيع التي يمكن تطبيقها عليها ، و ( اذا  
أمكن ) الكيفية التي صنعت بها هذه الاداة نفسها .

وفوق ذلك فان العمل الفكري الضروري من اجل الدراسات الرياضية  
يتطلب تكويناً منطقياً ، لا تستوجهه عموماً الفعاليات الاخرى ، ويؤدي هذا  
التكوين المنطقي الى الامانة العلمية ، اذن الى الامانة بمعناها العادي .

ولا بد من توفر العنصرين السابقين في كل فعالية علمية وبشكل خاص في  
كل ابداع علمي ( وحتى في كل ابداع تقني ) يتطلب شيئاً من الرياضيات .  
وهذه الاعتبارات العامة الموجزة توضح هدف الارشادات التالية :

ان التفكير الشخصي العميق ضروري ويجب ان يزداد عمقاً عندما يتعلق  
بفاهيم اساسية او بأساليب فعالة .

فمثلاً لا تستلزم معرفة جدول الضرب إلا القليل من التفكير ، فهي

لا تتناول سوى آليات أولية . في حين ان ادراك كون عمليتي ضرب وجمع الاعداد هما عمليتان لا فرق بينهما من الوجة الرياضية ، واستيعاب مفهوم الحقل يتطلب كل منهما تفكيراً عميقاً .

وهكذا يبدو مفهوم نهاية متتالية عديدة مفهوماً حدسياً نوعاً ما . ولكن المعرفة الدقيقة لهذا المفهوم ولاشكاله المتعددة يتطلب كثيراً من التفكير الشخصي؛ في حين ان ادراك اهمية مفهوم متتالية كوشي يستلزم تفكيراً اضافياً . ان هذا التفكير الشخصي، الذي يمكن فقط إثارته في محاضرة او في مؤلف تدريسي هو أمر لا بد منه من اجل التقدم في الدراسة . وليس للأستاذ أية وسيلة تقريباً ليسهم في هذا المضمار ، لأنه مهما حاول الابداع في صياغة أفكاره ، فليس من المؤكد ان احدى هذه الصياغات ستثير لدى مستمعيه او قارئيه ما تثير لديه من مفاهيم اولية .

فمن المهم اذن ان يعلم الطلاب ان عليهم قبل كل شيء ان يعتادوا على التفكير الذاتي ، ويجب ان ينصب تفكيرهم على المفاهيم التي تقدم اليهم ، وعلى البنية المنطقية للمحاكمة ، وعلى طبيعة الصياغة ، ثم على مدى شمول النظريات او الدساتير المطروحة .

ويساعد الطالب في هذا المجهود الفكري ، وبالتالي في الفهم ، المناقشات والبحث عن امثلة موافقة وأمثلة معاكسة ( التي تشكل عنصراً هاماً في المعرفة ) والاهتمام بايجاد مصدر المفاهيم الجديدة المطروحة عليه من بين المعارف المجمعة لديه منذ طفولته .

ولكن هذا المجهود الفكري ليس بكافي في الرياضيات ، لأن المفهوم الرياضي يوجد ليولد مفهوماً آخر ، لذا يجب ألا نغفل هذا المظهر الفني للمعرفة وللتكوين الرياضي الذي تمثله التمارين التطبيقية .

والتمرينات الرياضية تشكل بمجموعها سلسلة مستمرة من الاسئلة والاجوبة، تبدأ بتطبيق القواعد العملية وتستمر حتى الشروع في البحث العلمي .

فينتمي مثلاً الى مضمار القواعد الآلية اجراء الحسابات الابتدائية والحسابات  
الذهنية وقواعد ضرب المصفوفات وحل المعادلات الخطية ودراسات المثلثات  
ودراسات الاستقاق المعتادة ومعرفة التوابع الأصلية للتوابع التي يقال عنها  
ابتدائية . وهذه المعارف ضرورية في كل عمل رياضي .

وهناك معارف وقواعد أخرى ذات طبيعة أكثر دقة ، وتتطلب ، في معظم  
الأحيان ، تذكر الشروط التي رافقت برهانها . وهذه هي الحالة في التحليل  
الرياضي بالنسبة لنظرية رول ودستور تايلور ودستور القيمة الوسطى وقواعد  
تقارب السلاسل ، الخ . وهي تستخدم كثيراً ، لكن شروط امكانية تطبيقها  
تتصف بشيء من الدقة ، فاستخدام القيمة الوسطى دون حذر قد يؤدي الى  
نتائج غير معقولة ، وكذلك فان قواعد تقارب السلاسل هي في أغلب الأحيان  
شروط كافية ولكنها غير لازمة .

وأخيراً فان النظريات العامة التي تتناول المفاهيم الرياضية الأساسية تتطلب  
معالجة دقيقة جداً .

وفي مجال القواعد ذات الصبغة العملية ، فان على الطالب أن يقوم بمحل عدد  
كاف من التمارين ، بحيث لا يشعر بأي ضيق عند معالجته لموضوع نظري يتطلب  
عملاً أكثر أصالة . فعليه أن يعرف بشكل يكاد يكون آلياً كيف يضرب  
المصفوفات ويحل المعادلات الخطية وألا يتردد في دراسات الاستقاق ، وأن يتمكن  
بسهولة كبيرة من اجراء العمليات الجبرية الابتدائية .

ثم عليه بعد ذلك أن يعمل جاهداً ليعرف كيف يكتب دون تردد دستور  
تايلور من أجل تابع مفروض وأن يعبر عنه بواسطة توابع ابتدائية وأن يتعرف  
بسرعة على الطريقة المناسبة لحساب أي تكامل ودراسة تقارب سلسلة ما .

وأخيراً عليه أن يعرف أن التمرينات النظرية ( كالتمرينات على نهايات  
التوابع وعلى المكاملة على مجال غير متواص ) قد تتطلب الكثير من الوقت  
والتفكير .

والآن لنتساءل كيف تعالج التمرينات .

إذا كان لدى الطالب نص وحل التمرين المطروح ، فعليه معالجة المسألة دون الاطلاع على حلها ، وبعد فترة توقف طويلة كفاية عند أحد الأسئلة المطروحة ، يعود الى الحل المعطى ، الذي يترك جانباً بعد قراءته ، ليحاول جاهداً إعادة البرهان الذي تعرّف عليه بشكل سريع .

وإذا لم يكن لدى الطالب حل التمرين المطروح ( في التمرينات ذات الصبغة التطبيقية تقريباً ) فعليه أن يعتمد الى استخدام طريقتين مختلفتين في البرهان أو الحساب وأن يتأكد من التوصل الى نتيجة واحدة . أما في التمرينات ذات الطبيعة التطبيقية جداً فيتوجب أن يعاد كل حساب .

وفي كل الحالات يجب أن يكون المؤلف التدريسي في متناول اليد وأن يُرجع اليه بقدر ما يكون السؤال المطروح جديداً .

كيف نتعلم مقررأ في الرياضيات ؟

إن ممارسة التمرينات وفق الطرائق التي أشرنا اليها يقودنا شيئاً فشيئاً الى معرفة الدساتير والقواعد المستعملة ، ثم الى ادراك قيمة هذه القواعد ، وفيما بعد الى فهم التعاريف أو الاصطلاحات أو النظريات التي أدت الى وضع هذه القواعد والدساتير .

هذا وفي الرياضيات ، لا نحفظ « عن ظهر قلب » إلا القليل من المعلومات وما نحفظه بهذه الطريقة ينتج في الواقع عن الاستخدام المتكرر لهذه المعلومات . أما فيما يتعلق بالمفاهيم والنظريات الأساسية فان معرفة كل منها على حدة لا يمكن أن يتم بشكل منفصل عن مجموعها ، وهكذا فانه ينبغي أن ينبثق مفهوم الفضاء الشعاعي ، شيئاً فشيئاً ، عن العديد من الفضاءات الشعاعية : فـ  $R$  يمكن أن تعتبر بمثابة فضاء شعاعي على  $R$  ، ومجموعة التوابع المستمرة على مجال ما هي فضاء شعاعي وذلك ضمن شروط معينة ، وقيمة تكامل ما هي قيمة شكل خطي ، الخ ...

ومفهوم الاستمرار يجعلنا نفكر رويداً رويداً في عدد متزايد من المفاهيم  
والنظريات ويستدعي الى الذهن بشكل يكاد يكون آلياً ، مختلف أنواع التوابع  
المستمرة ، ثم المفهوم العام وأخيراً المفهوم الأصلي للنهاية .

وهكذا يصبح الطالب مسوقاً الى أن يعيد بنفسه صياغة التسلسل المنطقي  
للمواضيع التي يعالجها بحيث يشعر أنه هو الذي يقوم بابداعها .

إن مطالعة كتاب ما في الرياضيات لا تتم بالضرورة وفق تسلسل صفحاته ،  
فمن الممكن أن نبدأ بدراسة التحليل على أن نعود أثناء ذلك الى أقسام الجبر  
اللازمة لفهم الفصل الذي نطالعه في التحليل . كما أن بعض المفاهيم لا تدرك قبل  
العديد من القراءات والعديد من ساعات التفكير ، وهذه ظاهرة طبيعية يجب  
ألا تؤدي الى أي قنوط أو ضعف في العزيمة .

إن هذا الجهد المستمر في تطبيق التمرينات وفي التفكير النظري يؤدي  
رويداً رويداً وباكتسابات متعاقبة الى نظرة شاملة هي الهدف من كل تكوين  
فكري .

إن النجيمات الموضوعية أمام فصل أو قسم أو بند أو جزء من بند ، تعني  
أن المفاهيم والنتائج الواردة في ذلك الموضوع ينبغي أن تكون معروفة ولكن  
البرهان عليها ليس ضرورياً في هذه المرحلة .

هذا ويتضمن الفهرس الأبجدي النهائي المصطلحات الرياضية والى جانب كل  
منها رقم الصفحة أو الصفحات التي 'عرف' فيها ذلك المصطلح .



COLLECTION UNIVERSITAIRE DE MATHÉMATIQUES

**Charles PISOT**

Professeur à la Faculté  
des Sciences de Paris

**Marc ZAMANSKY**

Doyen de la Faculté  
des Sciences de Paris

# **MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES**

**ALGÈBRE - ANALYSE**

**DUNOD**

**PARIS**

**1966**

# الفهرس

مقدمة المترجم

المقدمة

إرشادات إلى الطلاب

٥

١

٤

## الكتاب الأول - مفاهيم عامة

### الفصل الأول - المجموعات

- ١١ القسم الأول : المنطق والرموز المنطقية  
١٥ القسم الثاني : العمليات على المجموعات  
الفصل الثاني - التوابع ، التطبيقات

- ٢٠ ١. التوابع  
٢٤ ٢. التقابلات ؛ قدرة مجموعة  
٢٦ ٣. تباديل مجموعة منتهية  
٢٩ ٤. التابع المركب

### الفصل الثالث - العلاقات الاثنائية

- ٣٣ القسم الأول : علاقة الترتيب  
٣٤ القسم الثاني : علاقة التكافؤ  
٣٦ القسم الثالث : قوانين التشكيل  
٣٦ ١. تعاريف  
٤٢ ٢. المشاكل ( إيزو مورفيسمة )

## الكتاب الثاني .. الجبر

### الفصل الأول . - الأعداد الطبيعية

- ٤٧ 1. تعاريف  
٤٩ 2. العمليات  
٥١ 3. المجموعات المحدودة  
٥٢ 4. المتتاليات

### الفصل الثاني . - توسيع مفهوم الأعداد الطبيعية : الأعداد الصحيحة ، الأعداد العادية

- ٥٣ القسم الأول : تنظير قانون التشكيل  
٥٩ القسم الثاني : الأعداد الصحيحة  
٦٥ القسم الثالث : الأعداد العادية  
٦٥ 1. تعريف وعمليات  
٧١ 2. علاقة ترتيب  
٧٣ 3. القيمة المطلقة

### الفصل الثالث . - قوانين التشكيل

- ٧٦ القسم الأول : القوانين الداخلية  
٧٦ 1. الزمر  
٧٨ 2. الحلقات  
٨٠ 3. الحقول  
٨٣ القسم الثاني : القوانين الخارجية  
٨٣ 1. الفضاء الشعاعي  
٨٥ 2. التنظيم على فضاء شعاعي

القسم الثالث : أمثلة

٨٦

١. التوابع

٨٦

٢. المتتاليات

٩٢

## الفصل الرابع .٠ - كثيرات الحدود

٩٧

القسم الأول : الفضاء الشعاعي ، حلقة كثيرات الحدود

٩٧

١. الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود

٩٩

٢. حلقة كثيرات حدود

١٠١

القسم الثاني : القسمة تبعاً للقوى المتناقصة

١٠٢

١. مساواة القسمة

١٠٦

٢. القاسم المشترك الأعظم لكثيراتي حدود

١١٥

القسم الثالث : القسمة تبعاً للقوى المتزايدة

١٢٢

القسم الرابع : اشتقاق كثيرات الحدود ، دستور تايلور

١٢٢

١. الاشتقاق

١٢٥

٢. دستور تايلور

١٢٩

٣. دستور وأمثلة ثنائي الحد

١٣٢

القسم الخامس : أصفار كثيرات الحدود

١٣٧

القسم السادس : كثيرات حدود ذات عدة مجاهيل

## الفصل الخامس .٠ - الأعداد العقدية

١٤١

القسم الأول : توسيع جبري

١٤٥

القسم الثاني : الأعداد العقدية

١٤٥

١. تعاريف وعمليات

١٥٨

٢. أصفار كثيرات الحدود  $Z[x]$

الفصل السادس . - الكسور العادية  
الفصل السابع . - الفضاءات الشعاعية

١٨٢	القسم الأول : تعاريف وخواص رئيسية
١٨٢	1. تعاريف
١٨٦	2. إنشاء الفضاءات الشعاعية وأمثلة عليها
١٨٩	القسم الثاني : الاستقلال الخطي ، الأسس
١٨٩	1. تعاريف
١٩٢	2. التشاكل بين فضاء ذي $n$ بعداً و $K^n$
١٩٦	3. الأسس
١٩٨	4. الفضاء خارج القسمة
٢٠٣	القسم الثالث : التطبيقات الخطية
٢٠٣	1. تعاريف
٢٠٥	2. التقابلات ، النواة
٢٠٦	3. رتبة تطبيق خطي
٢٠٨	4. التطبيق المركب
٢١٠	القسم الرابع : الأشكال الخطية ، الفضاء الشوي
٢١٠	1. تعاريف
٢١٣	2. رتبة تطبيق خطي
٢١٦	القسم الخامس : الأشكال ثنائية الخطية والأشكال متعددة الخطية
٢١٦	1. تعاريف الأشكال ثنائية الخطية
٢١٩	2. خواص الأشكال ثنائية الخطية
٢٢٠	3. الأشكال متعددة الخطية
٢٢٢	القسم السادس : المعادلات الخطية
٢٢٢	1. دراسة عامة

٢٢٤	2. المعادلات المتجانسة
٢٢٥	3. طريقة الحذف المتوالي
٢٢٩	القسم السابع : الفضاءات المتآلفة ، المجموعات المحدبة
٢٢٩	1. المتنوعة الحطية المتآلفة ، التحويلات المتآلفة
٢٣٥	2. مركز النقط
٢٣٧	3. المجموعات المحدبة

### الفصل الثامن . - المصفوفات

٢٤٢	القسم الأول : خواص عامة
٢٤٧	القسم الثاني : العمليات الجبرية على المصفوفات
٢٤٧	1. الفضاء الشعاعي للمصفوفات
٢٥٠	2. جداء مصفوفتين
٢٥٣	القسم الثالث : المصفوفات المربعة
٢٥٣	1. تعاريف
٢٥٧	2. المصفوفات القابلة للقلب
٢٦١	3. محول مصفوفة
٢٦٣	4. منقول مصفوفة
	5. المرافق العقدي لمصفوفة

### الفصل التاسع . - المعينات

٢٦٥	القسم الأول : حجم متوازيات السطوح المعممة في $R^n$
٢٦٥	1. متوازيات السطوح المعممة
٢٧٩	القسم الثاني : المعينات
٢٧٩	1. تعريف
٢٨٥	2. خواص المعينات

- ٢٩٣ 3. تطبيق المعينات من أجل تحديد رتبة جملة من الأشعة
- ٢٩٧ القسم الثالث : المعينات والمعادلات الخطية
- ٢٩٧ 1. جملة كرامر
- ٣٠١ 2. الحالة العامة

### الفصل العاشر . - الفضاء الإقليدي

- ٣٠٦ القسم الأول : الجداء الداخلي
- ٣١٤ القسم الثاني : الفضاءات الإقليدية المنتهية الأبعاد
- ٣١٤ 1. الأساس المتعامد المنتظم
- ٣١٨ 2. التقايس على  $R^n$
- ٣١٩ 3. الأشكال ثنائية الخطية
- ٣٢٥ 4. الأشكال التربيعية
- ٣٢٦ 5. التحويلات المتعامدة

### الفصل الحادي عشر . - اختزال المصفوفات

- ٣٣٢ القسم الأول : اختزال مصفوفة لا على التعيين
- ٣٣٢ 1. القيم الذاتية ، الأشعة الذاتية
- ٣٣٦ 2. حالة قيم ذاتية متباينة
- ٣٣٩ 3. الحالة العامة

القسم الثاني : اختزال مصفوفة حقيقية متناظرة بواسطة مصفوفة متعامدة ؛

- ٣٤٢ اختزال شكل تربيعي
- ٣٥٧ تصويبات
- ٣٦١ الفهرس